

حلول لاغرانج وأولر لمسألة ثلاثة أجسام العامة وسطوح السرعة الصفرية

أ. د. محي الدين نظام *

د. نبيل جودية **

د.حمود العرابي ***

حنان أمين ****

(تاريخ الإيداع 2021 /11/25 – تاريخ النشر 2022 /2 /20)

□ ملخص □

تم في هذا العمل دراسة حلول لاغرانج المُميزة لمسألة ثلاثة أجسام فلكية حيث تمت مناقشة نوعين من التكوينات هما توزع على هيئة مثلث متساوي الأضلاع وتوزع على طول خط مستقيم. وقد شملت الدراسة أيضاً دراسة المدارات الدائرية والمدارات غير الدائرية بالإضافة إلى ذلك، غطت هذه الدراسة تكامل جاكوبي وسطوح السرعة الصفرية. تم في النهاية حساب وتحليل سطوح السرعة الصفرية بالقرب من نقاط لاغرانج باستخدام برنامج في بيئة الـ (matlab) وتم رسم هذه السطوح في المستوى (x,y) لحالات طاقة مختلفة. الكلمات المفتاحية: ديناميك فلكي - نقاط لاغرانج - سطوح السرعة الصفرية - تكامل جاكوبي - المدارات الدائرية - المدارات اللادائرية.

*أستاذ في قسم الفيزياء - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية

**أستاذ مساعد في قسم الفيزياء - كلية العلوم - جامعة دمشق - دمشق - سورية

***أستاذ مساعد في قسم الفيزياء - كلية العلوم - جامعة دمشق - دمشق - سورية

**** طالبة دكتوراه في قسم الفيزياء - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية

Lagrange and Euler's solutions of the general three bodies problem and zero velocity surfaces

Dr.Mohey Aldin Nizam*
Dr.Nabil Joudieh**
Dr.Hammoud ALorabi***
Hanan Amin****

(Received 25/11/2021.Accepted 20/2/2022)

□ABSTRACT □

In this work, special Lagrangian solutions to the problem of three astronomical bodies are studied where two types of formations are discussed which are distributed in the form of an equilateral triangle and distributed along a straight line.

Circular orbits and non-circular orbits were also included in the study. In addition, this study covered Jacobian integration and zero velocity surfaces.

At the end, zero velocity surfaces near Lagrangian points were calculated and analyzed using a program in the (matlab) environment and these surfaces were plotted in the (x,y) plane for different energy states.

Keywords: astrodynamics, Lagrangian points, zero velocity surfaces, Jacobian integration, circular orbits, Non Circular Orbits

*Professor at department of physics, Faculty of science, Tishreen University, Lattakia, Syria

**Assistant Professor at department of physics, Faculty of science, university of Damascus, Damascus, Syria

***Assistant Professor at department of physics, Faculty of science, university of Damascus, Daascus, Syria

**** postgraduate student, department of physics, Faculty of science, Tishreen University, Lattakia, Syria

١ - مقدمة

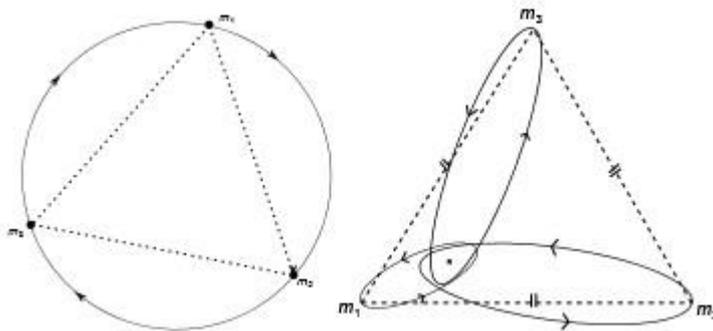
على الرغم من أن مسألة جسمين لكيبلر Kepler [1] لها حل تحليلي معروف، إلا أن مسألة ثلاثة أجسام عامة [2,3] تزيد من مستوى التعقيد إلى درجة تجعل الحل التحليلي مستعصياً على التحقيق. على الرغم من عدم وجود حلول عامة لهذا الجملة من المرتبة الثامنة عشر، إلا أنه من الممكن استخدام ١٠ تكاملات تحليلية دقيقة للحالة العامة [4]، المسؤولة عن انحفاظ العزم الزاوي (ثلاثة تكاملات)، الطاقة (تكامل واحد)، وحركة مركز كتلة الجملة (ستة تكاملات). تسمح هذه التكاملات العشرة، جنباً إلى جنب مع فرض شروط حالة خاصة أخرى، بإحراز تقدم تحليلي إضافي كبير. ينبع كل هذا التقدم تقريباً من عمل عالم الفلك والرياضيات الفرنسي اللامع لاغرانج [5].

مسألة ثلاثة أجسام المألوفة هي جملة الشمس والأرض والقمر [6,7] على الرغم من أن القمر يدور حول الأرض بطريقة شبه اهليلجية، وذلك لحساب بعض الانحرافات في مداره بالنسبة إلى الأرض، يجب أيضاً أخذ تأثير الجاذبية للشمس في الاعتبار. هذا هو أحد الأسباب التي تجعل الوصف الدقيق للمدار القمري معقداً للغاية.

