مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (6) العدد (2) 2022

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (6) No. (2) 2022

إيزوتيرمية عملية تشيفر الترموديناميكية المتممة لأجل الحالة المستوية الأولى لانفعالات الجسم الصلب المرن دقيق الاستقطاب الخاضع لحرارة ويشغل الفضاء R^2

د. هالا محمد*

أ .د منتجب الحسن**

حنين عبد الكريم***

(تاريخ الإيداع 28/ 2021/10 – تاريخ النشر 9 /5/ 2022)

□ ملخّص □

تم في البحث أولاً تعميم طريقة متجه تشيفر,[1] [2.pp.217] لحل مسألة لامي للقيم الحدية والابتدائية للجسم (E−N:6) 2D، الخاضع لحرارة، والذي يشغل في لحظة البدء منطقة Ω بسيطة الترابط في المتنوعة الاقليدية R^2. بعدها سنثبت أيزوتيرمية عملية تشيفر الترموديناميكية المتممة في الجسم الصلب دقيق الاستقطاب والخاضع لحرارة في حالته المستوية الأولى، والذي يشغل كامل الفضاء R^2. في النهاية سننهي البحث باقتراح عدد من المسائل للمناقشة.

الكلمات المفتاحية: طريقة متجه تشيفر ، مسألة لامي للقيم الحدية والابتدائية للجسم (E−N:6)2D الخاضع لحرارة، إيزونبرمية عملية ستشيفر الترموديناميكية المتممة.

*مدرسة في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة طرطوس .

* * أستاذ في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة البعث.

*** طالبة ماجستير في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة طرطوس.

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية- سلسلة العلوم الأساسية المجلد (6) العدد (2) 2022

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol (6) No. (2) 2022

The isothermal of the Schaef complementary thermodynamical process for the first plane state of small elastic strain of the micropolar solid subjected to temperature field and occupying R^2

Prof Mountajab Al – Hasan*
Dr .Hala Mouhammad**
Hanin Abdelkareem***

(Received 28/10/2021.Accepted 9/5/2022)

□ABSTRACT □

In the paper, first we introduce the generalization of Schaefer vector method [2.pp.217] , [1] to solve the Lame initial-boundary value problem for the 2D (E-N:6) body, subjected to temperature field and which initial configuration is simply-connected region Ω in the Euclidean manifold R^2. Next we prove the isotheral of the Schaefer complementary thermodynamical process of the 2D (E-N:6) occu-pying R^2.Finally, we end the paper by suggesting new problems for discussing.
Key words: Schafer vector method , the Lame initial-boundary value problem for the 2D (E-N:6) solid subjected to temperature field , the isotheral of the Schaefer comple-mentary thermodynamical process.

* Doctor At Department of Mathematics–Faculty of Science–Tartous University.
**Professor At Department of Mathematics – Faculty of Science – Al–Baath University.
*** Master Student At Department of Mathematics–Faculty of Science–Tartous University..

1. مقدمة:

في [3] استَخدمت طريقة متجه تشيفر، في حل مسائل القيم الحدية لمعادلات لامي ضمن الحالة المستوية الأولى لانفعالات الجسم (E−N:6)، وذلك انطلاقاً من متجه تشيفر:

$\zeta \equiv \left(0\,,0\,,\frac{1}{2}\in_{\alpha\beta} u_{\beta\,,\alpha}\right)$، ($\alpha,\beta=1,2$)، حيث $\in_{\alpha\beta}$ هو تنسور ليفي−تشيفيتا، النسبي على الفضاء الاقليدي ثنائي البعد R^2. ثم تم وبنفس الطريقة، حل مسائل القيم الحدية لمعادلات لامي للحالة ثنائية البعد للانفعالات المرنة للجسم من النموذج (E−N:6)، حيث الانفعالات المرنة متناظرة محورياً (راجع مثلاً:[4, 5])، كما أشار نفس الباحثين إلى إمكانية حل نفس هذه المسائل، أي مسائل القيم الحدية لمعادلات لامي للحالة ثنائية البعد وكذلك الحالة ثلاثية البعد للانفعالات المرنة للجسم من النموذج (E−N:6)، بوجود حقل درجات حرارة،

وحقل لدونة. وفي عام 2004 استخدم ديشليفيتش [2] طريقة متجه تشيفر، في حل مسائل القيم الحدية والابتدائية لمعادلات لامي للحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة للجسم من نموذج (E−N:6)، بما يتوافق مع الحالة الديناميكية، المتساوية درجات الحرارة لهذا الجسم. أخيراً في [1] تم تعميم طريقة متجه تشيفر إلى حل مسألة لامي للقيم الحدية والابتدائية للجسم

2D(E−N:6) ، المتجانس والمتماثل المناحي والخاضع لحرارة، ويشغل في لحظة البدء منطقة Ω بسيطة الترابط في المتنوعة الاقليدية R^2.

2. أهمية البحث و أهدافه:

يهدف البحث إلى أثبات إيزوتيرمية عملية تشيفر الترموديناميكية المتممة في الجسم الصلب دقيق الاستقطاب والخاضع لحرارة في حالته المستوية الأولى، والذي يشغل كامل الفضاء R^2.

3. طريقة البحث و مواده :

سوف نستخدم نتائج البحث [1]، المتمثلة بتعميم طريقة متجه تشيفر لحل مسألة الجسم

2D(E−N:6) الخاضع لحرارة، ويشغل في لحظة البدء منطقة Ω بسيطة الترابط في المتنوعة الاقليدية R^2. من ثم سنثبت المطلوب، بتطبيق نظرية التحويلات التكاملية، متمثلةً بتحويل فورييه الثلاثي بالنسبة للموضع والزمن، على المعادلات المستقلة المتعلقة بعملية تشيفر الترموديناميكية المتممة للجسم (−E N:6) 2D، الخاضع لحرارة، ويشغل كامل المتنوعة الاقليدية R^2.من أجل متطلبات البحث، سنعرض بدايةً وبشكل مختصر، نتائج البحث [2] المتمثلة بالنموذج الرياضي التقليدي ونموذج لامي الرياضي للجسم(−E N:6) 2D، الخاضع لحرارة، والذي سنفرض أنه متجانس ومتماثل المناحي ويشغل في لحظة البدء منطقة Ω بسيطة الترابط في المتنوعة الإقليدية R^2.

