مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (6) العدد (3) 2022
Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (6) No. (3) 2022

الجاذب الشامل لمعادلة شرودنجر غير الخطية المتخامدة في $H^1(\mathbb{R})$

منال حسين*
سامي انجرو**
علا باسط***

(تاريخ الإيداع 22/2/ 2022 – تاريخ النشر 21 /6/ 2022)

□ ملخّص □

نقدم في هذا العمل معادلة شرودنجر التكعيبية غير الخطية و المتخامدة بضعف في فضاء أحادي البعد مع وجود تابع كموني محدود وله دعامة متراصة في $]-1,1[$. سنبرهن أن هذه المعادلة تملك نظام ديناميكي غير منتهي، وسندرس أيضاً سلوك النظام الديناميكي، كما سنبرهن وجود جاذب شامل متراص لهذا النظام في $H^1(\mathbb{R})$.

الكلمات المفتاحية: معادلة شرودنجر غير الخطية، النظام الديناميكي، المجموعة الماصة، الجاذب الشامل.

* مدرس– قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة طرطوس.

** أستاذ– قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين.

*** طالبة دراسات عليا(ماجستير)– قسم الرياضيات–كلية العلوم– جامعة طرطوس.

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (6) العدد (3) 2022

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (6) No. (3) 2022

Global attractor for damped nonlinear Schrödinger equation in $H^1(\mathbb{R})$

Dr. Manal Hussein*
Dr. Sami Injrou**
Ola Basset***

(Received 22/2/2022.Accepted 21/6/2022)

□ABSTRACT □

In this work, We consider the weakly damped nonlinear cubic Schrödinger equation in dimension one with a bounded potential function having compact support in $]-1,1[$.. We prove that this equation provides an infinite dimensional dynamical system. We also study the asymptotic behavior of the dynamics. We prove the existence of a compact global attractor for the system in $H^1(\mathbb{R})$.

Keywords: nonlinear Schrödinger equation, dynamical system, absorbing set, global attractor.

* Assistant Professor, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Tartous University.
** Professor, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University.
*** Postgraduate Student, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Tartous University.

مقدّمة:

تعدّ المعادلات التفاضلية الجزئية نماذج رياضية، تفسر الظواهر الفيزيائية المعقدة، التي تأتي من مسائل هندسية، كيمائية، فيزيائية، بيولوجية وميكانيكية ...، وتبرز هنا معادلة شرودنجر غير الخطية التي يرمز لها اختصاراً بـ NLS كأحد أهم هذه المعادلات حيث تحتل هذه المعادلة أهمية خاصة في ميكانيك الكم حيث تُعد بمثابة قانون التحريك الثاني لنيوتن الذي يعتبر أساسياً في الفيزياء الكلاسيكية. وهي نموذج مقارب لانتشار الأمواج المائية [4,6,8] وظهرت في مجالات مختلفة في الفيزياء نذكر منها على سبيل المثال: بلازما[21]، الحقل المغناطيسي [16,17] وتكاثف بوز آنشتاين [3] وغيرها.

ظهرت معادلة شرودنجر على يد العالم إرفين شرودنجر عام 1925 ونشرها عام 1926، وتعطى هذه المعادلة غير الخطية في الحالة المحافظة بالشكل:

$$u_t + iu_{xx} + iV(x)\,u + i|u|^2u = 0 \qquad (1)$$

حيث $u = u(x,t)$ و $V(x)$ تابع كموني من $L^\infty(\mathbb{R})$ وله دعامة متراصة في $]-1,1[$.

أما في حالة التخامد تكون من الشكل:

$$u_t + iu_{xx} + iV(x)\,u + \alpha u + i|u|^2u = f(x) \qquad (2)$$

حيث $f(x)$ قوة خارجية مستقلة عن t وتنتمي إلى $L^2(\mathbb{R})$ و $\alpha > 0$ معامل التخامد.

حازت هذه المعادلة على اهتمام العديد من الباحثين، إذ أثبت Ghidaglia في العام 1988 وجود جاذب شامل لمعادلة شرودنجر بالنسبة للتبولوجيا الضعيفة في $H^1(\mathbb{R})$في [9]. ثم في العام ١٩٩٥ أثبت Wang أن هذا الجاذب الضعيف هو جاذب قوي في البحث [20]، وفي [1] أثبتت Akroun عام 1999 وجود جاذب شامل في $H^1(\mathbb{R})$ وفي العام 2009 أثبت Hussein وGoubet أن النظام Davey–Stewartson الذي هو تعميم لمعادلة شرودنجر يملك جاذب شامل في $H^1(\mathbb{R}^2)$ في [11] وأيضاً في عام 2009 درسوا معادلة شرودنجر المقطعة بالنسبة للزمن باستخدام صيغة الاسترخاء (relaxation scheme) وبرهنوا وجود جاذب شامل للنظام الديناميكي الناتج في [10] ، وأيضاً في العام نفسه أثبت Molinet و Goubet في [12] أن تدفق معادلة شرودنجر غير الخطية المتخامدة بضعف يوفر نظام ديناميكي يملك جاذب شامل في $L^2(\mathbb{R})$، وفي عام 2014 درس Alounini وGoubet سلوك حلول معادلة شرودنجر غير المتخامدة مع حد كموني تربيعي في [2]، وفي عام 2016 أثبت Zhu في [22] وجود جاذب شامل لمعادلة شرودنجر مع وجود حد تكاملي غير محلي في$H^1(\mathbb{R})$ وفي العام نفسه درس Dabaa وGoubet في [5] سلوك حلول معادلة شرودنجر– بواسون في $\mathbb{R}^3$ وبرهن kechiche في عام 2017 أن الجاذب الشامل هو مجموعة جزئية متراصة من $H^{\frac{3}{2}-\varepsilon}(-1,1)$ في [15]، وبرهن أيضاً في عام 2021 وجود جاذب شامل لمعادلة شرودنجر مع قياس ديراك في [14]، وفي العام نفسه Zahrouni وGoubet برهنوا في [13] وجود الجاذب الشامل في $H^1(\mathbb{R}^N)$.

