مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (6) العدد (4) 2022

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (6) No. (4) 2022

سلوك غرين – لامي لأجل الجسم المرن الدقيق غير المتجانس وغير متماثل المناحي من نوع آيرو– كوفشنسكي

د. عائدة صائمة*

أ . د منتجب الحسن**

ط . بتول بطل***

(تاريخ الإيداع 28/6/ 2022 – تاريخ النشر21/8/ 2022)

□ ملخّص □

موضوع البحث هو النموذج الرياضي للجسم المرن غير المتماثل المناحي (Anisotropic) وغير المتجانس (non–homogeneous) والمعتبر البنية الجزيئية ، حيث الجزيئ هو جسم قاسي يملك ست درجات حرية (ثلاثة إزاحات لمركز كتله وثلاثة توجهات حول مركز كتله) .

في البحث سنعرض أولاً النموذج الرياضي التقليدي ونموذج لامي الرياضي لهذا الجسم.

بعدها سنعرف سلوك غرين التقليدي وسلوك غرين_ لامي لهذا الجسم.

وسنبين في حالة خاصة لهذا الجسم العلاقة التي تعطي السلوك النظامي للجسم من خلال أحد صيغ غرين المتوافقة مع كون القوة الحجمية معطاة بدلالة توزيعي ديراك والموازية للمحور OX_S

وفي النهاية سنختتم البحث بعرض مسائل للمناقشة .

الكلمات المفتاحية : الجسم المرن الدقيق آيرو – كوفيشنسكي ، سلوك غرين التقليدي ، سلوك غرين – لامي ، حمول حجمية ، مصادر حرارية ، صيغ غرين .

*مدرسة في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة طرطوس .

** أستاذ في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة البعث.

***طالبة ماجستير في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة طرطوس.

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (6) العدد (4) 2022

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (6) No. (4) 2022

Non- The Lame – Green Behavior for Anisotropic and Homogeneous Micro polar elastic Body of Aero – kovshinski Type

II Dr . Aeda Saemma8*

I Prof . Mountajab Al – Hasan**

III Mgr. Student: Batoul Batal***

(Received 28/6/2022.Accepted 21/8/2022)

□ABSTRACT □

The subject of this paper is the mathematical model of anisotropic and non-homogeneous of considerable micro structure where the particle is rigid body of six degrees of freedom (three displacements of its mass center and three orientations with respect to its mass center) .

In paper we first introduce the traditional and Lame mathematical models of this considerable body .

Then, we define traditional Green and Lame – Green behaviors of this considerable body .

Next , as a special case , we derive the Green formulas which determines the regular solution of the body using the Green functions related to the body force given by Dirac distributions , and parallel to the OX_S axis .

Finally,

we end the paper by demonstrating some problems for discussing .

Keywords: The Micro polar elastic body of (A – K) type, The traditional Green behavior , Lame – Green behavior , body loads , heat sources , Green Formula .

*Doctor At Department of Mathematics–Faculty of Science–Tartous University.

**Professor At Department of Mathematics – Faculty of Science – Al–Baath University.

*** Master Student At Department of Mathematics–Faculty of Science–Tartous University.

المقدمة :

في نهاية القرن السابع عشر وضع الباحث Hock نموذج رياضي لأبسط الأجسام المرنة والمعين بثابتين ماديين حيث دعي هذا النموذج فيما بعد بنموذج Hock [2]، وفي نهاية القرن التاسع عشر وضع Voigt حجر الأساس لنموذج رياضي أكثر تعقيداً لجسم مرن معتبر البنية الجزيئية وفي بداية القرن العشرين وضع الأخوان الفرنسيان Cosseratالنظرية الرياضية العامة لأوساط مستمرة أكثر تعقيداً ، دُعيت فيما بعد بالأوساط المستمرة من نوع Cosserat . بعدها وفي أربعينيات وخمسينيات وستينات القرن الماضي اكتشف الوسط العلمي قيمة هذه النظرية حيث تابع العديد من الباحثين دراسة أجسام تمثل حالات خاصة لأجسام ضمن هذه النظرية ومن هؤلاء الباحثين Georgie Kupradzeوالبولندي Novicki والألمانين Gorton و Trousdale والتركي Iringen . . . إلخ.

تعطي توابع غرين طريقة قوية لإيجاد الحل التحليلي (المغلق) للمعادلات الاشتقاقية الجزئية حيث اكتشف هذه التوابع الباحث الرياضي غرين من أجل أبسط المعادلات الاشتقاقية العادية وأبسط المعادلات الاشتقاقية الجزئية المتمثلة بمعادلة لابلاس ، ثم تم تعميم ذلك من قبل العديد من الباحثين إلى معادلة بواسون ومن ثم قام الباحث Helmholtzبتعميم ذلك إلى معادلته الاشتقاقية واكتشف العلاقة التكاملية التي تعطي باقي الحلول بدلالة توابع غرين .[2,6,10,11]

بعد ذلك تم تعميم توابع غرين والعلاقات التي تعطي الحلول بدلالة توابع غرين إلى نظرية الحقول الكمونية لتشمل الترموديناميك والكهرطيسية والمرونة السكونية ، حيث قام العديد من الباحثين منهم Novickiو Kupradze بمناقشة هذه التوابع والعلاقات الناتجة لأجل المرونة السكونية [1,2,6] .

هدف وأهمية البحث :

يهدف البحث إلى مناقشة توابع غرين من أجل الجسم المرن من نوع آيرو– كوفيشنسكي غير المتجانس وغير متماثل المناحي وبوجود حمول تيرموميكانيكية.

أما أهمية البحث فهي تكمن بالآتي :

تملك توابع غرين أهمية كبيرة تتمثل بأن الحل النظامي الذي يعطي الازاحة المعممة للجسم، يعطى بالشكل المغلق، من خلال هذه التوابع وبصيغ تدعى صيغ غرين .

طرائق البحث :

في البحث ، سنناقش توابع غرين لأجل الجسم المذكور معتمدين تعميم الطريقة المتبعة في[6,11]

من أجل متطلبات هذا البحث سنعرض فيما يلي السلوكين الرياضيين النظاميين؛ التقليدي و لامي في الجسم المذكور، كما سنعرض مبرهنة الأعمال المتبادلة لأجل الجسم الصلب المرن المتجانس والمتماثل المناحي و المعين بستة ثوابت مادية ويخضع لحرارة .