٣-١مسألتا الوصف التقليدي ووصف لامي للحالة الترموديناميكية للجسم المرن

(E–N:6) 2D، المتجانس والمتماثل المناحي، والخاضع لحرارة، ضمن الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة، حيث يشغل الجسم في لحظة البدء المنطقة بسيطة الترابط Ω في المتنوعة الاقليدية ثنائية البعد R^2 :

توطئة: سنفترض أن جميع الأدلة الإغريقية .... $\alpha , \beta , \gamma ,$ تأخذ القيم $1, 2$ وسنعتمد رموز Einstein في المتنوعة الإقليدية ثنائية البعد R^2، ولتكن $O x_1 x_2 x_3$ جملة إحداثية ديكارتية قائمة ، ومباشرة، وعطالية، وقاعدتها $(\mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3)$. من أجل الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة للجسم المدروس، تكون كافة المقاطع التنسورية الحاكمة للحالة الترموديناميكية للجسم المعتبر، تكون مستقلة عن الاحداثي الديكارتي الثالث x_3، حيث توصف العملية الترموديناميكية للجسم المعتبر المتجانس والمتماثل المناحي بمجموعة المقاطع التنسورية: $(\mathbf{u} , \boldsymbol{\varphi} , \theta , \boldsymbol{\sigma} , \boldsymbol{\mu} , \boldsymbol{\gamma} , \boldsymbol{\kappa})$، حيث $\mathbf{u}$ و $\boldsymbol{\varphi}$ مقطعان متجهيان مستقلان، وهما على الترتيب ، مقطع الإزاحات ومقطع الاتجاهات ، و $\theta := \mathrm{T} - \mathrm{T}_0$ حقل سلمي ؛ يمثل تغير حقل الحرارة ؛ حيث T الحرارة المطلقة في الجسم و T_0 حرارة الحالة الطبيعية له. إضافةً إلى ماتقدم ذكره فإن: $\boldsymbol{\sigma} , \boldsymbol{\mu} , \boldsymbol{\gamma} , \boldsymbol{\kappa}$، مقاطع تنسورية من المرتبة الثانية ، هي على الترتيب: مقطع إجهادات القوة، ومقطع إجهادات العزم ، ومقطع الانفعالات، ومقطع الانفعالات الموافقة الاستقطاب الدقيق. وإذا رمزنا بـ $] 0 , \infty [=: \mathrm{T}^+$، و بـ $[0 , \infty [=: \mathrm{T}$، فيمكن أن تمثل الحقول السابقة في $\Omega \times \mathrm{T}^+$ وفي النظام الإحداثي الديكارتي $\mathbf{e}_i$، بالشكل:

$$\mathbf{u} \equiv (u_1 , u_2 , 0) \ , \quad \boldsymbol{\varphi} \equiv (0 , \ 0 , \varphi_3) \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{\gamma} \equiv \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ , \quad \boldsymbol{\kappa} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & \kappa_{13} \\ 0 & 0 & \kappa_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \ , \quad \boldsymbol{\mu} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mu_{13} \\ 0 & 0 & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

حيث:

$$\sigma_{33} = \nu \, \sigma_{\alpha\alpha} - \frac{\mu}{\mu + \lambda} \, v_T \, \theta \ , \quad \mu_{3\alpha} = \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \, \mu_{\alpha 3} \tag{3.4}$$

كما أن: $\nu = \dfrac{\lambda}{2(\mu + \lambda)}$ تمثل نسبة بواسون، و $v_T = (3\lambda + 2\mu) \, a_t$ و(a_t يمثل معامل التمدد الخطي الحراري للجسم)، و $\mu , \lambda , \gamma , \varepsilon \in R_+$ تمثل ثوابت مادية للجسم المدروس، و أخيراً ننوه إلى أن جميع المركبات الموجودة في العلاقات السابقة تتبع للموضع: $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2) \in \Omega$ وللزمن t.

أولاً) الوصف التقليدي:إن الوصف التقليدي للحالة الترموديناميكية للجسم (E–N:6)2D المتجانس والمتماثل المناحي، والخاضع لحرارة، ضمن الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة، يعتمد على المعادلات والعلاقات الأساسية والشروط الحدية والابتدائية التالية [2]:

معادلات الحركة، المحققة في $\Omega \times \mathrm{T}^{+}$:

$$\sigma_{\beta\alpha,\beta} + X_{\alpha} = \rho\, \ddot{u}_{\alpha}\ , \quad \in_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} + \mu_{\beta 3,\beta} + Y_3 = J\, \ddot{\varphi}_3 \qquad (3.5)$$

حيث: ρ، على الترتيب تمثلان الكثافة الحجمية والعطالة الدورانية للجسم المعتبر و $\mathbf{X} \equiv (X_1, X_2, 0)$ مقطع القوة الحجمية و $\mathbf{Y} \equiv (0, 0, Y_3)$ مقطع العزم الحجمي. نرمز بواسطة الفاصلة الدليلية للمشتق الجزئي بالنسبة لمتحولات الموضع: $f_{,\beta} = \dfrac{\partial f}{\partial x_{\beta}}$ ، كما نرمز بالنقطة للمشتق الجزئي بالنسبة للزمن: $\dot{f} \equiv \partial f / \partial t$.كما اعتمدنا اتفاقية الجمع على رموز إنيشاتين المكررة على الأدلة الأغرقية أخيراً الرموز $\in_{\alpha\beta}$ تمثل المركبات الديكارتية لتنسور ليفي− تشيفيتا، النسبي، من المرتبة الثانية.