على الرغم من أن نيوتن كان أول من درس الحركة المركبة للعديد من الأجرام السماوية التي تفسر جاذبيتها المتبادلة [8]، إلا أن لاغرانج في عام ١٧٧٢ هو الذي قدم تصورات (Essai sur Problème des Trois Corps) إلى أكاديمية باريس التي أظهرت حلولاً تحليلية بالفعل لمسألة ثلاثة أجسام إذا تم فرض قيود معينة وهي إيجاب الأجسام الثلاثة على البقاء في مثلث متساوي الأضلاع أو تشكيل خطي (خط مستقيم).

إن دراسة مسألة ثلاثة أجسام كروية مقيدة ذات أهمية خاصة [10,11]. لدينا حالة جسمان كرويان أكبر من الجسم الثالث يتبعان حركة دائرية كبلرية، بينما يتحرك جسم ثالث ذو كتلة متناهية الصغر نسبياً فيما بينهما [12]. من الطرق الجيدة لتصور هذا التفكير في برنامج أبولو [13]، حيث تطلق مركبة فضائية صغيرة تحت تأثير الجاذبية لجملة الأرض والقمر الذي يدور بشكل منتظم. أو يكون التقييد على الحركة [14,15] وندرس ثلاثة أجسام كبيرة نسبياً بحيث يبقى شكل المدار ثابتاً مع مرور الزمن حيث جميع الأجسام نفترض أنها تدور حول مركز الكتلة المشترك بنسبة زاوية معينة وقد أوجد لاغرانج حلول خاصة لها نعرضها في هذه المقالة.

١ - الحلّ المُميزة لمسألة ثلاثة أجسام: أولاً: حل لاغرانج المُميز لمسألة ثلاثة أجسام:



الشكل (١): توزيع الكتل عند رؤوس مثلث متساوي الأضلاع لمسألة ٣ أجسام

نحن نبحث في الحالة الخاصة التي تقع فيها الكتل عند رؤوس مثلث متساوي الأضلاع دوار. تأخذ في هذه الحالة معادلات الحركة لكل كتلة على حدة شكلاً بسيطاً ومألوفاً. نلاحظ أن المثلث يدور بسرعة زاوية متغيرة، وقد تتغير أبعاد المثلث متساوي الأضلاع بمرور الوقت.

يجب بالنسبة لمثلث متساوي الأضلاع، تحديد موضع الكتل الثلاث أي يجب أن نعرف موضع كتلتين على الأقل وشعاع سرعة لواحدة منها. إذ إن شكل الجملة البدائي لا يعتمد على كتل الأجسام فقط بل يعتمد على مواقعها أيضاً.

بفرض أن (x_1, x_2) موضع نقطتين مرتبطتين بمركز العطالة نستطيع إيجاد المسافة بين هاتين النقطتين، وبالتالي طول كل ضلع من أضلاع المثلث المتساوي الأضلاع (ρ) ، من خلال إيجاد الشعاع r_{12} المتجه من الجسم الأول (1) إلى الثاني (2).

$$r_{12} = x_2 - x_1 \quad (1)$$

فيكون طول الشعاع ρ :

$$\rho = |r_{12}| \quad (2)$$

وبما أن الزاوية بين أضلاع المثلث معروفة 60° فإن من السهل تدوير الشعاع \vec{r}_{12} بزاوية 60° حول محور عمودي على مستوي الحركة (i_h) للحصول على الشعاع \vec{r}_{13} . يجب الإشارة إلى أنه كي نستطيع إيجاد هذا الشعاع لا بد من إيجاد أيضاً سرعة أحد الأجسام.

ليكن شعاع عمودي على مستوي الحركة \vec{h}_{vec} ، يمكن إيجاد شعاع الوحدة \vec{i}_h للشعاع \vec{h}_{vec} من خلال

نسبة الشعاع الشعاع على طويلته.

$$\vec{i}_h = \frac{\vec{h}_{vec}}{|\vec{h}_{vec}|} \quad (3)$$

يمكن إيجاد \vec{i}_h خلال الضرب الشعاعي لشعاع السرعة \vec{v}_1 مع شعاع الموضع \vec{r}_{12} :

$$\vec{i}_h = \frac{\vec{r}_{12} \times \vec{v}_1}{|\vec{r}_{12} \times \vec{v}_1|} \quad (4)$$