أولا : السلوك النظامي التقليدي للجسم المعتبر [3]:

يتألف السلوك النظامي التقليدي للجسم المعتبر من مجموعة العلاقات والمعادلات الأساسية والشروط الحدية والابتدائية التالية:

1) الطاقة الحرة:

$$F = \frac{1}{2} a_{jikl}\ \gamma_{ji} \gamma_{kl} + \frac{1}{2} c_{jikl} \kappa_{ji} \kappa_{kl} + b_{jikl} \gamma_{ji} \kappa_{kl} - \eta_{ji} \gamma_{ji} \theta - \zeta_{ji} \kappa_{ji} \theta - \frac{c_{\varepsilon}}{T_0} \theta^2$$

حيث : $c_{jikl}, b_{jikl}, a_{jikl}$ هي على الترتيب جدول المرونة وجدولي المرونة الدقيقة للجسم المدروس.

κ_{kl} وγ_{ji} هي على الترتيب المركبات الدريكارتية لمقطعي انفعال القوة و انفعال العزم للجسم المدروس

.

ζ_{ji} وη_{ji} هي على الترتيب مقطع توصيل الحراري المتناظر ومقطع توصيل الحراري الدقيق .

$\theta := T - T_0$ هو التغيير الحراري ، حيث T هو مقطع الحرارة المطلقة و T_0 هو مقطع الحرارة الطبيعي .

c_{ε} الحرارة النوعية للجسم من أجل تشوه ثابت له .

2) العلاقات المصفوفية التأسيسية المحققة في $\Omega \times [0, \infty[$:

$$\sigma_{ji} = \frac{\partial F}{\partial \gamma_{ji}} \quad , \quad \mu_{ji} = \frac{\partial F}{\partial \kappa_{ji}} \quad , \quad S = -\frac{\partial F}{\partial T}$$

حيث : σ_{ji}، μ_{ji} وS على الترتيب هي المركبات الديكارتية لمقطع اجهادات القوة ومقطع اجهادات العزم إضافة لمقطع الأنتروبيه السلمي .

3) العلاقات التأسيسية $\Omega \times [0, \infty[$:

$$\sigma_{ji} = a_{jikl}\ \gamma_{kl} + b_{jikl} \kappa_{kl} - \eta_{ji} \theta, \qquad (٣,١)$$

$$\mu_{ji} = b_{klji} \gamma_{kl} + c_{jikl} \kappa_{kl} - \zeta_{ji} \theta, \qquad (3,2)$$

$$S = \eta_{ji} \gamma_{ji} + \zeta_{ji} \kappa_{ji} + \frac{c_{\varepsilon}}{T_0} \theta \qquad (3,3)$$

4) العلاقات الهندسية المحققة في $\Omega \times]0, \infty[$:

$$\gamma_{ji} = u_{i,j} - \in_{k,ji}\ \varphi_k, \qquad \kappa_{ji} = \varphi_{i,j}$$

حيث : u_i φ_i على الترتيب هي المركبات الديكارتية لمقطع الإزاحة ولمقطع التوجهات , التنسوريين

.

$\in_{kji}$ هي المركبات الديكارتية لشبه تنسور ليفي تشفيتا مع الوزن نصف .

وهنا نشير أن الفاصلة الدليلية ترمز للاشتقاق الجزئي بالنسبة لمتحولات الموضع ;

$$f_{,i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

5) معادلات الحركة المحققة في $\Omega \times]0, \infty[$:

$$\sigma_{ji,j} + X_i = \rho \ddot{u}_i ,$$

$$\in_{ijk}\ \sigma_{jk} + \mu_{ji,j} + Y_i = J \ddot{\varphi}_i$$

حيث : ρ هي الكثافة الحجمية للجسم ، J هي العطالة الدورانية لهذا الجسم ، $\sigma_{ji}(x,t),\mu_{ji}(x,t)$ هي على الترتيب مصفوفة إجهادات القوة ومصفوفة إجهادات العزم ،غير متناظرتان ، كما أن $\gamma_{ji}(x,t),\kappa_{ji}(x,t)$ هي على الترتيب مصفوفة انفعالات القوة ومصفوفة انفعالات العزم ،غير المتناظرتان .

إضافة إلى ما تقدم فأن X_i, Y_i هي على الترتيب المركبات الديكارتية للقوة الحجمية والعزم الحجمي .

6) معادلة التوصيل الحراري في $\Omega\times]0,\infty[$:

$$\frac{\lambda_{ij}}{T_0}\theta_{,ij}-\frac{c_\varepsilon}{T_0}\dot{\theta}-\eta_{ij}\dot{\gamma}_{ji}-\zeta_{ij}\dot{\kappa}_{ji}=-\frac{W}{T_0}$$

وإذا فرضنا أن :

$$D=\frac{1}{T_0}(\lambda_{ij}\partial_{ij}^2-c_\varepsilon\partial_t)$$

$$W_0=\frac{W}{T_0}$$

فتأخذ المعادلة الشكل التالي :

$$D\theta-\eta_{ij}\dot{\gamma}_{ji}-\zeta_{ij}\dot{\kappa}_{ji}=-W_0$$

حيث : $W_0(x,t)$ هو مقطع تنسوري من المرتبة الصفرية ، يسمى بالمصادر الحرارية .

أما λ_{ij} يمثل مقطع التوصيل الحراري ، التنسوري .

7) الشروط الحدية المحققة على $\partial\Omega\times[0,\infty[$:

$$\sigma_{ji}(x,t)n_j(x)=P_i(x,t),$$
$$\mu_{ji}(x,t)n_j(x)=M_i(x,t),$$
$$\theta(x,t)=\vartheta(x,t)$$

حيث التوابع $M_i(x,t),P_i(x,t),\vartheta(x,t)$ هي توابع مفروضة (معلومة) .

8) الشروط الابتدائية المحققة في $\Omega\times\{0\}$:

$$u_i(x,0)=f_i^{(0)}(x)\qquad,\qquad \dot{u}_i(x,0)=f_i^{(1)}(x)$$
$$\varphi_i(x,0)=g_i^{(0)}(x)\qquad,\qquad \dot{\varphi}_i(x,0)=g_i^{(1)}(x)$$
$$\theta(x,0)=\ell(x)$$

حيث : التوابع $f_i^{(0)}(x)$ ، $f_i^{(1)}(x)$ ، $g_i^{(0)}(x)$ ، $g_i^{(1)}(x)$ ، $\ell(x)$ هي توابع مفروضة (معلومة) .