معادلات انسجام الانفعالات، المحققة في $\Omega \times \mathrm{T}$:

$$\begin{aligned} &\kappa_{23,1} - \kappa_{13,2} = 0\ ,\ \kappa_{13} - \gamma_{21,1} + \gamma_{11,2} = 0\ , \\ &\kappa_{23} + \gamma_{12,2} - \gamma_{22,1} = 0 \end{aligned} \qquad (3.6)$$

العلاقات الهندسية، *المحققة في* $\Omega \times \mathrm{T}^{+}$:

$$\gamma_{\alpha\beta} = u_{\beta,\alpha} + \in_{\beta\alpha} \varphi_3\ , \quad \kappa_{\alpha 3} = \varphi_{3,\alpha} \qquad (3.7)$$

العلاقات التأسيسية، المحققة في $\Omega \times \mathrm{T}$:

$$\begin{aligned} &\sigma_{\alpha\beta} = (\mu + \alpha)\, \gamma_{\alpha\beta} + (\mu - \alpha)\, \gamma_{\beta\alpha} + (\lambda e_1 - \nu_T\, \theta)\, \delta_{\alpha\beta}\ , \\ &\mu_{\alpha 3} = (\gamma + \varepsilon)\, \kappa_{\alpha 3} \end{aligned} \qquad (3.8)$$

حيث $\alpha \in R_{+}$ الثابت المادي الخامس للجسم، و $e_1 = \gamma_{\varepsilon\varepsilon}$، أما $\delta_{\alpha\beta}$ فهو رمز دلتا كرونيكا،

معادلات الحرارة والانفعال، المحققة في $\Omega \times \mathrm{T}^{+}$:

$$\theta_{,\alpha\alpha} - \frac{1}{\kappa}\, \dot{\theta} - \eta_0\, \dot{e}_1 = -\frac{Q}{\kappa} \qquad (3.9)$$

حيث :

$$Q = \frac{\kappa W}{\lambda_0}\ , \quad \kappa = \frac{\lambda_0}{c_{\varepsilon}}\ , \quad \eta_0 = \frac{\nu_T\, T_0}{\lambda_0}$$

علماً أن Q يمثل المصادر الحرارية في الجسم المعتبر ، و W كمية الحرارة المشكّلة في وحدة الحجم ووحدة الزمن ، و λ_0 معامل التوصيل الحراري ، و c_{ε} تمثل الحرارة النوعية من أجل تشوه ثابت، كما أن: $\dot{e}_1 = \dot{\gamma}_{\varepsilon\varepsilon}$،

الشروط الحدية المحققة على $\partial\Omega \times \mathrm{T}$:

$$\sigma_{\beta\alpha} n_{\beta} = p_{\alpha}\ , \quad \mu_{\alpha 3} n_{\alpha} = m_3\ , \quad \theta = \vartheta \qquad (3.10)$$

حيث التوابع $[(p_{\alpha}, m_3, \vartheta) : \partial\Omega \times \mathrm{T} \to R\ ]$ معلومة ، و $\partial\Omega$ هي الحدود الملساء للمنطقة Ω $(\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega)$، أما n_{β} فهي المركبات الديكارتية لمتجه واحدة الناظم على $\partial\Omega$، والموجه نحو خارج $\partial\Omega$.

الشروط الابتدائية المحققة في $\Omega\times\{0\}$:

$$u_\alpha = f_\alpha \ , \ \varphi_3 = f_3 \ , \ \theta = \ell \ , \ \dot{u}_\alpha = g_\alpha \ , \ \dot{\varphi}_3 = g_3 \qquad (3.11)$$

حيث التوابع $[(f_\alpha, f_3, \ell, g_\alpha, g_3) : \Omega \to R]$ معلومة .

ثانياً) وصف لامي: يستند وصف لامي للحالة الترموديناميكية للجسم (E−N:6)2D المتجانس والمتماثل المناحي، والخاضع لحرارة، ضمن الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة، إلى المعادلات والعلاقات الأساسية والشروط الحدية والابتدائية التالية [2]:

معادلات لامي للحركة، المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\Box_2 u_\alpha + (\lambda + \mu - \alpha) u_{\beta,\beta\alpha} + 2\alpha \in_{\alpha\gamma} \varphi_{3,\gamma} - \nu_T \theta_{,\alpha} + X_\alpha = 0 \qquad (3.12)$$

$$\Box_4 \varphi_3 + 2\alpha \in_{\alpha\beta} u_{\beta,\alpha} + Y_3 = 0 \ , \qquad (3.13)$$

$$D\,\theta - \eta_0 \dot{u}_{\varepsilon,\varepsilon} = -\frac{Q}{\kappa} \qquad (3.14)$$

حيث: $\Box_2 = (\mu+\alpha)\Delta_1 - \rho\,\partial_t^2$ و $\Box_4 = (\gamma+\varepsilon)\,\Delta_1 - 4\alpha - J\,\partial_t^2$

و $D = \Delta_1 - \frac{1}{\kappa}\,\partial_t$ و Δ_1 هو مؤثر لابلاس الاشتقاقي السلمي ثنائي البعد: $(\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2})$ ،

أما $\partial_t f = \dot{f} = \partial f / \partial t$،

العلاقات الهندسية، المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\gamma_{\alpha\beta} = u_{\beta,\alpha} + \in_{\beta\alpha} \varphi_3 \ , \quad \kappa_{\alpha 3} = \varphi_{3,\alpha} \qquad (3.15)$$

والحرارة والد العلاقات التي تعطي الإجهادات بدلالة الإزاحات ورانات، والمحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\sigma_{\alpha\beta} = (\mu+\alpha)\,u_{\beta,\alpha} + (\mu-\alpha)u_{\alpha,\beta} - 2\alpha \in_{\alpha\beta} \varphi_3 + \\ + (\lambda u_{\varepsilon,\varepsilon} - \nu_T\,\theta)\,\delta_{\alpha\beta} \ , \qquad (3.16)$$

$$\mu_{\alpha 3} = (\gamma+\varepsilon)\,\varphi_{3,\alpha} \qquad (3.17)$$

الشروط الحدية المحققة على $\partial\Omega \times T$:

$$[(\mu+\alpha)u_{\alpha,\beta} + (\mu-\alpha)u_{\beta,\alpha} - 2\alpha \in_{\beta\alpha} \varphi_3]n_\beta + \\ + (\lambda u_{\varepsilon,\varepsilon} - \nu_T\,\theta)\,n_\alpha = p_\alpha \ , \qquad (3.18)$$

$$(\gamma+\varepsilon)\,\varphi_{3,\alpha} n_\alpha = m_3 \ , \quad \theta = \vartheta \qquad (3.19)$$

الشروط الابتدائية المحققة في $\Omega\times\{0\}$:

$$u_\alpha = f_\alpha \ , \ \varphi_3 = f_3 \ , \ \theta = \ell \ , \ \dot{u}_\alpha = g_\alpha \ , \ \dot{\varphi}_3 = g_3 \qquad (3.20)$$

كما يلزمنا فيمايلي عرض نتائج البحث [1]، المتمثلة بالفقرة التالية.