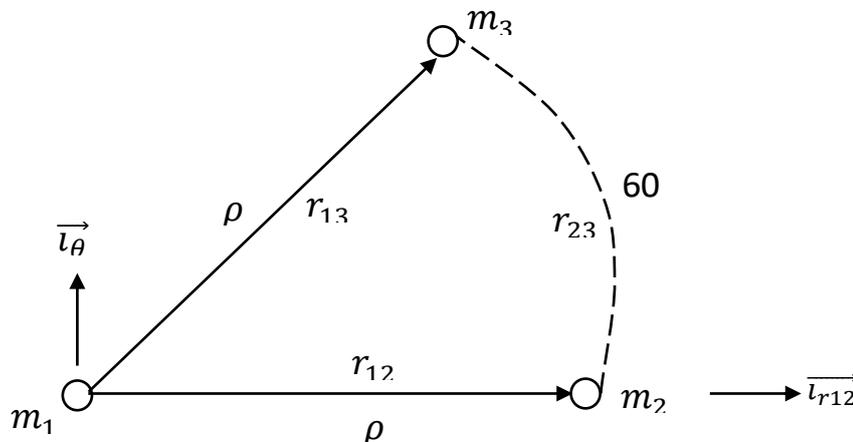
حيث يمكن إيجاد $\vec{r}_{12} \times \vec{v}_1$ من خلال الجذر التربيعي لضرب الشعاع بنفسه:

$$|\vec{r}_{12} \times \vec{v}_1| = \frac{(\vec{r}_{12} \times \vec{v}_1) \cdot (\vec{r}_{12} \times \vec{v}_1)}{\sqrt{(\vec{r}_{12} \times \vec{v}_1) \cdot (\vec{r}_{12} \times \vec{v}_1)}} \quad (5)$$

أصبح الآن لدينا شعاع الوحدة معروف يمكننا أيضاً إيجاد \vec{i}_h و $\vec{i}_{r_{12}}$.

نقوم في جملة الإحداثيات الجديدة بتدوير الشعاع \vec{r}_{12} حول \vec{i}_h بزاوية 60° للحصول على الشعاع

\vec{r}_{13} كما في الشكل (2)



الشكل (٢): دوران r_{12} بزاوية 60° حول l_h للحصول على r_{13}

يعطى شعاع الوحدة l_{r12} بالعلاقة:

$$l_{r12} = \frac{r_{12}}{|r_{12}|} \quad (٦)$$

بذلك يعطى شعاع الوحدة l_θ بالعلاقة:

$$l_\theta = l_h \times l_{r12} \quad (٧)$$

يُمكننا كتابة الشعاع r_{12} في جملة الإحداثيات الجديدة بالشكل:

$$r_{12} = \rho \cdot l_{r12} \quad (٨)$$

تعريف مصفوفة دوران محورين حول محور ثالث بزاوية θ بالعلاقة:

$$M_3(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (٩)$$

يمكننا إيجاد مصفوفة الدوران للشعاع r_{13} بالشكل:

$$r_{13} = [M_3(\theta)] \cdot r_{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \rho \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نحصل باستخدام $\theta = \mp 60^\circ$ و r_{12} في جملة الإحداثيات على:

$$r_{13} = \frac{1}{2} \rho \cdot l_{r12} \mp \sqrt{3}/2 \cdot \rho l_\theta \quad (١١)$$

تعطينا المعادلة (11) احتمالين ممكنين لشعاع من الجسم الأول للجسم الثالث من أجل التبسيط نأخذ فقط +.

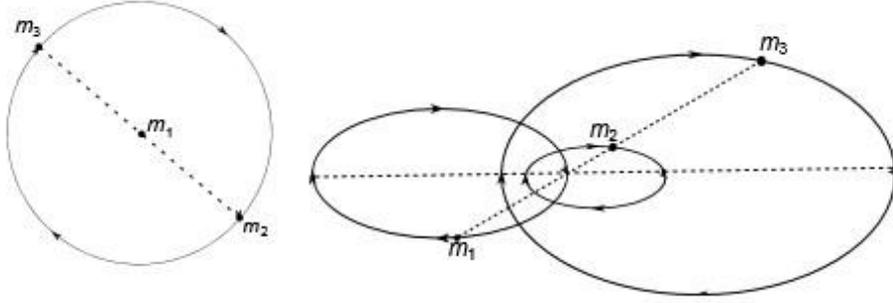
نستطيع باستبدال l_{r12} و l_θ بمكونات الشعاع في جملة إحداثيات ديكارتية إيجاد موضع الجسم الثالث

باستخدام المعادلة:

$$x_3 = x_1 + r_{13} \quad (١٢)$$

أصبح الآن لدينا جميع المواضع البدائية والكتل معلومة.

ثانياً: حل أولر الخطي لمسألة ثلاثة أجسام:



الشكل (٣): توزع الأجسام الفلكية الثلاثة على خط مستقيم

الحل المُميز الثاني لمسألة ثلاثة أجسام هو توزيعها على خط مستقيم. تبقى هنا نسبة المسافات بين الأجسام ثابتة.

إذا كانت جميع الكتل تقع على خط مستقيم، هناك احتمالين هما:

الاحتمال الأول:

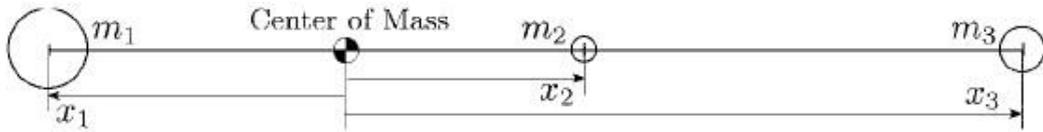
١. إن جميع قيم الكتل الثلاثة معروفة.
 ٢. إن مواقع اثنتان من الكتل معروف.
 ٣. إن موقع الجسم الثالث معروف ومرتبطة بالجسم الأول والثاني.
- أي: إما بين الكتلتين أو خلف الكتلة ١ أو خلف الكتلة ٢

الاحتمال الثاني:

١. إن اثنتان من قيم الكتل معروفة.
٢. إن مواقع كل الكتل معروفة.