ثانياً: سلوك لامي النظامي للجسم المعتبر :

فيما يلي سنستنتج سلوك لامي النظامي للجسم المعتبر من خلال حذف تنسوري الاجهادات من السلوك النظامي التقليدي للجسم المعتبر وذلك بإتباع ما يلي :

أولاً: بتعويض العلاقات الهندسية الواردة في البند (4) في العلاقات التأسيسية الواردة في البند (3) نجد

$$\sigma_{ji} = a_{jikl}(u_{l,k} - \in_{mkl}\varphi_m) + b_{jikl}\varphi_{l,k} - \eta_{ji}\theta,$$
$$\mu_{ji} = b_{klji}(u_{l,k} - \in_{mkl}\varphi_m) + c_{jikl}\varphi_{l,k} - \zeta_{ji}\theta,$$
$$S = \eta_{ji}(u_{i,j} - \in_{kji}\varphi_k) + \zeta_{ji}\varphi_{ij} + \frac{c_\varepsilon}{T_0}\theta$$

ثانياً : في الخطوة الثانية نعوض العلاقات السابقة والعلاقات الهندسية في كلٍ من معادلات الحركة ومعادلة التوصيل الحراري فنحصل على :

$$[a_{jikl}(u_{l,k} - \in_{mkl}\varphi_m) + b_{jikl}\varphi_{l,k} - \eta_{ji}\theta]_{,j} + X_i = \rho\ddot{u}_i,$$
$$[b_{klji}(u_{l,k} - \in_{mkl}\varphi_m) + C_{jikl}\varphi_{l,k} - \zeta_{ji}\theta]_{,j} +$$
$$+ \in_{ijk}[a_{jkmp}(u_{p,m} - \in_{tmp}\varphi_t) + b_{jkmp}\varphi_{p,m} - \eta_{kj}\theta] + Y_i = J\ddot{\varphi}_i$$

أما معادلة التوصيل الحراري فتأخذ الشكل :

$$D\theta - \eta_{ij}\dot{u}_{i,j} - \zeta_{ij}\varphi_{i,j} = -W_0$$

. أما الشروط الحدية المحققة على $\partial\Omega\times[0,\infty[$:

$$[a_{jikl}(u_{l,k} - \in_{mkl}\varphi_m) + b_{jikl}\varphi_{l,k} - \eta_{ji}\theta]n_j(x) = P_i(x,t),$$
$$[b_{klji}(u_{l,k} - \in_{mkl}\varphi_m) + c_{jikl}\varphi_{l,k} - \zeta_{ji}\theta]n_j(x) = M_i(x,t),$$
$$\theta(x,t) = \vartheta(x,t)$$

حيث التوابع $M_i(x,t), P_i(x,t), \vartheta(x,t)$ هي توابع مفروضة (معلومة).

. الشروط الابتدائية المحققة في $\Omega\times\{0\}$:

$$u_i(x,0) = f_i^{(0)}(x) \quad , \quad \dot{u}_i(x,0) = f_i^{(1)}(x)$$
$$\varphi_i(x,0) = g_i^{(0)}(x) \quad , \quad \dot{\varphi}_i(x,0) = g_i^{(1)}(x)$$
$$\theta(x,0) = \ell(x)$$

حيث : التوابع $f_i^{(0)}(x)$ ، $f_i^{(1)}(x)$، $g_i^{(0)}(x)$، $g_i^{(1)}(x)$ ، $\ell(x)$ هي توابع مفروضة(معلومة)

.

. نضيف إلى ذلك العلاقات الهندسية المحققة في $\Omega\times]0,\infty[$:

$$\gamma_{ji} = u_{i,j} - \in_{k,ji}\varphi_k, \qquad \kappa_{ji} = \varphi_{i,j}$$

. والعلاقات التأسيسية المحققة في $\Omega\times[0,\infty[$:

$$\sigma_{ji} = a_{jikl}\gamma_{kl} + b_{jikl}\kappa_{kl} - \eta_{ji}\theta,$$
$$\mu_{ji} = b_{klji}\gamma_{kl} + c_{jikl}\kappa_{kl} - \zeta_{ji}\theta,$$
$$S = \eta_{ji}\gamma_{ji} + \zeta_{ji}\kappa_{ji} + \frac{c_\varepsilon}{T_0}\theta$$

النتائج و المناقشة :

تلزمنا المبرهنة التالية وما ينتج عنها [6] ، والتي تعرف بمبرهنة الأعمال المتبادلة (تناسق حلول الجسم الصلب المتجانس متماثل المناحي من نوع آيرو _ كوفشينسكي ، والمعين بالثوابت المادية : $(\mu,\lambda,\alpha,\beta,\varepsilon)$.

ومن أجل متطلبات هذه المبرهنة يلزمنا التعريف التالي :

١) القوة المعممة المؤثرة على الجسم المذكور هي بالتعريف القوة الحجمية X_i والعزم الحجمي Y_i والمصادر الحرارية Q المؤثرة في V (الحجم الذي يشغله الجسم في اللحظة t=0) وقوة الجر P_i وعزم الجر m_i والحقل الحراري θ (أو التدفق الحراري $\theta_{,n}$) المؤثرة في السطح A المحيط ب V .

٢) الإزاحات المعممة هي بالتعريف الازاحات: u_i والدورانات: φ_i والحقل الحراري θ .

تربط المبرهنة التالية بين مجموعتين؛ الأولى هي: القوة المعممة و الازاحات المعممة المطبقة على الجسم والتي سنشير لها بالإشارة دون ذكر رمز الفتحة، والقوة المعممة والازاحات المعممة التي سنشير لها بالفتحة .

مبرهنة ١ :

إذا كانت المجموعة : $\{X_i, Y_i, Q, P_i, m_i, \theta_{,n}\}$ تشكل القوة المعممة الأولى والتي ينتج عنها الازاحات المعممة $\{u, \varphi, \theta\}$.