٣-٢ تعميم طريقة متجه تشيفر إلى حل مسألة لامي للقيم الحدية والابتدائية للجسم (E−N:6) 2D، الخاضع لحرارة، والذي يشغل في لحظة البدء منطقة Ω **بسيطة الترابط في المتنوعة الاقليدية** R^2:

سنناقش الآن تعميم طريقة متجه تشيفر[1] لحل مسألة لامي للجسم (E−N:6) 2D الخاضع لحرارة، ضمن الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة، باتباع الآتي:

بتعويض المركبة: $\zeta_3 = \frac{1}{2}\in_{\alpha\beta} u_{\beta,\alpha} - \varphi_3$ لمتجه تشيفر: $\boldsymbol{\zeta} \equiv (0\,,\,0\,,\,\zeta_3)$ في المعادلتين (3.12) و(3.13)، من ثم بالاستفادة من العلاقة:

$$\in_{\alpha\gamma}\in_{\varepsilon\delta} = \delta_{\alpha\varepsilon}\delta_{\gamma\delta} - \delta_{\alpha\delta}\delta_{\gamma\varepsilon} \tag{3.21}$$

نحصل على المعادلتين التاليتين المحققتين في $\Omega \times \mathrm{T}^+$:

$$\overset{*}{\square}_2 u_\alpha + (\lambda+\mu) u_{\beta,\beta\alpha} - \nu_T\, \theta_{,\alpha} + X_\alpha = 2\alpha \in_{\alpha\gamma} \zeta_{3,\gamma} \tag{3.22}$$

$$\overset{*}{\square}_4 \in_{\alpha\beta} u_{\beta,\alpha} + 2Y_3 = 2\,\square_4 \zeta_3 \tag{3.23}$$

حيث: $\overset{*}{\square}_2$ و $\overset{*}{\square}_4$ ، على الترتيب هما $\square_2$ و $\square_4$ بعد تعويض $\alpha = 0$.

لنفترض الآن أن:

$$\begin{aligned} &u_\alpha = u_\alpha^0 + u'_\alpha \;\;, \varphi_3 = \varphi_3^0 + \varphi'_3 \;\;,\quad \theta = \theta^0 + \theta' \;\;,\\ &\zeta_3 = \zeta_3^0 + \zeta'_3 \;\;, Y_3 = Y_3^0 + Y'_3 \;\;, \end{aligned} \tag{3.24}$$

حيث المقاطع: $u_\alpha^0\,,\ \varphi_3^0\,,\ \theta^0$ تتعلق بجسم هوك ضمن المرونة التقليدية المترابطة مع حقل حراري. عندئذٍ بوضع : $\zeta_i^0 = 0$ ، نصل إلى مسألة القيم الحدية– الابتدائية للجسم في إطار المرونة الخطية التقليدية المترابطة مع حقل حرارة، حيث نحصل من المعادلة

(3.22) على معادلات لامي التقليدية التالية المحققة في $\Omega \times \mathrm{T}^+$:

$$\overset{*}{\square}_2 u_\alpha^0 + (\lambda+\mu) u_{\beta,\beta\alpha}^0 - \nu_T\, \theta_{,\alpha}^0 + X_\alpha = 0 \tag{3.25}$$

إن المعادلة (3.25) مترابطة مع المعادلة (3.14)، التي تأخذ هنا من أجل: u_α^0, θ^0 تأخذ الشكل التالي في $\Omega \times \mathrm{T}^+$:

$$\mathrm{D}\,\theta^0 \;-\; \eta_0 \dot{u}_{\varepsilon,\varepsilon}^0 = -\frac{Q}{\kappa} \tag{3.26}$$

إلى ذلك نضيف الشروط الحدية والابتدائية، التقليدية التالية، التي نحصل عليها من الشروط الحدية والابتدائية (3.10) و(3.11):

الشروط الحدية المحققة على $\partial\Omega \times \mathrm{T}$:

$$\sigma_{\beta\alpha}^0 n_\beta = p_\alpha \;\;,\;\; \theta^0 = \vartheta \tag{3.27}$$

حيث $\sigma_{\beta\alpha}^0$ هي المركبات الديكارتية لمقطع الإجهادات التقليدي $\boldsymbol{\sigma}^0$.

الشروط الابتدائية المحققة في $\Omega\times\{0\}$:

$$u_\alpha^0 = f_\alpha\ ,\ \theta^0 = \ell\ ,\ \dot u_\alpha^0 = g_\alpha \qquad (3.28)$$

الآن من المعادلة (٣.3) ، لأجل ($\zeta_3^0 = 0$ و $Y_3^0 = 0$) ، تنتج المعادلة التالية، المحققة في: $\Omega\times T^+$:

$$2\overset{*}{\square}_2\,\varphi_3^0 + \in_{\alpha\beta} X_{\beta,\alpha} = 0 \qquad (3.29)$$

الناتجة عن المعادلة (٣.5)، والعلاقة التقليدية:

$$2\varphi_3^0 = \in_{\alpha\beta} u_{\beta,\alpha}^0 \qquad (3.30)$$

من نظام المعادلات (3.22) و(٣.3) و(3.14) و (٣.5) و (3.26) و (3.29) نحصل على جملة المعادلات التالية المحققة في $\Omega\times T^+$ لأجل $u'_\alpha\ ,\ \zeta_3\ ,\ \theta'$:

$$\overset{*}{\square}_2\,u'_\alpha + (\lambda+\mu)\,u'_{\beta,\beta\alpha} - v_T\,\theta'_{,\alpha} + \hat X_\alpha = 2\alpha \in_{\alpha\gamma} \zeta_{3,\gamma} \qquad (3.31)$$

$$\begin{aligned}\overset{*}{\square}_4 \in_{\alpha\beta} u'_{\beta,\alpha} + 2\bar Y_3 - 2\,\square_4\zeta_3 &= \\ = 2(\gamma+\varepsilon)\,(c_4^{-2} - \hat c_2^{-2})\,\ddot\varphi_3^0\end{aligned} \qquad (3.32)$$

$$\mathrm{D}\,\theta' - \eta_0\dot u'_{\varepsilon,\varepsilon} = -\frac{\hat Q}{\kappa} \qquad (3.33)$$

حيث:

$$\begin{aligned} &c_4^2 = \frac{\gamma+\varepsilon}{J}\ ,\ \hat c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}\ ,\ \hat X_\alpha = 0\ ,\ \hat Q = 0\ , \\ &\bar Y_3 = Y_3 - \frac{\gamma+\varepsilon}{2\mu} \in_{\alpha\beta} X_{\beta,\alpha}\end{aligned} \qquad (3.34)$$