الاحتمال الأول: جميع قيم الكتل معروفة

لايجاد موقع الكتلة الثالثة، بتغيير ترقيم الكتل بحيث الكتلة ١ في النهاية، والكتلة ٢ في المنتصف والكتلة ٣ على النهاية الأولى.



الشكل (٤): مثال توضيحي لتسلسل ثلاثة أجسام خطية

حسب قانون نيوتن:

$$\vec{F}_i = m_i \cdot \vec{r}_i = \quad (١٣)$$

$$G \cdot \sum_{j=1}^3 \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \cdot \vec{r}_{ij} \quad \begin{matrix} i = 1,2,3 \\ i \neq j \end{matrix}$$

حيث أن G : ثابت الجاذبية العام وأن \vec{r}_{ij} شعاع الموضع النسبي

$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$$

\vec{F}_i : القوة الناتجة من كل كتلة m_i على الكتلة m_j

وبما أن الكتل تقع على خط مستقيم وبالتالي \vec{F}_i تكون موازية لشعاع الموضع لكل كتلة لا بد أن تكون أيضاً محمولة على $\vec{l}_r = \vec{l}_{r12}$ وتكتب بالشكل:

$$\vec{F}_i = F_i \cdot \vec{l}_r \quad (١٤)$$

لنضع مركبات الموضع والسرعة والتسارع في جملة عتالة دورانية.

$$\vec{r}_i = r_i \cdot \vec{l}_r \quad (15, a)$$

$$\dot{\vec{r}}_i = \dot{r}_i \cdot \vec{l}_r + r_i \cdot \omega \cdot \vec{l}_\theta \quad (15, b)$$

$$\ddot{\vec{r}}_i = (\ddot{r}_i - r_i \cdot \omega^2) \vec{l}_r + (2\dot{r}_i \cdot \omega + r_i \cdot \dot{\omega}) \vec{l}_\theta \quad (15, c)$$

بإضافة المعادلة (15,c) والمعادلة (14) إلى المعادلة (13) نجد:

$$\vec{F}_i = m_i (\ddot{\vec{r}}_i - \vec{r}_i \cdot \omega^2)$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{F}_i}{m_i} = \ddot{\vec{r}}_i - \vec{r}_i \cdot \omega^2 \quad (١٦)$$

يكون في حالة الحال الخطي الشكل ثابت لمسألة ٣ أجسام وهو خط مستقيم. ونسبة المسافات بين الأجسام

تبقى ثابتة أيضاً

$$\frac{r_{12}}{r_{12}(0)} = \frac{r_{13}}{r_{13}(0)} = \frac{r_{23}}{r_{23}(0)} = f(t) \quad (١٧)$$

r_{ij0} : المسافة النسبية البدائية.

بالعودة للمعادلة (16):

$$\frac{F_i}{m_i} = \ddot{f} \cdot r_i(0) - r_i \cdot \omega^2 = \ddot{f} \cdot \frac{r_i}{f} - r_i \cdot \omega^2 = r_i \left(\frac{\ddot{f}}{f} - \omega^2 \right) \Rightarrow$$

$$\frac{F_i}{m_i \cdot r_i} = \frac{\ddot{f}}{f} - \omega^2 = A(t) \quad (١٨)$$

والتي تدل على أن نسبة القوة الناتجة على المسافة النسبية وكتلة الجسم تبقى ثابتة من أجل كل الكتل لذلك

$$F_i(t) = A(t) \cdot r_i(t) \cdot m_i \quad (١٩)$$

بالعودة للمعادلة (13)، نضع مكونات القوة F_i بالشكل وبتعويض (19) فيها (باعتبار خطي)

$$F_1 = A \cdot x_1 \cdot m_1 = G \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \frac{x_2 - x_1}{x_{12}^3} + G \cdot m_1 \cdot m_3 \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_{13}^3} \quad (20)$$

$$F_2 = A \cdot x_2 \cdot m_2 = G \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \frac{x_3 - x_2}{x_{23}^3} + G \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \frac{x_2 - x_1}{x_{12}^3} \quad (21)$$

$$F_3 = A \cdot x_3 \cdot m_3 = G \cdot m_1 \cdot m_3 \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_{13}^3} + G \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \frac{x_3 - x_2}{x_{23}^3} \quad (22)$$