وكانت المجموعة : $\{X_i', Y_i', Q', P_i, m_i', \theta_{,n}'\}$ تشكل القوة المعممة الثانية والتي ينتج عنها الازاحات المعممة التالية $\{u', \varphi', \theta'\}$ ، عندئذٍ تربط مبرهنة الأعمال المتبادلة مابين المجموعتين السابقتين، من خلال العلاقة التالية [6]:

$$\frac{\eta_0 x}{\vartheta}\{\int_v dv(x)\int_0^t [X_t(x,t-\tau)\frac{\partial u_i'(x,\tau)}{\partial\tau} - X_i'(x,t-\tau)\frac{\partial u_t(x,\tau)}{\partial\tau} +$$

$$Y_i(x,t-\tau)\frac{\partial\varphi_t'(x,\tau)}{\partial\tau} - Y_i'(x,t-\tau)\frac{\partial\varphi_i(x,\tau)}{\partial\tau}]d\tau +$$

$$\int_A dA(x)\int_0^t [P_i(x,t-\tau)\frac{\partial u_i'(x,\tau)}{\partial\tau} - P_i'(x,t-\tau)\frac{\partial u_i(x,\tau)}{\partial\tau} +$$

$$m_i(x,t-\tau)\frac{\partial\varphi_i'(x,\tau)}{\partial\tau} - m_i'(x,t-\tau)\frac{\partial\varphi_i(x,\tau)}{\partial\tau}]d\tau\}$$

$$+x\int_A dA(x)\int_0^t [\theta(x,t-\tau)\theta_{,n}'(x,\tau) - \theta'(x,t-\tau)\theta_{,n}(x,\tau)]d\tau +$$

$$+\int_v dv(x)\int_0^t [\theta(x,t-\tau)Q'(x,\tau) - \theta'(x,t-\tau)Q(x,\tau)]d\tau.$$

حيث ننوه هنا إلى أن الشروط الابتدائية في كلتا الحالتين متجانسة ، كما أن الرمز $f_{,n}$ يدل على مشتق الدالة f بالنسبة لمتجه واحدة الناظم n على السطحA، والموجه نحو خارج V حيث هذا المشتق يعطى بالعلاقة : $f_{,n}(M) = n.\overrightarrow{grad}\, f(M)$.

كما يلزمنا التعريف التالي الذي يعتبر تعميم للتعاريف الموجودة في المراجع العلمية.

ثالثاً: وصف غرين التقليدي للجسم المذكور

وهنا نميز الحالات الثلاث الأتية :

1 . **وصف غرين – لامي التقليدي لأجل حالة القوة الحجمية :**

يطلب إيجاد مجموعة الدوال التنسورية :

$$\{u_i^{(s)}(x,t),\varphi_i^{(s)}(x,t),\gamma_{ji}^{(s)}(x,t),\kappa_{ji}^{(s)}(x,t),\sigma_{ji}^{(s)}(x,t),\mu_{ji}^{(s)}(x,t),\theta^{(s)}(x,t),S^{(s)}(x,t)\}$$

في $\bar{\Omega}\times[0,\infty[$ والمحققة للمعادلات والعلاقات والشروط الحدية والابتدائية التالية :

1) معادلات الحركة المحققة في $\Omega\times]0,\infty[$:

$$\sigma_{ji,j}^{(s)}+\delta(x-\zeta)\delta(t-\tau)\delta_{is}=\rho\ddot{u}_i^{(s)}$$

$$\in_{ijk}\sigma_{jk}^{(s)}+\mu_{ji,j}^{(s)}=J\ddot{\varphi}_i^{(s)}$$

2) معادلة التوصيل الحراري المحققة في $\Omega\times]0,\infty[$:

$$D\theta^{(s)}-\eta_{ij}\dot{\gamma}_{ji}^{(s)}-\zeta_{ij}\dot{\kappa}_{ji}^{(s)}=0$$

3) علاقات توافق الانفعالات المحققة في $\Omega\times[0,\infty[$:

$$\gamma_{li,h}^{(s)}-\gamma_{hi,l}^{(s)}-\in_{khi}\kappa_{lk}^{(s)}+\in_{kli}\kappa_{hk}^{(s)}=0,$$

$$\kappa_{li,h}^{(s)}-\kappa_{hi,l}^{(s)}=0$$

4) العلاقات الهندسية المحققة في $\Omega\times]0,\infty[$:

$$\gamma_{ji}^{(s)}=u_{i,j}^{(s)}-\in_{k,ji}\varphi_k^{(s)}$$

5) العلاقات التأسيسية المحققة في $\Omega\times[0,\infty[$:

$$\sigma_{ji}^{(s)}=a_{jikl}\gamma_{kl}^{(s)}+b_{jikl}\kappa_{kl}^{(s)}-\eta_{ji}\theta^{(s)},$$

$$\mu_{ji}^{(s)}=b_{klji}\gamma_{kl}^{(s)}+c_{jikl}\kappa_{kl}^{(s)}-\zeta_{ji}\theta^{(s)},$$

$$S^{(s)}=\eta_{ji}\gamma_{ji}^{(s)}+\zeta_{ji}\kappa_{ji}^{(s)}+\frac{c_\varepsilon}{T_0}\theta^{(s)}$$

6) الشروط الحدية المحققة على $\partial\Omega\times[0,\infty[$:

$$\sigma_{ji}^{(s)}(x,t)n_j(x)=0,$$

$$\mu_{ji}^{(s)}(x,t)n_j(x)=0,$$

$$\theta^{(s)}(x,t)=0$$

7) الشروط الابتدائية المحققة في $\Omega\times\{0\}$:

$$u_i^{(s)}(x,0)=0,\qquad \dot{u}_i^{(s)}(x,0)=0,$$

$$\varphi_i^{(s)}(x,0)=0,\qquad \dot{\varphi}_i^{(s)}(x,0)=0,$$

$$\theta^{(s)}(x,0)=0$$

تعريف ١ : نسمي مجموعة التوابع :

$\{u_i^{(s)}(x,t),\varphi_i^{(s)}(x,t),\gamma_{ji}^{(s)}(x,t),\kappa_{ji}^{(s)}(x,t),\sigma_{ji}^{(s)}(x,t),\mu_{ji}^{(s)}(x,t),\theta^{(s)}(x,t),S^{(s)}(x,t)\}$ التي

تتحقق في $\bar{\Omega}\times[0,\infty[$ مجموعة العلاقات والمعادلات والشروط السابقة ، بسلوك غرين التقليدي للجسم المذكور بما يتناسب مع القوة الحجمية .