أهمّية البحث وأهدافه:

تأتي أهمية هذا البحث كوننا نتناول معادلة مهمة لها تطبيقات واسعة في مجالات مختلفة في الفيزياء بالإضافة لكونها غير خطية ومتخامدة. ويهدف هذا البحث إلى دراسة مسألة وجود الجاذب الشامل والذي يعطي تنبؤ بسلوك النظام الديناميكي الذي تزوده معادلة شرودنجر غير الخطية.

طرائق البحث وموادّه:

يندرج هذا البحث تحت اختصاص الرياضيات التطبيقية وبشكل خاص في مجال المعادلات التفاضلية لذلك فإن التقنيات الرياضية المستخدمة هنا تعتمد بشكل أساسي على دراسة سلوك حلول المعادلة التفاضلية الجزئية من خلال مفاهيم التحليل الدالي.

النتائج والمناقشة:

مسألة كوشي المعرفة جيداً:

مبرهنة مساعدة 1: ليكن $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$، عندئذٍ فإن للمعادلة (2) حل وحيد $u \in C_b([0,\infty[;H^1(\mathbb{R}))$ ومتعلق بشكل مستمر بالشرط الابتدائي u_0 في $H^1(\mathbb{R})$.

الإثبات: سنبرهن أولاً أن مسألة كوشي معرفة جيداً محلياً وذلك باستخدام مبرهنة النقطة الثابتة لذلك من أجل عدد حقيقي موجب $T > 0$ نعرف $X = C_b([0,T];H^1(\mathbb{R}))$ فضاء باناخ مع النظيم

$$|u|_X = \sup_{t\in[0,T]} |u(t)|_{H^1}$$

وليكن $A = \Delta - i\alpha$ مؤثر تفاضلي ولنعرف $T(t)$ بالشكل $T(t) = e^{-itA}$ وهو مؤثر ضاغط على $H^1(\mathbb{R})$.

من أجل $f \in L^2(\mathbb{R})$ نكتب (2) بالشكل التكاملي

$$G\big(u(t)\big) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)F\big(u(s)\big)ds$$

حيث $F(u) = f(x) - i\big(|u|^2 + V(x)\big)u$.

مبرهنة مساعدة 2: من أجل $T > 0$ صغيرة بما يكفي ومتعلقة بـ $|f|_{L^2}$ و $|u_0|_{H^1}$، التطبيق G معرف جيداً من X إلى X.

الإثبات: ليكن $C_0 > 0$ بحيث إن $C_0 \geq 2(|u_0|_{H^1} + c_\alpha |f|_{L^2})$ حيث c_α ثابت متعلق بـ α وليكن $X \supset B(0,C_0) \ni u$ حيث $B(0,C_0)$ كرة مغلقة نصف قطرها C_0 في X. لدينا

$$|G\big(u(t)\big)|_{H^1} \leq |T(t)u_0|_{H^1} + |\int_0^t T(t-s)f(x)ds|_{H^1} + |\int_0^t T(t-s)\,V(x)\,u\,ds|_{H^1} + |\int_0^t T(t-s)\,|u|^2 u\,ds|_{H^1}$$

بما أن $T(t)$ مؤثر ضاغط على $H^1(\mathbb{R})$ و$V(x)$ تابع من $L^\infty(\mathbb{R})$ أي $|V(x)|_{L^\infty} \leq C_1$ فيكون لدينا

$$\begin{aligned}|G\big(u(t)\big)|_{H^1} &\leq |u_0|_{H^1} + |A^{-1}f|_{H^1} + \left|e^{-itA}A^{-1}f\right|_{H^1} + |V(x)|_{L^\infty}|u|_{H^1}\int_0^t ds + c\,|u|_{H^1}^2\,|u|_{H^1}\int_0^t ds \\ &\leq |u_0|_{H^1} + c_\alpha\,|f|_{L^2} + C_1\,C_0\,T + c\,C_0^3\,T \\ &\leq \frac{C_0}{2} + (c\,C_0^2 + C_1)C_0 T\end{aligned}$$

نختار T بحيث يكون $(c\,C_0^2 + C_1)T < \dfrac{1}{2}$

بالتالي يصبح لدينا $|G\big(u(t)\big)|_X = \sup_{t\in[0,T]} |G\big(u(t)\big)|_{H^1} \leq C_0$

فإن التطبيق G معرف جيداً من X إلى X.

تمهيدية 1: من أجل $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ يوجد $T > 0$ صغيرة بما يكفي ومتعلقة بـ $|f|_{L^2}$ و $|u_0|_{H^1}$ بحيث أن المعادلة (2) تملك حل وحيد محلي في $C_b([0,T]; H^1(\mathbb{R}))$.

الإثبات: ليكن $u, v \in B(0, C_0) \subset X$ بحيث أن $|u|_X \le C_0\ ,\ |v|_X \le C_0$ ولدينا $V(x)$ تابع من $L^\infty(\mathbb{R})$ أي أن $|V(x)|_{L^\infty} \le C_1$ بالتالي يكون لدينا

$$|G(u) - G(v)|_{H^1} \le \int_0^t ||u|^2 u - |v|^2 v|_{H^1} ds + |V(x)|_{L^\infty} \int_0^t |u - v|_{H^1} ds\,,$$

$$|G(u) - G(v)|_{H^1} \le \left(2c\, C_0^2 + C_1\right) \int_0^t |u - v|_{H^1} ds,$$

بالتالي يكون لدينا
$$|G(u) - G(v)|_X \le (\,2c\, C_0^2 + C_1)\, T\, |u - v|_X$$

حيث $t < T$ صغيرة بما يكفي، فأن G مقلص على المجموعات المحدودة في X، وبحسب مبرهنة النقطة الثابتة يوجد حل وحيد u للمعادلة (2) بحيث $G(u) = u$، وبالتالي يوجد للمعادلة حل وحيد u على $[0,T]$ وفي $B(0, C_0)$.

لنبرهن الآن أن هذا الحل المحلي متعلق بشكل مستمر بالشرط الابتدائي.

تمهيدية ٢: من أجل t من المجال $[0,T]$ حيث T كما عرفت سابقاً، فإن $u(t)$ متعلق بشكل مستمر بالشرط الابتدائي.