نعرف الكمية χ لتبسيط الحل من أجل المسافات النسبية بالشكل:

$$\chi = \frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1} = \frac{x_{23}}{x_{12}} \quad (٢٣)$$

$$1 + \chi = \frac{x_{13}}{x_{12}} \quad (٢٤)$$

ب طرح المعادلة (21) من (20) وطرح المعادلة (22) من (21) يصبح لدينا

$$A \cdot x_{12} = -G \cdot \frac{m_1 + m_2}{x_{12}^2} + G \cdot m_3 \left(\frac{1}{x_{23}^2} - \frac{1}{x_{13}^2} \right) \quad (٢٥)$$

$$A \cdot x_{23} = -G \cdot \frac{m_2 + m_3}{x_{23}^2} + G \cdot m_1 \left(\frac{1}{x_{12}^2} - \frac{1}{x_{13}^2} \right) \quad (٢٦)$$

لنعيد صياغة (٢٥) و (٢٦) باستخدام

$$A \cdot x_{12}^3 = -G \cdot (m_1 + m_2) + G \cdot m_3 \left(\frac{1}{\chi^2} - \frac{1}{(1+\chi)^2} \right) \quad (27)$$

$$A \cdot x_{12}^3 = -G \cdot (m_2 + m_3) \cdot \frac{1}{\chi^3} + G \cdot m_1 \left(\frac{1}{\chi} - \frac{1}{x(1+\chi)^2} \right) \quad (28)$$

نوجد بمساواة هاتين المعادلتين، معادلة لاغرانج الخماسية الشهيرة والتي لها الشكل:

$$(m_1 + m_2) \cdot \chi^5 + (3m_1 + 2m_2) \cdot \chi^4 + (3m_1 + m_2) \cdot \chi^3 - (m_2 + 3m_3) \cdot \chi^2 - (2m_2 + 3m_3) \cdot \chi - (m_2 + m_3) = 0 \quad (29)$$

يمكن إيجاد مواقع الجسم في الحالات الثلاثة باستخدام المعادلات التالية:

$$x_{12} = \frac{x_{23}}{\chi} \Rightarrow x_1 = x_2 - x_{12} \quad (30, a)$$

$$x_{12} = \frac{x_{13}}{\chi} \Rightarrow x_2 = x_1 - x_{12} \quad (30, b)$$

$$x_{13} = \frac{1 + \chi}{\chi} \cdot x_{23} \Rightarrow x_3 = x_1 - x_{13} \quad (30, c)$$

لإيجاد الجسم ١ أو ٢ أو ٣ نستخدم المعادلات (30,a) أو (30,b) أو (30,c).

١. الاحتمال الثاني: (جميع قيم المواضع معروفة)

إن جميع المواضع الثلاثة معروفة ولدينا كتلتين معروفتين، وذلك بنفس الترتيب ١ في النهاية و ٢ في

المنتصف و ٣ على النهاية الأخرى نستخدم المعادلة (23)

$$\chi = \left| \frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1} \right|$$

ونستخدم معادلة لاغرانج الخماسية (29):

$$(m_1 + m_2) \cdot \chi^5 + (3m_1 + 2m_2) \cdot \chi^4 + (3m_1 + m_2) \cdot \chi^3 - (m_2 + 3m_3) \cdot \chi^2 - (2m_2 + 3m_3) \cdot \chi - (m_2 + m_3) = 0$$

يمكن حل المعادلة السابقة تحليلياً من أجل كل كتلة كما يلي:

$$m_1 = \frac{(3\chi^2 + 3\chi + 1)m_3 - (\chi^5 + 2\chi^4 + \chi^3 - \chi^2 - 2\chi - 1)m_2}{\chi^5 + 3\chi^4 + 3\chi^3} \quad (31, a)$$

$$m_2 = \frac{(3\chi^2 + 3\chi + 1)m_3 - (\chi^5 + 3\chi^4 + 3\chi^3)m_1}{(\chi^5 + 2\chi^4 + \chi^3 - \chi^2 - 2\chi - 1)} \quad (31, b)$$

$$m_3 = \frac{(\chi^5 + 3\chi^4 + 3\chi^3)m_1 + (\chi^5 + 2\chi^4 + \chi^3 - \chi^2 - 2\chi - 1)m_2}{(3\chi^2 + 3\chi + 1)} \quad (31, c)$$

أصبح لها الشكل:

$$m_1 = \frac{C_3 \cdot m_3 - C_2 \cdot m_2}{C_3} \quad (31, a)$$

$$m_2 = \frac{C_3 \cdot m_3 - C_1 \cdot m_1}{C_2} \quad (31, b)$$

$$m_3 = \frac{C_1 \cdot m_1 - C_2 \cdot m_2}{C_3} \quad (31, c)$$

حيث:

$$\begin{aligned} C_1 &= (\chi^5 + 3\chi^4 + 3\chi^3) \\ C_2 &= (\chi^5 + 2\chi^4 + \chi^3 - \chi^2 - 2\chi - 1) \quad (32) \\ C_3 &= (3\chi^2 + 3\chi + 1) \end{aligned}$$

وهكذا أصبحت الكتلة محددة وبالتالي كل الكتل والمواضع معروفة. وأصبحت لدينا السرعة البدائية معروفة

إيجاد السرعة البدائية:

يجب إيجاد السرعة لكل جسم بالإضافة لحجم ومواضع الأجسام لكي نستطيع محاكاة الحركة.