2. وصف غرين التقليدي لأجل حالة العزم الحجمي :

يطلب إيجاد مجموعة الدوال التنسورية :

$\{u_i^{(s)}(x,t),\varphi_i^{(s)}(x,t),\gamma_{ji}^{(s)}(x,t),\kappa_{ji}^{(s)}(x,t),\sigma_{ji}^{(s)}(x,t),\mu_{ji}^{(s)}(x,t),\theta^{(s)}(x,t),S^{(s)}(x,t)\}$ في

$\bar{\Omega}\times[0,\infty[$ والمحققة للمعادلات والعلاقات والشروط الحدية والابتدائية التالية :

1) معادلات الحركة المحققة في $\Omega\times]0,\infty[$:

$$\sigma_{ji,j}^{(s)}=\rho\ddot{u}_i^{(s)}$$

$$\in_{ijk}\sigma_{jk}^{(s)}+\mu_{ji,j}^{(s)}+\delta(x-\zeta)\delta(t-\tau)\delta_{is}=J\ddot{\varphi}_i^{(s)}$$

2) معادلة التوصيل الحراري المحققة في $\Omega\times]0,\infty[$:

$$D\theta^{(s)}-\eta_{ij}\dot{\gamma}_{ji}^{(s)}-\zeta_{ij}\dot{\kappa}_{ji}^{(s)}=0$$

3) علاقات توافق الانفعالات المحققة $\Omega\times[0,\infty[$:

$$\gamma_{li,h}^{(s)}-\gamma_{hi,l}^{(s)}-\in_{khi}\kappa_{lk}^{(s)}+\in_{kli}\kappa_{hk}^{(s)}=0,$$
$$\kappa_{li,h}^{(s)}-\kappa_{hi,l}^{(s)}=0$$

4) العلاقات الهندسية المحققة في $\Omega\times]0,\infty[$:

$$\gamma_{ji}^{(s)}=u_{i,j}^{(s)}-\in_{k,ji}\varphi_k^{(s)}$$

5) العلاقات التأسيسية المحققة في $\Omega\times[0,\infty[$:

$$\sigma_{ji}^{(s)}=a_{jikl}\gamma_{kl}^{(s)}+b_{jikl}\kappa_{kl}^{(s)}-\eta_{ji}\theta^{(s)},$$
$$\mu_{ji}^{(s)}=b_{klji}\gamma_{kl}^{(s)}+c_{jikl}\kappa_{kl}^{(s)}-\zeta_{ji}\theta^{(s)},$$
$$S^{(s)}=\eta_{ji}\gamma_{ji}^{(s)}+\zeta_{ji}\kappa_{ji}^{(s)}+\frac{c_\varepsilon}{T_0}\theta^{(s)}$$

6) الشروط الحدية المحققة على $\partial\Omega\times[0,\infty[$:

$$\sigma_{ji}^{(s)}(x,t)n_j(x)=0,$$
$$\mu_{ji}^{(s)}(x,t)n_j(x)=0,$$
$$\theta^{(s)}(x,t)=0$$

7) الشروط الابتدائية المحققة في $\Omega\times\{0\}$:

$$u_i^{(s)}(x,0)=0,\qquad \dot{u}_i^{(s)}(x,0)=0,$$
$$\varphi_i^{(s)}(x,0)=0,\qquad \dot{\varphi}_i^{(s)}(x,0)=0,$$
$$\theta^{(s)}(x,0)=0$$

تعريف ٢: نسمي مجموعة التوابع :

$$\{u_i^{(s)}(x,t),\varphi_i^{(s)}(x,t),\gamma_{ji}^{(s)}(x,t),\kappa_{ji}^{(s)}(x,t),\sigma_{ji}^{(s)}(x,t),\mu_{ji}^{(s)}(x,t),\theta^{(s)}(x,t),S^{(s)}(x,t)\}$$

التي تتحقق في $\bar{\Omega}\times[0,\infty[$ مجموعة العلاقات والمعادلات والشروط السابقة ، ندعوها بسلوك غرين التقليدي للجسم المذكور بما يتناسب مع العزم الحجمي .

3. وصف غرين التقليدي لأجل حالة المصادر الحرارية :

يطلب إيجاد مجموعة الدوال التنسورية :

$$[u_i(x,t),\varphi_i(x,t),\gamma_{ji}(x,t),\kappa_{ji}(x,t),\sigma_{ji}(x,t),\mu_{ji}(x,t),\theta(x,t),S(x,t)]$$

في $\bar{\Omega}\times[0,\infty[$ والمحققة للمعادلات والعلاقات والشروط الحدية والابتدائية التالية :

1) معادلات الحركة المحققة في $\Omega\times]0,\infty[$:

$$\sigma_{ji,j}=\rho\ddot{u}_i$$
$$\in_{ijk}\sigma_{jk}+\mu_{ji,j}=J\ddot{\varphi}_i$$

2) معادلة التوصيل الحراري المحققة في $\Omega\times]0,\infty[$:

$$D\theta-\eta_{ij}\dot{\gamma}_{ji}-\zeta_{ij}\dot{\kappa}_{ji}=-\delta(x-\zeta)\delta(t-\tau)$$

3) علاقات توافق الانفعالات المحققة في $\Omega\times[0,\infty[$:

$$\gamma_{li,h}-\gamma_{hi,l}-\in_{khi}\kappa_{lk}+\in_{kli}\kappa_{hk}=0,$$
$$\kappa_{li,h}-\kappa_{hi,l}=0$$

4) العلاقات الهندسية المحققة في $\Omega\times]0,\infty[$:

$$\gamma_{ji}=u_{i,j}-\in_{k,ji}\varphi_k$$

5) العلاقات التأسيسية المحققة في $\Omega\times[0,\infty[$:

$$\sigma_{ji}=a_{jikl}\gamma_{kl}+b_{jikl}\kappa_{kl}-\eta_{ji}\theta\ ,$$
$$\mu_{ji}=b_{klji}\gamma_{kl}+c_{jikl}\kappa_{kl}-\zeta_{ji}\theta\ ,$$
$$S=\eta_{ji}\gamma_{ji}+\zeta_{ji}\kappa_{ji}+\frac{c_\varepsilon}{T_0}\theta$$

6) الشروط الحدية المحققة على $\partial\Omega\times[0,\infty[$:

$$\sigma_{ji}(x,t)n_j(x)=0,$$
$$\mu_{ji}(x,t)n_j(x)=0,$$
$$\theta(x,t)=0$$

7) الشروط الابتدائية المحققة في $\Omega\times\{0\}$:

$$u_i(x,0)=0,\qquad \dot{u}_i(x,0)=0,$$
$$\varphi_i(x,0)=0,\qquad \dot{\varphi}_i(x,0)=0,$$
$$\theta(x,0)=0$$

تعريف ٣ : نسمي مجموعة التوابع :

$$\{u_i(x,t), \varphi_i(x,t), \gamma_{ji}(x,t), \kappa_{ji}(x,t), \sigma_{ji}(x,t), \mu_{ji}(x,t), \theta(x,t), S(x,t)\}$$

التي تتحقق في $\bar{\Omega}\times[0,\infty[$ مجموعة العلاقات والمعادلات والشروط السابقة ، ندعوها بسلوك غرين التقليدي للجسم المذكور بما يتناسب مع المصادر الحرارية .