الإثبات: ليكن u, v حلين للمعادلة (2) حيث أن u_0, v_0 في $H^1(\mathbb{R})$ ، عندئذٍ:

$$|u(t) - v(t)|_{H^1} \le |u_0 - v_0|_{H^1} + \int_0^t \left(2cC_0^2 + C_1\right) |(u - v)(s)|_{H^1} ds$$

بتطبيق مبرهنة غرونوال [18] للتابع $\varphi(t) = \int_0^t |(u - v)(s)|_{H^1} ds$ فنجد أن :

$$|u - v|_{H^1} \le |u_0 - v_0|_{H^1} \frac{e^{\left(2cC_0^2 + C_1\right)t}}{(2cC_0^2 + C_1)}$$

لنبرهن الآن أن هذا الحل المحلي هو في الحقيقة شامل، عندما $T_{max} = T$ وبالاعتماد على متناوبة الانفجار التالية يجب تحقق إحدى الحالتين

إما $T_{max} = +\infty$ أو $|u(t)|_{H^1} \to +\infty$ عندما $t \to T_{max}$ و $T_{max} < +\infty$

ولدينا من أجل $T_{max} > t$ يكون

$$|u - v|_{H^1} \le |u_0 - v_0|_{H^1} \frac{e^{\left(2cC_0^2 + C_1\right)T_{max}}}{\left(2cC_0^2 + C_1\right)}$$

نأخذ $v(t) = v_0$ نجد أن $u(t)$ محدود في H^1 وبالتالي $|u(t)|_{H^1} \nrightarrow \infty$ عندما $t \to T_{max}$، ومنه لدينا أن $T_{max} = +\infty$ وبالتالي فإن الحل الأعظمي هو حل شامل. أي يمكننا الآن تعريف نصف الزمرة $S(t)$ بالشكل

$$S(t) : H^1(\mathbb{R}) \to H^1(\mathbb{R}),$$
$$u(t) = S(t) u_0.$$

ونجد إذا كان $u_0 \to v_0$ يكون $u(t) = S(t)u_0 \to v(t) = S(t)v_0$ في $H^1(\mathbb{R})$ أي أن $S(t)$ نصف زمرة مستمرة بقوة على $H^1(\mathbb{R})$ [19].

وجود المجموعة الماصة:

مبرهنة مساعدة 3: يوجد مجموعة جزئية محدودة β من $H^1(\mathbb{R})$ تحقق

$$S(t)\beta \subset \beta\,, \qquad \forall\, t \geq 0$$

ومن أجل كل مجموعة محدودة B من $H^1(\mathbb{R})$ يوجد $t_0(B) > 0$ بحيث

$$S(t)B \subset \beta\,, \quad \forall\, t \geq t_0(B)$$

الإثبات: ليكن $u(t)$ حل للمعادلة (2) فإنه بضرب طرفي المعادلة (2) بمرافق u أي $\bar{u}$ في $L^2(\mathbb{R})$ وبالمكاملة وأخذ الجزء الحقيقي، ومع ملاحظة أن $V(x)$ تابع من $L^\infty(\mathbb{R})$ أي أنه تابع محدود بثابت نرمز له بـ C_1 عندئذٍ نجد أن:

$$-2Im\int V(x)|u|^2 ds \leq 2|V(x)|_{L^\infty}\int |u|^2 ds \leq 2C_1\,|u|_{L^2}^2$$

وباستخدام متراجحة هولدر ومتراجحة يونغ نحصل على:

$$\frac{d}{dt}|u(t)|_{L^2}^2 + (\alpha - 2C_1)|u|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{\alpha}|f|_{L^2}^2$$

بتطبيق مبرهنة غرونوال نحصل على

$$|u(t)|_{L^2}^2 \leq e^{-(\alpha-2C_1)t}|u_0|_{L^2}^2 + \left(1 - e^{-(\alpha-2C_1)t}\right)\frac{|f|_{L^2}^2}{\alpha(\alpha-2C_1)} \leq \frac{2|f|_{L^2}^2}{\alpha(\alpha-2C_1)}\,, \qquad (3)$$

$$\forall t \geq t_1 = \frac{1}{\alpha - 2C_1}\,ln\frac{|u_0|_{L^2}\alpha(\alpha-2C_1)}{|f|_{L^2}^2}$$

نضرب طرفي المعادلة (2) بـ $\bar{u}_t - \alpha\bar{u}$ في $L^2(\mathbb{R})$ ونكامل ونأخذ الجزء التخيلي وبما أن $V(x)$ تابع من $L^\infty(\mathbb{R})$ يكون لدينا

$$Re\int V(x)|u|_t^2\, ds \leq |V(x)|_{L^\infty}\int u\bar{u}_t ds \leq \frac{1}{2}C_1\frac{d}{dt}|u|_{L^2}^2$$

$$\alpha Re\int V(x)|u|^2 ds \leq \alpha|V(x)|_{L^\infty}\int |u|^2\, ds \leq \alpha C_1|u|_{L^2}^2$$

بالتالي نحصل على:

$$\frac{d}{dt}q(u) + 2\alpha q(u) \leq H(u) \qquad (4)$$

حيث

$$q(u) = |u_x|_{L^2}^2 - C_1|u|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}\int |u|^4\, ds + 2Im\int f\,\bar{u}\;ds \qquad (5)$$

$$H(u) = 2\alpha\; Im\int f\overline{u}\, ds + \alpha\int |u|^4\, ds \qquad (6)$$

وبتطبيق متراجحة Gaglirado–Nirenberg نحصل على

$$\begin{aligned} q(u) &\geq |u_x|_{L^2}^2 - C_1|u|_{L^2}^2 - |f|_{L^2}|u|_{L^2} - \frac{1}{2}|u|_{L^4}^4 \qquad (7)\\ &\geq |u_x|_{L^2}^2 - C_1|u|_{L^2}^2 - |f|_{L^2}^2 - c|u|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}|u_x|_{L^2}^2 - c|u|_{L^2}^6\\ &\geq \frac{1}{2}|u_x|_{L^2}^2 - c(|u|_{L^2}^6 + |u|_{L^2}^2) - |f|_{L^2}^2\\ &\geq \frac{1}{2}|u_x|_{L^2}^2 - K(\alpha, f) \end{aligned}$$