لدينا من المعادلة (15,b)

$$\vec{r}_i = \dot{r}_i \cdot \vec{l}_r + r_i \cdot \omega \cdot \vec{l}_\theta$$

من أجل السرعة البدائية:

$$\vec{r}_i(0) = \dot{r}_i \cdot \vec{l}_r + r_i(0) \cdot \omega \cdot \vec{l}_\theta$$

ولدينا $r_i = r_{i0} \cdot f(t)$ نعوض:

$$\vec{r}_i(0) = r_i(0) \cdot \dot{f}(0) \cdot \vec{l}_r + r_i(0) \cdot \omega \cdot \vec{l}_\theta \quad (33)$$

يمكننا إيجاد أشعة السرعة البدائية لكل جسم من الأجسام بمعرفة \dot{f} و ω .

إيجاد ω و \dot{f} :

إن الطرق لإيجاد \dot{f} و ω مختلفة عند التعامل مع مدارات دائرية أو مدارات لادائرية.

من أجل المدارات اللادائرية لا بد أن يعطي شعاع السرعة لأحد الأجسام لكي نجد الأشعة البقية، بينما في حالة

المدارات الدائرية فإن أشعة السرعة غير مطلوبة في البدء.

المدارات اللادائرية: Non Circular Orbits

يجب على كل جسم من الأجسام في الجملة أن يدور بالسرعة نفسها حول مركز الكتلة لكي يبقى الشكل نفسه.

هذا يعني ان شعاع السرعة الزاوية لكل جسم لا بد أن يكون نفسه لذلك الحل، لإيجاد السرعة البدائية هو:

$$\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_3 = \vec{\omega} \quad (34)$$

وكما وجدنا سابقاً (17) إن موقع أي جسم يمكن أن يرتبط بالموضع البدائي من خلال معامل معروف f :

$$r_1(t) = r_1(0) \cdot f(t) \quad (35, a)$$

$$r_2(t) = r_2(0) \cdot f(t) \quad (35, b)$$

$$r_3(t) = r_3(0) \cdot f(t) \quad (35, c)$$

وبما أن الموضع البدائي لكل جسم هو ثابت، و f متغيرة مع الزمن بأخذ المشتق يصبح لدينا:

$$\dot{r}_i(t) = r_i(0) \cdot \dot{f}(t) \quad (36)$$

وأيضاً \dot{f} يجب أن تكون نفسها لكل الأجسام. باستخدام المعادلات (15,a), (15,b)

$$\begin{aligned} \vec{r}_i &= r_i \cdot \vec{l}_r \\ \dot{\vec{r}}_i &= \dot{r}_i \cdot \vec{l}_r + r_i \cdot \omega \cdot \vec{l}_\theta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_i = r_i(0) \cdot \dot{f} \cdot \vec{l}_r + r_i(0) \cdot f \cdot \omega \cdot \vec{l}_\theta \quad (37)$$

عند $t = 0$ تكون $f = 1$ وبما أن شروط البدء هي شروط عند زمن $t = 0$ سوف نحاول إيجاد تغير

بسيط من أجل \dot{f} البدائية ومن ثم تعويضها في معادلة السرعة لكل جسم من الأجسام.

بما أن \dot{f} هي نفسها لكل الأجسام ويمكننا استخدام عبارة السرعة (37):

$$\overrightarrow{r_i(0)} = r_i(0) \cdot \dot{f}(0) \cdot \overrightarrow{t_r} + r_i(0) \cdot \omega \cdot \overrightarrow{t_\theta} \quad (38)$$

بالقسمة على $r_i(0)$ سوف تعطينا معادلة أبسط:

$$\frac{\overrightarrow{r_i(0)}}{r_i(0)} = \dot{f}(0) \cdot \overrightarrow{t_r} + \omega \cdot \overrightarrow{t_\theta} \quad (39)$$

\dot{f} هي المصطلح الوحيد بالاتجاه $\overrightarrow{t_r}$ ، إذا أوجدنا طريقة لإزالة مركبات $\overrightarrow{t_\theta}$ وهذه المعادلة، نستطيع إيجاد \dot{f} .

أفضل طريقة ضرب جانبي المعادلة بـ $\overrightarrow{t_r}$

$$\left(\frac{\dot{r}_i(0)}{r_i(0)} \right) \cdot \overrightarrow{t_r}(0) = (\dot{f}(0) \cdot \overrightarrow{t_r} + \omega \cdot \overrightarrow{t_\theta}) \cdot \overrightarrow{t_r}$$

بما أن $i_\theta \cdot i_r = 0$ و $i_r \cdot i_r = 1$

$$\left(\frac{\dot{r}_i(0)}{r_i(0)} \right) \cdot \overrightarrow{t_r}(0) = \dot{f}(0) \quad (40)$$

حيث يمكن إيجاد $\overrightarrow{t_r}(0)$ من خلال قسمة الشعاع على الطويلة:

$$\overrightarrow{t_r}(0) = \frac{\overrightarrow{r}(0)}{r(0)} \quad (41)$$

لإيجاد ω نريد بداية إيجاد العزم الزاوي لجسم من أجل أن نعرف السرعة بداية من تعريف العزم الزاوي:

$$h = r \times \dot{r} = h \cdot \overrightarrow{t_h} \quad (42)$$

يمكننا إيجاد شعاع الواحدة $\overrightarrow{t_h}$ من خلال استخدام:

$$\overrightarrow{t_h} = \frac{\vec{r} \times \dot{\vec{r}}}{|r \times \dot{r}|} \quad (43)$$