<u>رابعاً</u>: وصف غرين – لامي للجسم المذكور

وهنا نميز الحالات الثلاث الآتية:

1. **حالة القوة الحجمية :**

يطلب إيجاد مجموعة الحقول الفيزيائية

$$\{u_i^{(s)}(x,t), \varphi_i^{(s)}(x,t), \gamma_{ji}^{(s)}(x,t), \kappa_{ji}^{(s)}(x,t), \sigma_{ji}^{(s)}(x,t), \mu_{ji}^{(s)}(x,t), \theta^{(s)}(x,t), S^{(s)}(x,t)\}$$

في $\bar{\Omega}\times[0,\infty[$ والمحققة للمعادلات والعلاقات والشروط الحدية والابتدائية التالية:

1) معادلات الحركة المحققة في $\Omega\times]0,\infty[$:

$$[a_{jikl}(u_{l,k}^{(s)} - \in_{mkl}\ \varphi_m^{(s)}) + b_{jikl}\varphi_{l,k}^{(s)} - \eta_{ji}\theta^{(s)}]_{,j} + \delta(x-\zeta)\delta(t-\tau)\delta_{is} = \rho\ddot{u}_i^{(s)},$$

$$[b_{klji}(u_{l,k}^{(s)} - \in_{mkl}\ \varphi_m^{(s)}) + c_{jikl}\varphi_{l,k}^{(s)} - \zeta_{ji}\theta^{(s)}]_{,j} +$$
$$+ \in_{ijk}\ [a_{jkmp}(u_{p,m}^{(s)} - \in_{tmp}\ \varphi_t^{(s)}) + b_{jkmp}\varphi_{p,m}^{(s)} - \eta_{kj}\theta^{(s)}] = J\ddot{\varphi}_i^{(s)}$$

2) معادلة التوصيل الحراري المحققة في $\Omega\times]0,\infty[$:

$$D\theta^{(s)} - \eta_{ij}\dot{u}_{i,j}^{(s)} - \zeta_{ij}\dot{\varphi}_{i,j}^{(s)} = 0$$

3) الشروط الحدية المحققة على $\partial\Omega\times[0,\infty[$:

$$[a_{jikl}(u_{l,k}^{(s)} - \in_{mkl}\ \varphi_m^{(s)}) + b_{jikl}\varphi_{l,k}^{(s)} - \eta_{ji}\theta^{(s)}]n_j(x) = 0,$$
$$[b_{klji}(u_{l,k}^{(s)} - \in_{mkl}\ \varphi_m^{(s)}) + c_{jikl}\varphi_{l,k}^{(s)} - \zeta_{ji}\theta^{(s)}]n_j(x) = 0,$$
$$\theta^{(s)}(x,t) = 0$$

4) الشروط الابتدائية المحققة في $\Omega\times\{0\}$:

$$u_i^{(s)}(x,0) = 0, \qquad \dot{u}_i^{(s)}(x,0) = 0,$$
$$\varphi_i^{(s)}(x,0) = 0, \qquad \dot{\varphi}_i^{(s)}(x,0) = 0,$$
$$\theta^{(s)}(x,0) = 0$$

5) العلاقات الهندسية المحققة في $\Omega\times]0,\infty[$:

$$\gamma_{ji}^{(s)} = u_{i,j}^{(s)} - \in_{k,ji}\ \varphi_k^{(s)}, \qquad \kappa_{ji}^{(s)} = \varphi_{i,j}^{(s)}$$

6) العلاقات التأسيسية المحققة في $\Omega\times[0,\infty[$:

$$\sigma_{ji}^{(s)} = a_{jikl}\ \gamma_{kl}^{(s)} + b_{jikl}\kappa_{kl}^{(s)} - \eta_{ji}\theta^{(s)},$$
$$\mu_{ji}^{(s)} = b_{klji}\gamma_{kl}^{(s)} + c_{jikl}\kappa_{kl}^{(s)} - \zeta_{ji}\theta^{(s)},$$
$$S^{(s)} = \eta_{ji}\gamma_{ji}^{(s)} + \zeta_{ji}\kappa_{ji}^{(s)} + \frac{c_\varepsilon}{T_0}\theta^{(s)}$$

تعريف ١ : نسمي مجموعة التوابع :

$$\{u_i^{(s)}(x,t),\varphi_i^{(s)}(x,t),\gamma_{ji}^{(s)}(x,t),\kappa_{ji}^{(s)}(x,t),\sigma_{ji}^{(s)}(x,t),\mu_{ji}^{(s)}(x,t),\theta^{(s)}(x,t),S^{(s)}(x,t)\}$$

التي تتحقق في $]\bar{\Omega}\times[0,\infty[$ مجموعة العلاقات والمعادلات والشروط السابقة ، ندعوها بسلوك غرين – لامي التقليدي للجسم المذكور بما يتناسب مع القوة الحجمية .

2. حالة العزم الحجمي :

يطلب إيجاد مجموعة الحقول الفيزيائية

$$[u_i^{(s)}(x,t),\varphi_i^{(s)}(x,t),\gamma_{ji}^{(s)}(x,t),\kappa_{ji}^{(s)}(x,t),\sigma_{ji}^{(s)}(x,t),\mu_{ji}^{(s)}(x,t),\theta^{(s)}(x,t),S^{(s)}(x,t)]$$

في $]\bar{\Omega}\times[0,\infty[$ والمحققة للمعادلات والعلاقات والشروط الحدية والابتدائية التالية:

1) معادلات الحركة المحققة في $]\Omega\times]0,\infty[$:

$$[a_{jikl}(u_{l,k}^{(s)}-\in_{mkl}\ \varphi_m^{(s)})+b_{jikl}\varphi_{l,k}^{(s)}-\eta_{ji}\theta^{(s)}],_j=\rho\ddot{u}_i^{(s)},$$

$$[b_{klji}(u_{l,k}^{(s)}-\in_{mkl}\ \varphi_m^{(s)})+c_{jikl}\varphi_{l,k}^{(s)}-\zeta_{ji}\theta^{(s)}],_j+$$

$$+\in_{ijk}\ [a_{jkmp}(u_{p,m}^{(s)}-\in_{tmp}\ \varphi_t^{(s)})+b_{jkmp}\varphi_{p,m}^{(s)}-\eta_{kj}\theta^{(s)}]+\delta(x-\zeta)\delta(t-\tau)\delta_{is}=J\ddot{\varphi}_i^{(s)}$$