ومن جهة أخرى بتطبيق متراجحة Gaglirado–Nirenberg ومن العلاقة (7) نجد

$$H(u) \leq c\alpha|u_x|_{L^2}|u|_{L^2}^3 + 2\alpha|f|_{L^2}|u|_{L^2}$$

$$\le \frac{\alpha}{2}|u_x|_{L^2}^2 + c\alpha|u|_{L^2}^6 + \alpha|f|_{L^2}^2 + c\alpha|u|_{L^2}^2$$
$$\le \alpha\, q(u) + K(\alpha, f)$$

بالتالي يكون لدينا
$$\frac{d}{dt}q(u) + \alpha q(u) \le K(\alpha, f)$$

بتطبيق مبرهنة غرونوال نجد
$$q(u) \le q(u_0)e^{-\alpha t} + K(\alpha, f) \qquad (8)$$

وبما أن $q(u_0) \le K_1(u_0, f)$ وبالاستفادة من (7) و(8) يكون لدينا:
$$|u_x|_{L^2}^2 \le K_1(u_0, f)e^{-\alpha t} + K(\alpha, f) \le c_2^2\,,\quad \forall t > t_2 = \frac{1}{\alpha}ln\frac{K_1(u_0, f)}{c_2^2 - K(\alpha, f)}$$

فإنه يوجد مجموعة ماصة محدودة لِـ$S(t)$ في $H^1(\mathbb{R})$ أياً كانت $t_0 < t$ بحيث $t_0 = max\{t_1, t_2\}$

ويمكننا أيضاً استخدام الإثبات السابق لبناء مجموعة ماصة لا متغيرة إيجاباً بالنسبة لـ $S(t)$

فإنه من المعادلة (3) نستنتج إذا كان $|u_0|_{L^2} \le M_0 = \frac{\sqrt{2}\,|f|_{L^2}}{\sqrt{\alpha(\alpha - 2C_1)}}$ فإن $|u(t)|_{L^2} \le M_0$ من أجل t موجب

وبنفس الطريقة نستنتج إذا كان $|u_0|_{L^2} \le M_0$ فإن
$$q\big(u(t)\big) \le q(M_0)e^{-\alpha t} + cK(M_0, f) \qquad (9)$$

لذلك فإننا نستنتج من أجل $K^2 = q(M_0)e^{-\alpha t} + cK(M_0, f))$ تكون المجموعة
$$\beta = \left\{u \,\epsilon\, H^1; |u|_{L^2} \le M_0 \text{ و } q(u) \le K^2\right\}$$

لا متغيرة إيجاباً بالنسبة لتدفق الحلول وتمتص كل المسارات بعد زمن منتهي.

وجود الجاذب الشامل:

تعريف: لتكن $A \subset H^1(\mathbb{R})$ مجموعة تحقق الخصائص التالية:

- A متراصة وغير خالية في $H^1(\mathbb{R})$.
- $S(t)A = A \ , \forall t \ge 0$.
- A تجذب كل المجموعات المحدودة في$H^1(\mathbb{R})$.

عندئذٍ تسمى A **الجاذب الشامل (Global Attractor)** بالنسبة للنظام الديناميكي$S(t)$ [19].

مبرهنة ١: $S(t)$ يملك جاذب شامل ومتراص في $H^1(\mathbb{R})$.

الإثبات: سيكون البرهان بثلاث خطوات. سنبين في الخطوة الأولى أن المسارات سابقة التراص في $L^2(\mathbb{R})$. وفي الخطوة الثانية أن المسارات سابقة التراص في $H^1(\mathbb{R})$. وأخيراً سنبين وجود الجاذب كمجموعة $\omega - limite$ للمجموعة المحدودة الماصة.

الخطوة الأولى: المسارات سابقة التراص في $L^2(\mathbb{R})$

من أجل $\alpha > 0$ نعرف χ_α تابع منقطع
$$\chi_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & ; |x| \le \alpha \\ 0 & ; |x| > 2\alpha \end{cases}$$

ليكن $f \in L^2(\mathbb{R})$ و$f\chi_\alpha$ تتقارب نحو f عندما $\alpha \to +\infty$ فإنه أياً كانت $\eta \in [0,1]$ يوجد $0 < \alpha(\eta)$ وبوضع $f_\eta = f_{\chi_{\alpha(\eta)}}$ بحيث يكون
$$\left|f - f_\eta\right| \le \eta \qquad \forall \eta \in [0,1]$$

لنأخذ الآن مسار من المجموعة الماصة β كوننا نريد برهان أن المسارات في المجموعة الماصة المحدودة سابقة التراص بالتالي نأخذ $u(t) \ni \beta$.

نكتب التابع u كمجموع تابعين v و w حيث v حل للمسألة

$$v_t + \alpha v + i v_{xx}(1 + i\eta) + i(V(x) + |u|^2)v = f - f_\eta - \eta u_{xx}\,, \qquad (10)$$
$$v(0) = u_0\,.$$

و w حل للمسألة

$$w_t + \alpha w + i w_{xx}(1 + i\eta) + i(V(x) + |u|^2)w = f_\eta\,, \qquad (11)$$
$$w(0) = 0\,.$$

تمهيدية ٣: من أجل $u_0 \ni \beta$ و $\eta \ni [0,1]$ يوجد $0 < t(\eta)$ و $0 < K$ متعلق بـ $\alpha\,, f, M_1$ بحيث أن

$$|v|_{L^2}^2 \le |u_0|_{L^2}^2 e^{-\alpha t} + \eta K$$
$$|v|_{L^2} \le \eta^{\frac{1}{2}} K \qquad \forall t \ge t(\eta)$$

الإثبات: نضرب طرفي المعادلة (10) بـ $\bar{v}$ ونكامل ومن ثم نأخذ الجزء الحقيقي للمعادلة الناتجة وبالاستفادة من كون $V(x)$ تابع من $L^\infty(\mathbb{R})$ فيكون لدينا

$$-Im\int V(x)|v|^2\,ds \le |V(x)|_{L^\infty}\int |v|^2\,ds \le C_1|v|_{L^2}^2$$

وباستخدام كل من المتراجحات هولدر ويونغ نحصل على

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v|_{L^2}^2 + \alpha|v|_{L^2}^2 + \eta|v_x|_{L^2}^2 \le \frac{1}{2(\alpha - C_1)}\left|f - f_\eta\right|_{L^2}^2 + \frac{\alpha - C_1}{2}|v|_{L^2}^2 + \eta|v_x|_{L^2}^2 + \frac{\eta}{4}|u_x|_{L^2}^2$$

يصبح لدينا

$$\frac{d}{dt}|v|_{L^2}^2 + (\alpha - C_1)|v|_{L^2}^2 \le \eta K$$

وبتطبيق مبرهنة غرونوال يتم المطلوب.