إلى جملة المعادلات (3.33) − (3.12) نضيف الشروط الحدية والابتدائية التالية:

الشروط الحدية المحققة على $\partial\Omega\times T$:

$$\sigma'_{\beta\alpha} n_\beta = 0\ \ ,\ \ \mu'_{\alpha 3} n_\alpha = m_3 - m_3^0\ \ ,\ \ \theta' = 0 \qquad (3.35)$$

الشروط الابتدائية المحققة في $\Omega\times\{0\}$:

$$u'_\alpha = 0\ ,\ \ \varphi'_3 = f_3 - f_3^0\ ,\ \theta' = 0\ ,\ \dot u'_\alpha = 0\ ,\ \dot\varphi'_3 = g_3 - g_3^0 \qquad (3.36)$$

حيث المقادير: m_3^0 و f_3^0 و g_3^0 تنتج عن حل مسألة القيم الحدية والابتدائية التقليدية (3.28)− (3.25) وعن العلاقات التقليدية:

$$\begin{aligned} &\varphi_3^0 = \frac{1}{2} \in_{\alpha\beta} u_{\beta,\alpha}^0\ ,\quad \kappa_{\alpha 3}^0 = \varphi_{3,\alpha}^0\ , \\ &\mu_{\alpha 3}^0 = (\gamma+\varepsilon)\,\kappa_{\alpha 3}^0\ ,\ \ m_3^0 = \mu_{\alpha 3}^0 n_\alpha\end{aligned} \qquad (3.37)$$

حيث:

$$f_3^0(\mathbf{x}) = \lim_{t\to 0} \varphi_3^0(\mathbf{x},t)\ ,\ \ g_3^0(\mathbf{x}) = \lim_{t\to 0} \frac{\partial \varphi_3^0}{\partial t}(\mathbf{x},t)\ ;\ \mathbf{x}\in\Omega \qquad (3.38)$$

إن المعادلات (3.26)−(3.25) و(٣.33)−(3.31) مرتبطة ليس من خلال الشروط الحدية والابتدائية (3.36)−(3.35)، وإنما أيضاً من خلال ظهور الدوران التقليدي: $\varphi_3^0 = \frac{1}{2}\in_{\alpha\beta} u^0_{\beta,\alpha}$ أمام المؤثر: $2(\gamma+\varepsilon)\,(c_4^{-2}-\hat{c}_2^{-2})\,\partial_t^2$، في المعادلة (3.32).

نشير هنا إلى إن الشروط التقليدية الأبتدائية أو الحدية هي الشروط المتوافقة مع جسم هوك إما الشروط المتممة فهي الجزء المكمل للشروط المذكورة إلى حالة الجسم الدقيق .

آلية حل المسألة: تتلخص آلية حل المسألة (3.11)−(3.1) بالخطوات الثلاث التالية:

أولاً: بحل مسألة القيم الحدية والابتدائية، التقليدية، نحصل على الإزاحات التقليدية u^0_α والحقل الحراري التقليدي θ^0. باستخدام العلاقات $(3.37)_{1,2}$ نحصل على الدوران التقليدي φ_3^0 وعلى انفعال العزم التقليدي $\kappa^0_{\alpha 3}$. باستخدام العلاقة $(3.37)_3$ نحصل على انفعالات العزم التقليدية $\mu^0_{\alpha 3}$. أما باستخدام $(3.37)_4$و(3.38) فنحصل، على الترتيب، على كل من m_3^0 و f_3^0 و g_3^0. أما باستخدام العلاقات الهندسية $(3.7)_1$ ، مكتوبةً بالنسبة للإزاحات التقليدية u^0_α والانفعالات التقليدية $\varepsilon^0_{\alpha\beta}$، نحصل على الانفعالات التقليدية $\varepsilon^0_{\alpha\beta}$. وباستخدام العلاقة $(3.8)_1$ ، مكتوبةً بالنسبة للانفعالات التقليدية $\varepsilon^0_{\alpha\beta}$ والحقل الحراري التقليدي θ^0 والإجهادات التقليدية $\sigma^0_{\alpha\beta}$، نحصل على الإجهادات التقليدية $\sigma^0_{\alpha\beta}$.

ثانياً: وبحل مسألة القيم الحدية الابتدائية المتممة (3.36)− (3.31) ، نحصل على الحل المتمم: $u'_\alpha\ ,\ \varphi'_3\ ,\theta'$. وباستخدام العلاقات الهندسية (3.7) مكتوبةً بالنسبة للإزاحات المتممة u'_α والدوران المتمم φ'_3 والانفعالات المتممة $\gamma'_{\alpha\beta}$ و $\kappa'_{\alpha 3}$ ، فإننا نحصل على هذه الانفعالات المتممة. وباستخدام العلاقات التأسيسية (3.8)، مكتوبةً بالنسبة للانفعالات المتممة $\gamma'_{\alpha\beta}$ و $\kappa'_{\alpha 3}$ والحقل الحراري المتمم θ'، و الإجهادات المتممة $\sigma'_{\alpha\beta}$ و $\mu'_{\alpha 3}$ ، فإننا نحصل على الإجهادات المتممة $\sigma'_{\alpha\beta}$ و $\mu'_{\alpha 3}$.

ثالثاً: بعد الحصول على جميع الحقول الفيزيائية التقليدية والمتممة ، نعوض في:

$$\begin{aligned} &u_\alpha = u^0_\alpha + u'_\alpha\ ,\quad \varphi_3 = \varphi^0_3 + \varphi'_3\ ,\quad \theta = \theta^0 + \theta'\ ,\\ &\gamma_{\alpha\beta} = \varepsilon^0_{\alpha\beta} + \gamma'_{\alpha\beta}\ ,\quad \kappa_{\alpha 3} = \kappa^0_{\alpha 3} + \kappa'_{\alpha 3}\ ,\\ &\sigma_{\alpha\beta} = \sigma^0_{\alpha\beta} + \sigma'_{\alpha\beta}\ ,\quad \mu_{\alpha 3} = \mu^0_{\alpha 3} + \mu'_{\alpha 3} \end{aligned} \qquad (3.39)$$

ونستخدم العلاقة (3.4)، فنحصل على الحل $(\mathbf{u}\ ,\ \boldsymbol{\varphi}\ ,\ \theta,\ \boldsymbol{\sigma}\ ,\ \boldsymbol{\mu}\ ,\ \boldsymbol{\gamma}\ ,\ \boldsymbol{\kappa})$ لمسألة القيم الحدية والابتدائية (3.11)−(3.1).