2) معادلة التوصيل الحراري المحققة في $]\Omega\times]0,\infty[$:

$$D\theta^{(s)}-\eta_{ij}u_{i,j}^{(s)}-\zeta_{ij}\varphi_{i,j}^{(s)}=0$$

3) الشروط الحدية المحققة على $]\partial\Omega\times[0,\infty[$:

$$[a_{jikl}(u_{l,k}^{(s)}-\in_{mkl}\ \varphi_m^{(s)})+b_{jikl}\varphi_{l,k}^{(s)}-\eta_{ji}\theta^{(s)}]n_j(x)=0,$$

$$[b_{klji}(u_{l,k}^{(s)}-\in_{mkl}\ \varphi_m^{(s)})+c_{jikl}\varphi_{l,k}^{(s)}-\zeta_{ji}\theta^{(s)}]n_j(x)=0,$$

$$\theta^{(s)}(x,t)=0$$

4) الشروط الابتدائية المحققة في $\Omega\times\{0\}$:

$$u_i^{(s)}(x,0)=0,\qquad \dot{u}_i^{(s)}(x,0)=0,$$

$$\varphi_i^{(s)}(x,0)=0,\qquad \dot{\varphi}_i^{(s)}(x,0)=0,$$

$$\theta^{(s)}(x,0)=0$$

5) العلاقات الهندسية المحققة في $]\Omega\times]0,\infty[$:

$$\gamma_{ji}^{(s)}=u_{i,j}^{(s)}-\in_{k,ji}\ \varphi_k^{(s)},\qquad \kappa_{ji}^{(s)}=\varphi_{i,j}^{(s)}$$

6) العلاقات التأسيسية المحققة في $]\Omega\times[0,\infty[$:

$$\sigma_{ji}^{(s)}=a_{jikl}\ \gamma_{kl}^{(s)}+b_{jikl}\kappa_{kl}^{(s)}-\eta_{ji}\theta^{(s)},$$

$$\mu_{ji}^{(s)}=b_{klji}\gamma_{kl}^{(s)}+c_{jikl}\kappa_{kl}^{(s)}-\zeta_{ji}\theta^{(s)},$$

$$S^{(s)}=\eta_{ji}\gamma_{ji}^{(s)}+\zeta_{ji}\kappa_{ji}^{(s)}+\frac{c_\varepsilon}{T_0}\theta^{(s)}$$

تعريف ٢ : نسمي مجموعة التوابع :

$$\{u_i^{(s)}(x,t),\varphi_i^{(s)}(x,t),\gamma_{ji}^{(s)}(x,t),\kappa_{ji}^{(s)}(x,t),\sigma_{ji}^{(s)}(x,t),\mu_{ji}^{(s)}(x,t),\theta^{(s)}(x,t),S^{(s)}(x,t)\}$$

التي تتحقق في $]\bar{\Omega}\times[0,\infty[$ مجموعة العلاقات والمعادلات والشروط السابقة ، ندعوها بسلوك غرين – لامي التقليدي للجسم المذكور بما يتناسب مع العزم الحجمي .

3. حالة المصادر الحرارية :

يطلب إيجاد مجموعة الحقول الفيزيائية

$$\{u_i(x,t),\varphi_i(x,t),\gamma_{ji}(x,t),\kappa_{ji}(x,t),\sigma_{ji}(x,t),\mu_{ji}(x,t),\theta(x,t),S(x,t)\}$$

في $\bar{\Omega}\times[0,\infty[$ والمحققة للمعادلات والعلاقات والشروط الحدية والابتدائية التالية:

1) معادلات الحركة المحققة في $\Omega\times]0,\infty[$:

$$[a_{jikl}(u_{l,k}-\in_{mkl}\varphi_m)+b_{jikl}\varphi_{l,k}-\eta_{ji}\theta]_{,j}=\rho\ddot{u}_i\,,$$

$$[b_{klji}(u_{l,k}-\in_{mkl}\varphi_m)+C_{jikl}\varphi_{l,k}-\zeta_{ji}\theta]_{,j}+$$

$$+\in_{ijk}[a_{jkmp}(u_{p,m}-\in_{tmp}\varphi_t)+b_{jkmp}\varphi_{p,m}-\eta_{kj}\theta]=J\ddot{\varphi}_i$$

2) معادلة التوصيل الحراري المحققة في $\Omega\times]0,\infty[$:

$$D\theta-\eta_{ij}\dot{u}_{i,j}-\zeta_{ij}\varphi_{i,j}=-\delta(x-\zeta)\delta(t-\tau)$$

3) الشروط الحدية المحققة على $\partial\Omega\times[0,\infty[$:

$$[a_{jikl}(u_{l,k}-\in_{mkl}\varphi_m)+b_{jikl}\varphi_{l,k}-\eta_{ji}\theta]n_j(x)=0,$$

$$[b_{klji}(u_{l,k}-\in_{mkl}\varphi_m)+c_{jikl}\varphi_{l,k}-\zeta_{ji}\theta]n_j(x)=0,$$

$$\theta(x,t)=0$$

4) الشروط الابتدائية المحققة في $\Omega\times\{0\}$:

$$u_i(x,0)=0,\qquad \dot{u}_i(x,0)=0,$$

$$\varphi_i(x,0)=0,\qquad \dot{\varphi}_i(x,0)=0,$$

$$\theta(x,0)=0$$

5) العلاقات الهندسية المحققة في $\Omega\times]0,\infty[$:

$$\gamma_{ji}=u_{i,j}-\in_{k,ji}\varphi_k,\qquad \kappa_{ji}=\varphi_{i,j}$$

6) العلاقات التأسيسية المحققة في $\Omega\times[0,\infty[$:

$$\sigma_{ji}=a_{jikl}\gamma_{kl}+b_{jikl}\kappa_{kl}-\eta_{ji}\theta,$$

$$\mu_{ji}=b_{klji}\gamma_{kl}+c_{jikl}\kappa_{kl}-\zeta_{ji}\theta,$$

$$S=\eta_{ji}\gamma_{ji}+\zeta_{ji}\kappa_{ji}+\frac{c_\varepsilon}{T_0}\theta$$

تعريف ٣: نسمي مجموعة التوابع :

$$[u_i(x,t),\varphi_i(x,t),\gamma_{ji}(x,t),\kappa_{ji}(x,t),\sigma_{ji}(x,t),\mu_{ji}(x,t),\theta(x,t),S(x,t)]$$

التي تتحقق في $\bar{\Omega}\times[0,\infty[$ مجموعة العلاقات والمعادلات والشروط السابقة ، ندعوها بسلوك غرين – لامي التقليدي للجسم المذكور بما يتناسب مع المصادر الحرارية .