تمهيدية 4: من أجل $\eta \ni [0,1]$ يوجد ثابت $0 < K'$ متعلق بـ $\alpha, |f|_{L^2}, \eta$ بحيث أنه من أجل $u_0 \ni \beta$ يكون

$$|xw|_{L^2}^2 \le K'$$

الإثبات: نضرب طرفي المعادلة (2) بـ $x^2\bar{w}$ ومن ثم نكامل ونأخذ الجزء الحقيقي

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|xw|_{L^2}^2 + \alpha|xw|_{L^2}^2 + Im\int x^2\bar{w}w_{xx}ds - \eta Re\int x^2\bar{w}w_{xx}\,ds =$$
$$= -Im\int V(x)|xw|^2\,ds + Re\int x^2\bar{w}f_\eta\,ds$$

حيث

$$Im\int x^2\bar{w}w_{xx}\,ds = -2Im\int x\bar{w}w_x\,ds$$
$$-\eta Re\int x^2\bar{w}w_{xx}\,\mathrm{ds} = 2\eta Re\int xw\overline{w_x}ds + \eta\int x^2|w_x|^2\,ds$$

وبما أن $V(x)$ تابع من $L^\infty(\mathbb{R})$ فيكون لدينا

$$-Im\int V(x)|xw|^2\,ds \le |V(x)|_{L^\infty}\int |xw|^2\,ds \le C_1|xw|_{L^2}^2$$

نحصل على

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|xw|_{L^2}^2 + \alpha|xw|_{L^2}^2 + \eta\int x^2|w_x|^2ds \le C_1|xw|_{L^2}^2 + 2(1+\eta)|w|_{L^2}|xw_x|_{L^2} + \int x^2|f_\eta\bar{w}|\,ds$$

$$\le C_1|xw|_{L^2}^2 + \left(\frac{1}{\eta}+1\right)|w|_{L^2}^2 + \eta|xw_x|_{L^2}^2 + \frac{\alpha - C_1}{2}|xw|_{L^2}^2 + \frac{1}{2(\alpha - C_1)}|xf_\eta|_{L^2}^2$$

كما أن $w = u - v$ و $|u|_{L^2}^2 \le M_1^2$ و $|v|_{L^2}^2 \le M_2^2$ حيث M_1 متعلق بـ α , f و M_2 متعلق بـ K, η فإن

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|xw|_{L^2}^2 + \frac{\alpha - C_1}{2}|xw|_{L^2}^2 \le K'$$

بتطبيق مبرهنة غرونوال نجد

$$|xw|_{L^2}^2 \le K'$$

تمهيدية ٥: من أجل $u_0 \ni \beta$، يكون التابع w محدود في $H^1(\mathbb{R})$.

الإثبات: بما أن $w = u - v$ و $|w|_{L^2} \le |u|_{L^2} + |v|_{L^2} \le M_1 + M_2$ بقي أن نتحقق من نظيم w_x في $L^2(\mathbb{R})$

نضرب طرفي المعادلة (11) بـ $-\bar{w}_{xx}$ في $L^2(\mathbb{R})$ ومن ثم نكامل ونأخذ الجزء الحقيقي وبما أن $V(x)$ تابع من $L^\infty(\mathbb{R})$ فيكون لدينا

$$|\int V(x) w \bar{w}_{xx}\, ds| \le |V(x)|_{L^\infty} \int w_x \bar{w}_x\, ds \le C_1 |w_x|_{L^2}^2$$

بالتالي نجد

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}&|w_x|_{L^2}^2 + \alpha|w_x|_{L^2}^2 + \eta|w_{xx}|_{L^2}^2 \\ &\le C_1|w_x|_{L^2}^2 + |u|_{L^\infty}^2|w|_{L^2}|w_{xx}|_{L^2} + |V(x)|_{L^\infty}|w|_{L^2}|w_{xx}|_{L^2} + |f_\eta|_{L^2}|w_{xx}|_{L^2} \\ &\le C_1|w_x|_{L^2}^2 + \frac{\eta}{2}|w_{xx}|_{L^2}^2 + \frac{c(M_1+M_2)^2}{2\eta}M_1^4 + \frac{\eta}{2}|w_{xx}|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\eta}|f_\eta|_{L^2}^2 \\ &\le C_1|w_x|_{L^2}^2 + \frac{\eta}{2}|w_{xx}|_{L^2} + K' + \frac{\eta}{2}|w_{xx}|_{L^2} + \frac{1}{2\eta}|f_\eta|_{L^2}^2 \qquad (12)\end{aligned}$$

حيث K'متعلق بـ α , f , η

$$\frac{d}{dt}|w_x|_{L^2}^2 + 2(\alpha - C_1)|w_x|_{L^2}^2 \le K' + \frac{1}{\eta}|f_\eta|_{L^2}^2$$

وبتطبيق مبرهنة غرونوال نحصل على

$$|w_x|_{L^2}^2 \le |w_x(0)|_{L^2}^2 e^{-2(\alpha - C_1)t} + \frac{1}{2(\alpha - C_1)}(K' + \frac{1}{\eta}|f_\eta|_{L^2}^2)(1 - e^{-2(\alpha - C_1)t})$$

بما أن $w(0) = 0$ فإن $w_x(0) = 0$ بالتالي نجد

$$|w_x|_{L^2}^2 \le K' + \frac{1}{\eta}|f_\eta|_{L^2}^2$$

نستنتج من التمهيديتين السابقتين أن $w(t)$ محدود في $H^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}, (1 + x^2)dx)$

تمهيدية ٦: $H^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}, (1 + x^2)dx) \subseteq L^2(\mathbb{R})$ تطبيق متراص.