إن طويلة العزم الزاوي h ، يمكن تحديدها باستخدام ω :

$$h = \omega \cdot r_i(0) \quad (44)$$

$$\omega = \frac{|r_i(0) \times \dot{r}_i(0)|}{r_i^2(0)} \quad (45)$$

طريقة أخرى لتحديد ω من خلال المعادلة (39) بجعل ω على الطرف الأيسر:

$$\omega \cdot \overrightarrow{t_\theta} = \left(\frac{\dot{r}_i(0)}{r_i(0)} - \dot{f} \cdot \overrightarrow{t_r}(0) \right) \quad (46)$$

طويلة هذا الشعاع ω :

$$\omega = \left| \frac{\dot{r}_i(0) - \dot{f} \cdot r_i(0)}{r_i(0)} \right| \quad (47)$$

استخدام أي تعريف لـ ω يبدو أسهل عند الزمن.

إن الحالة الخاصة هي مدارات دائرية. من أجل المدارات الدائرية ليس من الضروري إعطاء سرع.

من أجل الحالة الأخرى، واحدة من السرع مطلوبة لتسمح لسرع الأخرى لتحديدها.

المدارات الدائرية: Circular Orbits

في المدارات الدائرية $\dot{f} = 0$ لأن \dot{f} هي مركبة السرعة باتجاه مركز الكتلة أو مبتعدة عنها والأجسام

تتحرك في دوائر وليست باتجاه أو بعيدة عن مركز الكتلة باستخدام $F = m \cdot a$ حيث a هو تسارع الطرد

المركزي $(r_i \cdot \omega^2)$ للجسم حول مركز الكتلة

$$F_i = m_i \cdot r_i \cdot \omega^2 = \left| \sum_{j=1}^3 F_{ij} \right| \quad (٤٨)$$

طالما هناك فقط قوتين تؤثران على كل جسم، فإن مجموع القوى يُكتب بالشكل:

$$F_{ij} = \frac{G \cdot m_i \cdot m_j}{r_{ij}^3} \cdot r_{ij} \quad (٤٩)$$

$$F_{ik} = G \cdot \frac{m_i \cdot m_k}{r_{ik}^3} \cdot r_{ik}$$

وبالتالي القوة الكلية هي

$$F_i = m_i \cdot r_i \cdot \omega^2 = G \cdot m_i \left(\frac{m_j}{r_{ij}^3} \cdot r_{ij} + \frac{m_k}{r_{ik}^3} \cdot r_{ik} \right)$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{G}{r_i} \left| \frac{m_j}{r_{ij}^3} \cdot r_{ij} + \frac{m_k}{r_{ik}^3} \cdot r_{ik} \right|} \quad (٥٠)$$

أصبح لدينا كلاً من ω و f من أجل كلا المدارين الدائري اللادائري. يجب استخدام هذه القيم من أجل إيجاد سرعة أخرى.

استخدام ω و f

من أجل إيجاد السرعة الأخرى علينا بداية إيجاد $i\theta_i$ من أجل كل جسم وذلك باستخدام المعادلة (43) هنا ممكن طالما نستخدم جملة إحداثيات موجهة وفق قاعدة اليد اليمنى

$$\vec{t}_{\theta_i} = \vec{t}_h \times \vec{t}_{r_i} \quad (٥١)$$

حيث وجد \vec{t}_h وهي نفسها لكل الأجسام وشعاع الواحدة كل جسم هو:

$$\vec{t}_{r_i} = \frac{\vec{r}_i}{|r_i|}$$

نحن ببساطة بحاجة لتعويض أشعة و الواحدة f و ω في المعادلة (38) والتي هي:

$$\vec{r}_i(\omega) = r_i(0) \cdot f(0) \cdot \vec{t}_{r_i} + r_i(0) \cdot \omega \cdot \vec{t}_{\theta_i} \quad (٥٢)$$

تكامل جاكوبي (C_G):

هو الكمية الوحيدة المصانة في مسألة ثلاثة أجسام فلكية مقيدة دائرياً على عكس مسألة جسمين التي يكون فيها الطاقة والعزم الحركي مصانين بشكل مستقل. لدينا حالتين بأبعاد وبدون أبعاد من أجل الحالة الأبعاد نحصل على [16]:

$$v^2 = \omega^2 (r_x^2 + r_y^2) + 2 \cdot \frac{G \cdot m_1}{r_1} + 2 \cdot \frac{G \cdot m_2}{r_2} - C_G \quad (٥٣)$$

$$r_i = \sqrt{(r_x - r_i)^2 + r_y^2 + r_z^2} \quad \text{و} \quad C_G : \text{ ثابت}$$