سنستنتج جملة معادلات تحوي مشتقات جزئية من أجل المقاطع: $u'_\alpha\ ,\ \varphi'_3\ ,\theta'$ ، و خالية من الدوران التقليدي φ^0_3. ولهذا الغرض نطبق المؤثر $\overset{*}{\square}_2$ على طرفي المعادلة (3.23)، فنحصل على المعادلة التالية المحققة في $\Omega\ \times\ T^+$:

$$\square_2\left(\overset{*}{\square}_4 \in_{\alpha\beta} u_{\beta,\alpha} + 2\, Y_3 - 2\, \overset{*}{\square}_4 \zeta_3\right) = 0 \qquad (3.40)$$

من المعادلة (3.40) ، لأجل ($\zeta_3^0 = 0$ و $Y_3^0 = 0$) ، تنتج المعادلة التالية، المحققة في $\Omega\times(0,\infty)$:

$$\overset{*}{\square}_4(2\overset{*}{\square}_2\, \varphi_3^0 + \in_{\alpha\beta} X_{\beta,\alpha}) = 0 \qquad (3.41)$$

والمحققة في $\Omega \times \mathrm{T}^+$، وينتج ذلك من تحقق المعادلة (3.29) في $\Omega \times \mathrm{T}^+$.

الآن، ينتج من المعادلتين(3.22) و (3.40) ومعادلة التوصيل الحراري(3.14)، أن جملة المعادلات التالية محققة في $\Omega \times \mathrm{T}^+$، من أجل $u'_\alpha\,,\ \zeta_3\,, \theta'$:

$$\overset{*}{\square}_2 u'_\alpha + (\lambda+\mu)\, u'_{\beta,\beta\alpha} - v_T\, \theta'_{,\alpha} + \hat{X}_\alpha = 2\alpha \in_{\alpha\gamma} \zeta_{3,\gamma}\,, \qquad (3.42)$$

$$\square_2\left(\overset{*}{\square}_4 \in_{\alpha\beta} u'_{\beta,\alpha} - 2\, \overset{*}{\square}_4 \zeta_3\right) + 2\, \hat{Y}_3 = 0\,, \qquad (3.43)$$

$$\mathrm{D}\, \theta' - \eta_0 \dot{u}'_{\varepsilon,\varepsilon} = -\frac{\hat{Q}}{\kappa} \qquad (3.44)$$

حيث:

$$\hat{Y}_3 = \overset{*}{\square}_2 Y_3 - \frac{1}{2}\, \overset{*}{\square}_4 \in_{\alpha\beta} X_{\beta,\alpha} \qquad (3.45)$$

نلاحظ هنا اختفاء الدوران التقليدي φ_3^0 من جملة المعادلات الأخيرة . باستخدام العلاقة:

$$\zeta_3 = \frac{1}{2} \in_{\alpha\beta} u'_{\beta,\alpha} - \varphi'_3 \qquad (3.46)$$

تأخذ جملة المعادلات (3.44)- (3.42) الشكل التالي في $\mathrm{T}^+ \times \Omega$، أجل $u'_\alpha\,,\ \varphi'_3\,, \theta'$:

$$\square_2 u'_\alpha + (\lambda+\mu-\alpha)\, u'_{\beta,\beta\alpha} + 2\alpha \in_{\alpha\gamma} \varphi'_{3,\gamma} - v_T\, \theta'_{,\alpha} + \hat{X}_\alpha = 0 \qquad (3.47)$$

$$\overset{*}{\square}_2(\square_4 \varphi'_3 + 2\alpha \in_{\alpha\beta} u'_{\beta,\alpha}) + \hat{Y}_3 = 0 \qquad (3.48)$$

$$\mathrm{D}\, \theta' - \eta_0 \dot{u}'_{\varepsilon,\varepsilon} = -\frac{\hat{Q}}{\kappa} \qquad (3.49)$$

نضيف إلى جملة المعادلات الأخيرة (٣.٤٧)-(٣.٤٩)الشروط الحدية والابتدائية (3.36)- (3.35).

ومن أجل متطلبات هذا البحث يلزمنا أيضاً عرض مؤثر فورييه التكاملي المضاعف من المرتبة الثالثة، المباشر $\boldsymbol{F}_3$ بالنسبة للموضع وللزمن، والعكسي $\boldsymbol{F}_3^{-1}$ [6] ، ولهذا السبب سنعرض مايلي:

٣- ٣ تحويلا فورييه التكامليان و المضاعفان من المرتبة الثالثة ، المباشر والعكسي: لتكن $f(\mathbf{x}\,,\ t)$ (حيث: $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$) دالة حقيقية معرفة ومستمرة في R^3، ولنفرض، أيضاً أنها قابلة للمكاملة، مطلقاً على R^2.

عندئذ فإن تحويل فورييه التكاملي، المضاعف من المرتبة الثالثة للتابع $f\,(\mathbf{x}\,,\,t\,)$ ، والذي نرمز له ب $\boldsymbol{F}_3[\,f\,(\mathbf{x}\,,\,t\,)\,]$ (أو بالرمز $\bar{f}\,(\xi\,,\,\tau\,)$)، يكون موجوداً [١]، وبحسب التعريف، يعطى بالشكل الآتي :-

$$\boldsymbol{F}_4[\,f\,(\mathbf{x}\,,\,t\,)\,] = \bar{f}\,(\xi\,,\,\tau\,) :=$$

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f\,(\mathbf{x}\,,\,t\,)\,e^{\,i\,(\mathbf{x}\cdot\xi+\tau\,t\,)}\,d\,\mathbf{x}\,d\,t \qquad (3.50)$$

حيث $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$ و $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2)$ و $\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi} = x_\alpha\,\xi_\alpha$

و $d\,\mathbf{x}=d\,x_1 d\,x_2$ و $i = \sqrt{-1}$ ،

كما أن الدالة $\bar{f}\,(\xi\,,\,\tau\,)$ ، معرفة ومستمرة في R^3، وقابلة للمكاملة، بالقيمة المطلقة، على R^2، بالتالي فإن تحويل فورييه، التكاملي العكسي، من المرتبة الثالثة، لـ $\bar{f}\,(\xi\,,\,\tau\,)$ ، والذي نرمز له بالرمز $\boldsymbol{F}_3^{\,-1}[\bar{f}\,(\xi\,,\,\tau\,)\,]$ (أو بالرمز $f\,(\mathbf{x},t\,)$ [٢])، يكون موجوداً، وهو بحسب التعريف يعطى بالشكل:

$$\boldsymbol{F}_3^{\,-1}[\bar{f}\,(\xi\,,\,\tau\,)\,] = f\,(\mathbf{x}\,,\,t\,) :=$$

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f\,(\mathbf{x}\,,\,t\,)\,e^{\,-i\,(\mathbf{x}\cdot\xi+\tau\,t\,)}\,d\,\xi\,d\,\tau \qquad (3.51)$$

حيث $d\,\xi = d\,\xi_1 d\,\xi_2$.