الإثبات: في المرجع [7]

وبذلك انتهت الخطوة الأولى إذاً من أجل $t(\eta) \le t$ فإنه

$$S(t)\beta \subset \mathrm{B}_{L^2}(0, \sqrt{\eta K}) + K_n \subset L^2(\mathbb{R})$$

حيث K_n مجموعة متراصة في $L^2(\mathbb{R})$، ويكون من أجل كل متتالية $t_n \to \infty$ و $u_n \ni \beta$ يوجد متتالية جزئية من $S(t_n)u_n$ تتقارب بقوة في $L^2(\mathbb{R})$.

تمهيدية ٧: من أجل t موجب تكون $S(t)$ مستمرة على المجموعات المحدودة في $H^1(\mathbb{R})$ من أجل تبولوجيا القوية من $L^2(\mathbb{R})$.

الإثبات: ليكن $u(t)=S(t)u_0$ و $v(t)=S(t)v_0$ حلين للمعادلة (٢) بحيث يكون $u_0,v_0 \in \beta$ و $u_0 \to v_0$ في $L^2(\mathbb{R})$ وليكن $w=u-v$ يحقق المعادلة التالية:

$$\begin{cases} w_t+\alpha w+\mathrm{i}w_{xx}+iV(x)w+i(|u|^2u-|v|^2v)=0 \\ w(0)=u_0-v_0=w_0 \end{cases}$$

نضرب هذه المعادلة بـ $\overline{w}$ من ثم نكامل ونأخذ الجزء الحقيقي، نحصل على

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w|_{L^2}^2+\alpha|w|_{L^2}^2 \le -Im\int V(x)w\,\overline{w}\,ds-\int(|u|^2+|v|^2)w\,\overline{w}ds$$

وبما أن $V(x)$ تابع من $L^\infty(\mathbb{R})$ فيكون لدينا

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w|_{L^2}^2+\alpha|w|_{L^2}^2 \le |V(x)|_{L^\infty}|w|_{L^2}^2+\left(|u|_{L^\infty}^2+|u|_{L^\infty}^2\right)|w|_{L^2}^2$$
$$\le (C_1+2M_1^2)|w|_{L^2}^2$$

بالتالي يكون لدينا

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w|_{L^2}^2+K''|w|_{L^2}^2 \le 0$$

حيث K'' يعتمد بـ $\alpha\,,f,\eta$ وبتطبيق مبرهنة غرونوال نجد $|w|_{L^2}^2 \le e^{-2K''t}|w_0|_{L^2}^2$

عندما $w_0 \to 0$ فإن $S(t)u_0 \to S(t)v_0$ في $L^2(\mathbb{R})$.

الخطوة الثانية: المسارات سابقة التراص في $H^1(\mathbb{R})$

مبرهنة مساعدة ٤: من أجل كل متتالية $u_j \in \beta$ و $t_j \to \infty$ يوجد $z \in H^1(\mathbb{R})$ بحيث تكون أي متتالية جزئية من $S(t_j)u_j$ تتقارب بقوة من z في $H^1(\mathbb{R})$.

الإثبات: من الخطوة الأولى نجد أنه يوجد متتالية جزئية من $S(t_j)u_j$ تتقارب من z بضعف في $H^1(\mathbb{R})$ وبقوة في $L^2(\mathbb{R})$ وإنه من أجل $0<T$ و $T<t_j$ بحيث $S(t_j-T)u_j \in \beta$ متتالية محدودة في $H^1(\mathbb{R})$ يوجد متتالية جزئية $S(t_j-T)u_j$ تتقارب من z بضعف في $H^1(\mathbb{R})$ وبقوة في $L^2(\mathbb{R})$ من $S(-T)z$ وبما أن $S(t)$ مستمرة بقوة على $H^1(\mathbb{R})$ من أجل تبولوجيا قوية من $L^2(\mathbb{R})$ فإنه

$$S(t_j+t-T)u_j=S(t)S(t_j-T)u_j \to S(t-T)z\ in\ \ L^2(\mathbb{R})$$

نضرب طرفي المعادلة (2) بـ $(-\bar{u}_t-\alpha\bar{u})$ ثم نكامل ونأخذ الجزء التخيلي وبما أن $V(x)$ تابع من $L^\infty(\mathbb{R})$ فيكون لدينا

$$Re\int V(x)|u|_t^2\,ds \le |V(x)|_{L^\infty}\int u\bar{u}_t\,ds \le \frac{1}{2}C_1\frac{d}{dt}|u|_{L^2}^2$$
$$\alpha Re\int V(x)|u|^2\,ds \le \alpha|V(x)|_{L^\infty}\int|u|^2ds \le \alpha C_1|u|_{L^2}^2$$

بالتالي نحصل على

$$\frac{d}{dt}(|u|_{H^1}^2+G(u(t))+2\alpha(|u|_{H^1}^2+G(u(t)) \le H(u(t)) \qquad (13)$$

بحيث يكون

$$G(u)=-|u|_{L^2}^2-C_1|u|_{L^2}^2-\frac{1}{2}\int|u|^4ds+2Im\int f\bar{u}\,ds$$
$$H(u)=2\alpha Im\int f\bar{u}ds+\alpha\int|u|^4\,ds$$

بمكاملة (14) من 0 إلى t نحصل على

$$|S(t)u_0|_{H^1}^2+G(S(t)u_0)=e^{-2\alpha t}\left(|u_0|_{H^1}^2+G(u_0)\right)+\int_0^t e^{2\alpha(s-t)}H(S(s)u_0ds) \qquad (14)$$

فإنه من أجل $u_0=S(t_j-T)u_j$, $t=T$ و $j\to\infty$ نحصل على

$$\limsup_{j\to+\infty}(|S(t_j)u_j|_{H^1}^2+G(S(t_j)u_j)) \le e^{-2\alpha T}\limsup_{j\to+\infty}(|S(t_j-T)u_j|_{H^1}^2+G(S(t_j-T)u_j))$$

$$+\limsup_{j\to+\infty}\int_0^T e^{-2\alpha(s-T)}\,H\big(S\big(s+t_j-T\big)u_j ds\big) \qquad (15)$$