حالة خاصة من التعاريف السابقة :

لنعتبر الجسم الصلب المرن دقيق الاستقطاب والمتجانس والمتماثل المناحي ومركزي التناظر والمحدد بالثوابت المادية : $\{\mu,\lambda,\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon\}$ والخاضع لحرارة θ ويشغل حيز V في اللحظة t=0 حيث V محاط بالسطح المغلق A ولنأخذ المجموعة الأولى التالية :

$\{X_i,Y_i,Q,P_i,m_i,\theta_{,n}\}$ وهي القوة المعممة الأولى ، $\{u,\varphi,\theta\}$ وهي الازاحات المعممة الأولى .

والمجموعة الثانية هي :

$\{X_i^{(s)}(x,t)=\delta(x-\zeta)\delta(t)\delta_{is},0,0,0,0,0\}$ وهي القوة المعممة الثانية ، $\{u^{(s)},\varphi^{(s)},\theta^{(s)}\}$ وهي الازاحات المعممة الثانية .

بالتعويض في مبرهنة الأعمال المتبادلة نجد :

$$\frac{\eta_0\chi}{\vartheta}\frac{\partial u_s}{\partial t}(\zeta,t)=\frac{\eta_0\chi}{\vartheta}\{\int_v dv(x)[X_i(x,t)*\frac{\partial u_i'^{(s)}}{\partial t}(x,\zeta,t)+0-0]+$$
$$\int_A dA(x)[P_i(x,t)*\frac{\partial u_i'^{(s)}}{\partial t}(x,\zeta,t)-0+0-0]+$$
$$\chi\int_A dA(x)[\theta(x,t)*\theta_{,n}'^{(s)}(x,\zeta,t)-0]+$$
$$\int_v dV(x)[0-0]\}dt$$

حيث الرمز * يعني الضرب بالنسبة للزمن [8,9]:

$$f(t)*g(t):=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

بالمكاملة مرة واحدة بالنسبة للزمن ، ومن ثم بالإصلاح نجد :

$$u_s(\zeta,t)=u_s(\zeta,0)+\int_0^t\chi\{\int_V dV(x)X_i(x,t)*\frac{\partial u_i'^{(s)}}{\partial t}(x,t)+$$
$$+\int_A dA(x)P_i(x,t)*\frac{\partial u_i'^{(s)}}{\partial t}(x,t)+$$
$$+\chi\int_A dA(x)\theta(x,t)*\theta_{,n}'^{(s)}(x,t)\}$$

حيث: $u_s(\zeta,0)$ معطى وتمثل القيمة الابتدائية ل $u_s(x,t)$ عندما t=0

ولنلاحظ أنه بمعرفة توابع غرين يمكن معرفة الازاحات $u_s(x,t)$.

وبطريقة مشابهة و بالأختبار المناسب للمجموعتين السابقتين يمكن إيجاد φ_i بدلالة توابع غرين المختارة بطريقة أخرى .

وبنفس الشكل أيضاً يمكن إيجاد θ النظامية بدلالة توابع غرين مأخوذة بطريقة أخرى .

الاستنتاجات و التوصيات :

الاستنتاجات :

في البحث تم تعميم ما يسمى سلوك غرين التقليدي وسلوك غرين _ لامي إلى الجسم لصلب المرن دقيق الاستقطاب من نوع آيرو _ كوفشنسكي في حالته العامة (الجسم غير متماثل المناحي وغير متجانس) وذلك بما يتوافق مع القوة الحجمية والعزم الحجمي والمصادرالحرارية حيث يملك ذلك أهمية كبيرة تتمثل بإمكانية في إيجاد الحل النظامي التحليلي للجسم المذكور أعلاه عندما يشغل الجسم منطقة بسيطة الترابط أو متعددة الترابط ومحدودة في الفضاء الاقليدي R^3.

ونختتم البحث بالتوصيات التالية :

- تعميم كل ماتقدم ذكره من دراسة إلى الجسم في حال كونه لدنٍ وإلى الجسم ضمن نظرية الكسر.
- إعادة كل ماتقدم ذكره إلى المائع دقيق الاستقطاب .
- إعادة نفس المناقشة لإجل حالة الجسم المائع دقيق الامتطاط .

<u>المراجع</u>

[1] – Kupradse , V. *D , 1963 - Dynamical problems in elasticity, Progress in Solid Mech.,* vol.3, North – Holland Publ. Co., Amsterdam.

[2]- W. Nowocki , *Theory of Elasticity* , PWN Warsaw 1970.

[3] Aero E. L., Kuvshinski E. V., , 1964, *Continuum theory of asymmetric elasticity. Equilibrium of isotropic body (in Russian)*, Phiz. Tverd. Tela, **6** (1964), 2689 - 2699.

[4] – Eringen , A . C , 1966 - *Linear theory of micropolar elasticity,* J.Math. Mech., 15 , 909 – 930 ;

[5] Aero E. L., Kuvshinski E. V., 1969, *Fundamental equations of the theory of elasticity with rotational particle interactions (in Russian)*, Phiz. Tverd. Tela, **2** (1969), 7 - 1399.

[6] –Nowacki, W , 1986 - *Theory of Asymmetric Elasticity* , Warsaw , PWN.

[7]- Dyszlewicz , J, 2004 - *Micropolar Theory of Elasticity* , in : Series Lectures. Notes in Applied and Computational Mechanics, Vol.15, 356 p, Springer.

[8] – Gerrit van Dijk , 2013 - <u>Distribution Theory</u> , De Gtuyter Graduate Lectures, Deutsche Nationalbibliothek , Berlin.

[9] – Debnath , L & Bhatta , D , 2007 – *Integral Transforms and their Applications,* (Second Edition), CRC Press, Boca Raton, Florida.

[10] – Thomas M. Søndergaard ,2019 -*Green's Function Integral Equation Methods in Nano-Optics,* CRC Press , Taylor & Francis Group , 6000 Broken Sound Parkway NW, Suite 300 , Boca Raton, FL 33487-2742.

[11] – Ernian Pan and Weiqiu Chen ,2015 -*Static Green's Functions in Anisotropic Media, Cambridge University Press,* 32 Avenue of the Americas, New York, NY 10013-2473, USA.