في البحث سنفرض أن كافة الحقول الفيزيائية، التقليدية والمتممة في الجسم (2D(E−N:6 المترابط مع حقل درجات حرارة ويشغل R^2، بالمعنى الرياضي، معرَّفة ومعدومة من أجل القيم السالبة لـ t .

4. النتائج والمناقشة:

لإثبات إيزوتيرمية عملية تشيفر الترموديناميكية المتممة للجسم (2D(E−N:6 الواقع تحت تأثير حقل درجات حرارة ويشغل R^2، لا بد من استنتاج المعادلات المنفصلة من أجل التمدد السطحي المتمم: $e':=u'_{\beta,\beta}$ والحرارة المتممة: θ' من عملية تشيفر الترموديناميكية المتممة للجسم المذكور.

٤− ١ استنتاج المعادلات المنفصلة المتعلقة بكلٍ من التمدد السطحي، المتمم: $e':=u'_{\beta,\beta}$ وبالحرارة المتممة: θ' ، ذلك من عملية تشيفر الترموديناميكية المتممة للجسم المذكور:

نحصل على المعادلات المنشودة من المعادلتين (3.47) و(3.49)، باتباع مايلي:

باشتقاق طرفي المعادلة (3.47)، بالنسبة لـ x_α، نحصل على المعادلة التالية المحققة في $\Omega\times\mathrm{T}^+$:

$$\square_2\, e' + (\lambda+\mu-\alpha)\,\Delta_1 e' + 0 - v_T\,\Delta_1\theta' + \hat{X}_{\alpha,\alpha} = 0 \qquad (3.52)$$

أو:

$$\square_1\, e' = v_T\,\Delta_1\theta' - \hat{X}_{\alpha,\alpha} \qquad (3.53)$$

---

[١] الشروط المذكورة أعلاه، التي تحققها الدالة $f\,(\mathbf{x}\,,\,t\,)$، هي شروط كافية من أجل وجود كل من $\boldsymbol{F}_3[\,f\,(\mathbf{x}\,,\,t\,)\,]$ و $\boldsymbol{F}_3^{\,-1}[\bar{f}\,(\xi\,,\,\tau\,)\,]$ [8].

حيث: $\square_1 = (\lambda + 2\mu)\,\Delta_1 - \rho\;\partial_t^2$.

للحصول الآن، على المعادلة المنفصلة من أجل θ'، نطبق المؤثر $\square_1$ على طرفي المعادلة (3.49) (حيث: $e' := u'_{\beta,\beta}$) ، ثم نستفيد من المعادلة (3.53) نحصل بعد التبسيط و الأختصار على المعادلة التالية ، فنحصل على المعادلة التالية المحققة في $\Omega \times \mathrm{T}^+$:

$$\square_1 \mathrm{D}\,\theta' - \eta_0 \partial_t\left(v_T\,\Delta_1\theta' - \hat{X}_{\alpha,\alpha}\right) = -\square_1\left(\frac{\hat{Q}}{\kappa}\right) \qquad (3.54)$$

أو:

$$\square_1 \mathrm{D}\,\theta' - v_T\,\eta_0 \partial_t\,\Delta_1\theta' = -\left(\frac{1}{\kappa}\square_1 \hat{Q} + \eta_0\partial_t \hat{X}_{\alpha,\alpha}\right) \qquad (3.55)$$

أو:

$$\mathrm{D}_2\theta' = -\left(\frac{1}{\kappa}\square_1 \hat{Q} + \eta_0\partial_t \hat{X}_{\alpha,\alpha}\right) \qquad (3.56)$$

حيث: $\mathrm{D}_2 := \square_1 \mathrm{D} - v_T\,\eta_0\partial_t\,\Delta_1$

وهي المعادلة المنفصلة من أجل الحرارة المتممة θ' والمحققة في $\Omega \times \mathrm{T}^+$.

أخيراً، لإيجاد المعادلة المنفصلة من أجل e' والمحققة في $\Omega \times \mathrm{T}^+$، نطبق المؤثر D على طرفي المعادلة (3.53)، ثم نستفيد من المعادلة (3.49) (حيث: $e' := u'_{\beta,\beta}$) ، فنحصل على المعادلة التالية، المحققة في $\Omega \times \mathrm{T}^+$:

$$\square_1 \mathrm{D}e' - v_T\,\eta_0\,\partial_t\,\Delta_1 e' = -\left(\mathrm{D}\hat{X}_{\alpha,\alpha} + \frac{v_T}{\kappa}\Delta_1 \hat{Q}\right) \qquad (3.57)$$

أو:

$$\mathrm{D}_2\,e' = -\left(\mathrm{D}\hat{X}_{\alpha,\alpha} + \frac{v_T}{\kappa}\Delta_1 \hat{Q}\right) \qquad (3.58)$$

وهي المعادلة المنفصلة من أجل التمدد السطحي للجسم الصلب e' والمحققة في $\Omega \times \mathrm{T}^+$.