وإنه من أجل $u\,,v \ni \beta \subset H^1(\mathbb{R})$ بحيث $u \longrightarrow v$ في $L^2(\mathbb{R})$ فإن $\int f\bar{u} \to$ وأيضا $\int |u|^4 \to \int |v|^4$ $\int f\bar{v}$

فإنه عندما $j \to +\infty$ يكون لدينا

$$G\big(S\big(t_j-T\big)u_j\big) \to G(S(-T)z)$$
$$H\big(S\big(s+t_j-T\big)u_j\big) \to \ H(S(s-T)z)$$

باستخدام مبرهنة التقارب

$$\lim_{j\to+\infty}\int e^{-2\alpha(s-T)}\,H\big(S\big(s+t_j-T\big)u_j\big)ds = \int e^{-2\alpha(s-T)}\,H(S(s-T)z)ds$$
$$= |z|_{H^1}^2 + G(z) - \Big(|S(-T)z|_{H^1}^2 + G(S(-T)z)\Big)\ e^{-2\alpha T} \qquad (16)$$

بالإضافة من أجل t_j كبيرة يكون $S(t_j-T)u_j \in \beta$

$$e^{-2\alpha T}\limsup_{j\to+\infty}(|S\big(t_j-T\big)u_j|_{H^1}^2 + G\big(S\big(t_j-T\big)u_j\big)) \le M_1 e^{-2\alpha T} + G(S(-T)z)e^{-2\alpha T}$$

بالاعتماد على (15) نحصل على

$$\limsup_{j\to+\infty}\Big(|S\big(t_j\big)u_j|_{H^1}^2 + G\big(S\big(t_j\big)u_j\big)\Big) \le$$
$$M_1 e^{-2\alpha T} + G(S(-T)z)e^{-2\alpha T} + |z|_{H^1}^2 + G(z) - \Big(|S(-T)z|_{H^1}^2 + G(S(-T)z)\Big)e^{-2\alpha T} \quad (17)$$

بما أن G مستمر على التبولوجيا القوية في $L^4(\mathbb{R})$ فإن $\lim_{j\to+\infty} G\big(S\big(t_j\big)u_j\big) = G(z)$ بالإضافة إلى

$$|S(-T)z|_{H^1}^2 \le \liminf |S\big(t_j-T\big)u_j|_{H^1}$$

وعندما $T \to +\infty$ نحصل على

$$\limsup_{j\to+\infty}|S\big(t_j\big)u_j|_{H^1}^2 \le |z|_{H^1}^2 \qquad (18)$$

فنجد $S\big(t_j\big)u_j \to z$ في $H^1(\mathbb{R})$.

الخطوة الثالثة: الاستنتاج

مبرهنة ٢: لتكن $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} = \{a \in \beta, \exists\varphi_n \in \beta\ , t_n \to +\infty\ ; S(t_n)\varphi_n \to a\ in\ \ H^1(\mathbb{R})\}$$

فإن $\mathcal{A}$ جاذب شامل ومتراص في $H^1(\mathbb{R})$ للمعادلة (٢).

الإثبات: $\mathcal{A}$ مجموعة غير خالية تحوي على الأقل حل مستقل عن الزمن للمعادلة (2) ولنبرهن أن

$$S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}\ \ ,\forall t \ge 0;$$

إذا كان $b \in S(t)\mathcal{A}$ فإنه يوجد $a \in \mathcal{A}$ بحيث يكون $b = S(t)a$

فيكون لدينا من تعريف $\mathcal{A}$ $\qquad \exists\varphi_n \in \beta; \exists t_n \to +\infty \qquad S(t_n)\varphi_n \to a$

وبما أن $S(t)$ مستمرة نجد

$$S(t)S(t_n)\varphi_n \to S(t)a = b$$

ولدينا

$$S(t)S(t_n)\varphi_n = S(t+t_n)\varphi_n$$

فيصبح

$$S(t+t_n)\varphi_n \to b = S(t)a$$

ولكن $t+t_n \to +\infty$ و $\varphi_n \in \beta$ فإن $b \in \mathcal{A}$

فيكون

$$S(t)\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$$

وإذا كانت $a \in \mathcal{A}$ فإنه

$$\exists\varphi_n \in \beta; \exists t_n \to +\infty \quad S(t_n)\varphi_n \to a$$

فإن $a = \lim_{n\to+\infty} S(t_n - t)S(t)\varphi_n$

وليكن $v_n = S(t_n - t)\varphi_n$ فإنه بتطبيق المبرهنة مساعدة ٤ من أجل المتتالية v_n يوجد متتالية جزئية v_{nk} تتقارب من b في $H^1(\mathbb{R})$ فيكون لدينا

$$S(t)v_{nk} \to S(t)b$$

بالإضافة $v_{nk} = S(t_{nk} - t)\varphi_{nk}$ فإن

$$S(t)v_{nk} = S(t_{nk})\varphi_{nk} \to a$$

فإن $S(t)b = a$ فيصبح لدينا $S(t)\mathcal{A} \supset \mathcal{A}$

الآن نبرهن أن $\mathcal{A}$ متراصة في $H^1(\mathbb{R})$، ليكن x_n متتالية قيمها في $\mathcal{A}$ وبما أن $S(t)$ قابلة للعكس بالنسبة للزمن فإن

$$x_n = S(t)S(-t)x_n \,, \forall t \geq 0$$

من أجل $t = n$, $y_n = S(-n)x_n \in \mathcal{A} \subset \beta$ إذاً $x_n = S(n)y_n \subset \beta$ بتطبيق المبرهنة مساعدة ٤ فإنه يوجد متتالية جزئية x_{n_i} من $S(n)y_n = x_n$ تتقارب بقوة في $H^1(\mathbb{R})$ أي

$$\lim_{i\to+\infty} x_{n_i} = \lim_{i\to+\infty} S(n_i)y_{n_i} = x \in \mathcal{A}$$

فإن $\mathcal{A}$ متراصة في $H^1(\mathbb{R})$. بقي أن نبرهن أن $\mathcal{A}$ يجذب كل المجموعات المحدودة في $H^1(\mathbb{R})$ أي من أجل كل مجموعة محدودة B في $H^1(\mathbb{R})$

$$dist\,(S(t)B, \mathcal{A}) \to 0 \text{ عندما } t \to +\infty$$

ومن أجل B_0 $\quad \exists\delta > 0, t_j \to +\infty \,; dist\,\left(S\left(t_j\right)B_0, \mathcal{A}\right) \geq \delta$

ومن أجل j يوجد u_j من B_0 بحيث يكون $\quad dist\,\left(S\left(t_j\right)u_j, \mathcal{A}\right) \geq \dfrac{\delta}{2} > 0$

وبما أن $S(t)B_0 \subset \beta\,, \forall t \geq t_0$ وبتطبيق المبرهنة مساعدة ٤ يوجد متتالية جزئية $S\left(t_{j_i}\right)u_{j_i}$ من المتتالية

$S\left(t_j\right)u_j = S\left(t_j - t_0\right)S(t_0)u_j$ بالتالي تتقارب بقوة في $H^1(\mathbb{R})$ أي

$$\lim_{j_i\to+\infty} S\left(t_{j_i}\right)u_{j_i} = \lim_{j_i\to+\infty} S\left(t_{j_i} - t_0\right)S(t_0)u_{j_i} = u$$

بالتالي يوجد متتالية $S(t_0)u_j$ من β و$t_j - t_0 \to +\infty$ بحيث أن $S\left(t_j - t_0\right)S(t_0)u_j \to u$ وذلك بالاعتماد على تعريف $\mathcal{A}$ فيكون $u \in \mathcal{A}$.

فإن بتطبيق المبرهنة 1.1.1 في [14] يكون $\mathcal{A}$ جاذب شامل في $H^1(\mathbb{R})$ للمعادلة (2).

الاستنتاجات والتوصيات:

استنتجنا أن معادلة شرودنجر تملك جاذب شامل في $H^1(\mathbb{R})$ الذي يعطي تنبؤ بسلوك النظام الديناميكي الذي تزوده هذه المعادلة، ونوصي بدراسة وجود جاذب شامل لهذه المعادلة في فضاء ثنائي البعد.

المراجع:

[1]. Akroune, N. (1999). Regularity of the attractor for a weakly damped nonlinear Schrödinger equation on R. *Applied Mathematics Letters*, *12*(3), 45-48.

[2]. Alouini, B., & Goubet, O. (2014). Regularity of the attractor for a Bose-Einstein equation in a two dimensional unbounded domain. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-B*, *19*(3), 651-677.

[3]. Bradley, C. C., Sackett, C. A., & Hulet, R. G. (1997). Bose-Einstein condensation of lithium: Observation of limited condensate number. *Physical Review Letters*, *78*(6), 985

[4]. Colin, T., Dias, F., & Ghidaglia, J. M. (1995). On rotational effects in the modulations of weakly nonlinear water waves over finite depth. *EUROPEAN JOURNAL OF MECHANICS SERIES B FLUIDS*, *14*, 775-794.

[5]. Dabaa, A., & Goubet, O. (2016). Long time behavior of solutions to a Schrödinger-Poisson system in R^3. *Communications on Pure & Applied Analysis*, *15*(5), 1743.

[6]. Davey, A., & Stewartson, K. (1974). On three-dimensional packets of surface waves. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, *338*(1613), 101-110

[7]. Dautray, R., & Lions, J. L. (1990). *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology: volume 3*. Springer-Verlag, Berlin.

[8]. Djordjevic, V. D., & Redekopp, L. G. (1977). On two-dimensional packets of capillary-gravity waves. *Journal of Fluid Mechanics*, *79*(4), 703-714.

[9]. Ghidaglia, J. M. (1988, July). Finite dimensional behavior for weakly damped driven Schrödinger equations. In *Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis* (Vol. 5, No. 4, pp. 365-405). Elsevier Masson

[10]. Goubet, O., & Hussein, M. (2009). Dynamical properties for a relaxation scheme applied to a weakly damped non local nonlinear Schrodinger equation. *Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta*, *17*, 71-82.

[11]. Goubet, O., & Hussein, M. (2009). Global attractor for the Davey-Stewartson system on $\mathbb R^ 2$. *Communications on Pure & Applied Analysis*, *8*(5), 1555-1575.

[12]. Goubet, O., & Molinet, L. (2009). Global attractor for weakly damped nonlinear Schrödinger equations in L2 (R). *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, *71*(1-2), 317-320.

[13]. Goubet, O., & Zahrouni, E. (2021). Global attractor for damped forced nonlinear logarithmic Schrödinger equations. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-S*, *14*(8), 2933

[14]. Kechiche, W. (2021). Global attractor for a nonlinear Schrödinger equation with a nonlinearity concentrated in one point. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-S*, *14*(8), 3027.

[15]. Kechiche, W. (2017). Regularity of the global attractor for a nonlinear Schrödinger equation with a point defect. *Communications on Pure & Applied Analysis*, *16*(4), 1233.

[16]. Leblond, H. (1996). Electromagnetic waves in ferrites: from linear absorption to the nonlinear Schrödinger equation. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, *29*(15), 4623

[17]. Leblond, H. (1999). Electromagnetic waves in ferromagnets: a Davey-Stewartson-type model. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, *32*(45), 7907.

[18]. Stuble, Raimond A.,*Nonlinear Differential equation*, McGraw-Hill, New York, 1962.

[19]. Temam, R. (1988), *Infinite-Dimsional Dynamical System in Mechanics and Physic*, Spring, New York.

[٢٠]. Wang, X. (1995). An energy equation for the weakly damped driven nonlinear Schrödinger equations and its application to their attractors. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, *88*(3-4), 167-175.

[2١]. Zakharov, V. E., Musher, S. L., & Rubenchik, A. M. (1985). Hamiltonian approach to the description of non-linear plasma phenomena. *Physics reports*, *129*(5), 285-366.

[22]. Zhu, C. (2016*). Global Attractor of nonlocal nonlinear Schrodinger equation on R*. Advances in Analysis, 1(1).