بما أن: $\hat{X}_\alpha = 0\;,\;\hat{Q} = 0$ ، تأخذ المعادلتان المستقلتان(3.56) و(3.58)، الشكل التالي في $\Omega \times \mathrm{T}^+$:

$$\mathrm{D}_2\theta' = 0\;\;,\;\;\mathrm{D}_2\,e' = 0 \qquad (3.59)$$

ومنه النتيجة الهامة التالية:

إذا كان الجسم (E−N:6) 2Dالواقع تحت تأثير حقل درجات حرارة و يشغل كامل R^2 (أي: $\Omega = R^2$) ، وفرضنا أن الحقلين θ', e'الداخلين في المعادلتين المستقلتين (3.59)، يحققان تلك الشروط التي تسمح بتطبيق تحويل فورييه التكاملي الثلاثي المباشر $\boldsymbol{F}_3$، وتلك الشروط التي تسمح أيضاً بتطبيق خواص هذا التحويل. فإن المتطابقتين التاليتين تتحققان في $R^2 \times \mathrm{T}^+$:

$$\theta' \equiv 0\;\;,\;\;e' \equiv 0 \qquad (3.60)$$

في حين تأخذ المعادلات الحاكمة لعملية تشيفر الترموديناميكية المتممة الشكل التالي في $\mathrm{T}^{+} \times R^2$:

$$\square_2 u'_\alpha + 2\alpha \in_{\alpha\gamma} \varphi'_{3,\gamma} = 0 \qquad (3.61)$$

$$\overset{*}{\square}_2 \left(\square_4 \varphi'_3 + 2\alpha \in_{\alpha\beta} u'_{\beta,\alpha} \right) + \hat{Y}_3 = 0 \qquad (3.62)$$

البرهان: بتطبيق تحويل فورييه (3.50) على طرفي كلٍ من المعادلتين (3.59)، وبالاستفادة من خواص هذا التحويل [6] ، نحصل على المعادلتين التاليتين:

$$-\ (\lambda+2\mu) W_4(\xi,\tau)\,\overline{\theta}'(\xi,\tau) = 0\ , \qquad (3.63)$$

$$-\ (\lambda+2\mu) W_4(\xi,\tau)\,\overline{e}'(\xi,\tau) = 0\ , \qquad (3.64)$$

حيث:

$$W_4(\xi,\tau) = \xi^4 - [\sigma_1^2(\tau) + (1+\boldsymbol{\varepsilon})\, q(\tau)]\, \xi^2 + q(\tau)\, \sigma_1^2(\tau)$$

و $\xi = (\xi_\alpha \xi_\alpha)^{\frac{1}{2}}$ و $\sigma_1(\tau) = \dfrac{\tau}{c_1}$ و $c_1 = \sqrt{\dfrac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ و $q(\tau) = \dfrac{i\,\tau}{\kappa}$

و $m = \dfrac{\nu_T}{\lambda+2\mu}$ و $\boldsymbol{\varepsilon} = m\,\kappa\,\eta_0$.

ينتج من (3.63) و(3.64)، أن:

$$\overline{\theta}'(\xi,\tau) = 0\ ,\ \ \overline{e}'(\xi,\tau) = 0 \qquad (3.65)$$

الآن ، بتطبيق تحويل فورييه التكاملي، الثلاثي، العكسي $\boldsymbol{F}_3^{-1}$ (انظر [6]) ، على طرفي كل معادلة من المعادلتين السابقتين، نحصل على المتطابقتين التاليتين المحققتين في $\mathrm{T}^{+} \times R^2$:

$$\theta'(\mathbf{x},t) = 0\ ,\ e'(\mathbf{x},t) = 0 \qquad (3.66)$$

إن المعادلة الأولى من (3.66) تعني أن عملية تشيفر الترموديناميكية، المتممة في (E−N:6)2D الذي يشغل R^2، هي عملية إيزوتيرمية. أما المعادلة الثانية في (3.66) تعني أن التمدد السطحي، المتمم في (E−N:6)2D الذي يشغل R^2، معدوم.

هذا من جهة. ومن جهة أخرى بتعويض (3.66) في (3.47) و(3.48)، نحصل مباشرةً على (3.61) و(3.62)، وبذلك نكون قد أثبتنا المطلوب.

5. الاستنتاجات والمقترحات:

تم إثبات إيزوتيرمية عملية تشيفر الترموديناميكية المتممة للجسم (E−N:6)2D، المتجانس والمتماثل المناحي، والخاضع لحرارة، ضمن الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة، حيث يشغل الجسم كامل R^2، كما تم إثبات انعدام التمدد السطحي فيه

في ختام نختتم هذا البحث

نوصي بمناقشة المسائل الآتية :

أولاً− مناقشة طريقة متجه تشيفر في حل مسألة الوصف التقليدي العام للحالة المستوية الثانية (الحالة المستوية العكسية) للانفعالات المرنة للجسم الصلب ذي الاستقطاب الدقيق.

ثانياً− تعميم طريقة Papkovich−Neuber لحل مسألتي الحالة المستوية الأولى والثانية للانفعالات المرنة للجسم (E−N:6)2D، المتجانس والمتماثل المناحي، والخاضع لحرارة، حيث يشغل في لحظة البدء المنطقة Ω بسيطة الترابط في R^2.

ثالثاً− إعادة دراسة المسألتين الأولى والثانية من أجل الإنفعالات اللدنة .

المراجع

[1] – Mountajab Al-Hasan and Ali Jawdat Loulou , **2021** – *Generating the Schaefer vector method that solving the first plane state problems of micropolar elastic solid subjected to temperature field* , *Journal* of Al-Baath University,Vol.43, Nr.7, p. 147-159**.**

[2]- Dyszlewicz , J, **2004** - *Micropolar Theory of Elasticity* , in : Series Lectures. Notes in Applied and Computational Mechanics, Vol.15, 356 p, Springer .

[3]-Dyszlewicz J., **1973 -** *A method of solving static problems of linear asymmetric elasticity*,Mech. Teor. Stos., **11,2,143158** (in Polish).

[4]-Dyszlewicz , J ,**1986**-*Fundamental solutions of micropolar elastoststics* , Bull. Pol. Ac.: Tech. , I-1986 , 34 , 179-190 ;
II-1986 , 34 , 191-202.

[5]-Dyszlewicz J., Matysiak S., **1973**- *Singularity of stresses in micropolar elastic semispace due to discontinuous boundary load,* Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci.Techn., 21, 12, 605-610.

[6] – Debnath, L& Bhatta , D , **2007** – Integral Transforms and their Applications, (Second Edition), CRC Press, Boca Raton, Florida.

[7] –Nowacki, W , **1986** - Theory of Asymmetric Elasticity , Warsaw , PWN.

[8]–Dyszlewicz , J ,**1996** - *Selected problems of linear asymmetrical thermoelasticity,* Journal of Thermal Stresesses,19, 185-206.

[9] – Eringen , A . C , **1966** - *Linear theory of micropolar elasticity*, J.Math. Mech., 15 , 909 – 930.