نعرف، لجعل تكامل جاكوبي بدون أبعاد، متحول الزمن الجديد τ بحيث يكون تردد النظام 2π بمعنى آخر أن

$$\omega = 1 \text{ rad/tu} \quad (\text{tu}) \text{ وحدة الزمن}$$

$$\tau = \omega \cdot t$$

نشق بالنسبة للزمن τ ونضع العلامة () للتمييز:

$$\dot{x} = \frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} \Rightarrow \dot{x} \cdot \omega = \dot{x}$$

للحصول على الأطوال بدون أبعاد من خلال تقسيم الطول من خلال المسافة بين الجسم (1) والجسم

$$r_{12} = 1du (m_2 + m_1) \quad (2)$$

$$-m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 = 0 \quad \text{يُعطى انحفاظ العزم الخطي:}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{m_2}{m_1} \cdot x_2$$

$$r_{12} = x_2 - (-x_1) = x_2 + x_1 \quad \text{من (1) المسافة هي:}$$

ندخل البارامتر الثابت μ من أجل الحصول على الكتل بدون أبعاد كمايلي:

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} \quad ; \quad 0 \leq \mu \leq \frac{1}{2}$$

نعرف واحدة الكتلة mu وبالتالي الكتلة الكلية للنظام $m_1 + m_2 = 1mu$

$$m_1 + \mu = 1 \Rightarrow m_1 = 1 - \mu \Rightarrow \mu = m_2 \quad \text{أصبح لدينا}$$

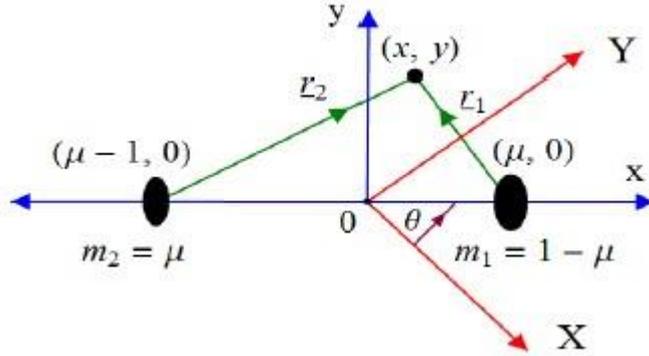
$$m_1 = 1 - \mu$$

$$m_2 = \mu$$

وبشكل مشابه، مواضع الأجسام نجدها بالشكل (٥):

$$x_1 = -\mu$$

$$x_2 = 1 - \mu$$



الشكل (٥): توزيع الكتل في مسألة ثلاثة أجسام مقيدة

هذا يقودنا لتكامل جاكوبي عديم الأبعاد حيث في حالة السرعة معدومة عند طاقة معينة سوف تحل

المعادلة: (منحنيات السرعة المعدومة أو منحنيات تساوي الكمون) وتصبح المعادلة بسطح ذو بعدين:

$$v^2 = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = (x^2 + y^2) + 2 \cdot \frac{1-\mu}{r_1} + 2 \cdot \frac{\mu}{r_2} - C_G \quad (٥٤)$$

$$r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + y^2 + z^2}$$

حيث

٢ - النتائج والمناقشة

تم وضع برنامج في بيئة الـ matlab للمعادلة (٥٤)، أخذنا جملة أرض- قمر، حيث نفرض التقريب بحيث يكون المدار دائري حول مركز كتلتها (أرض- قمر) المشترك، حتى نستطيع استخدام مسألة ثلاثة أجسام مقيدة دائرياً. من أجل حساب نقاط التوازن الخطية، بداية لدينا μ تعطى:

$$\mu = \frac{m_1}{m_2} = \frac{\text{كتلته القمر}}{\text{كتلته الأرض}} = 0.0123$$

نحصل بحل معادلة تكامل جاكوبي عديم الأبعاد (٥٤)، من أجل التوزع الخطي أي $y = z = 0$ على مواقع

لاجرانج: L_1, L_2, L_3

$$L_1 : x - \frac{(1-\mu)}{(\mu+x)^3} + \frac{\mu}{(x-1+\mu)^3} = 0. \quad (56)$$

$$L_2 : x - \frac{(1-\mu)}{(\mu+x)^3} - \frac{\mu}{(x-1+\mu)^3} = 0. \quad (57)$$

$$L_3 : x + \frac{(1-\mu)}{(\mu+x)^3} + \frac{\mu}{(x-1+\mu)^3} = 0. \quad (58)$$

تم الحصول على مواقع نقاط التوازن المثلثية (equilateral triangle) التي تقع على رؤوس مثلث متساوي الأضلاع الذي قاعدته الخط الواصل بين الجسمين وطولها يساوي واحد .

نحصل بفرض أن قاعدة المثلث متساوي الأضلاع $r_1 = r_2 = 1$ تقع على المحور x وارتفاعه على الـ

$$y = \pm \sqrt{3/2} \quad \text{، على مواقع لاجرانج } L_5, L_4 :$$

$$L_4 : y = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad x = -\mu + \frac{1}{2} \quad (59)$$

$$L_5 : y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad x = -\mu + \frac{1}{2} \quad (60)$$

١ - الحالة الأولى

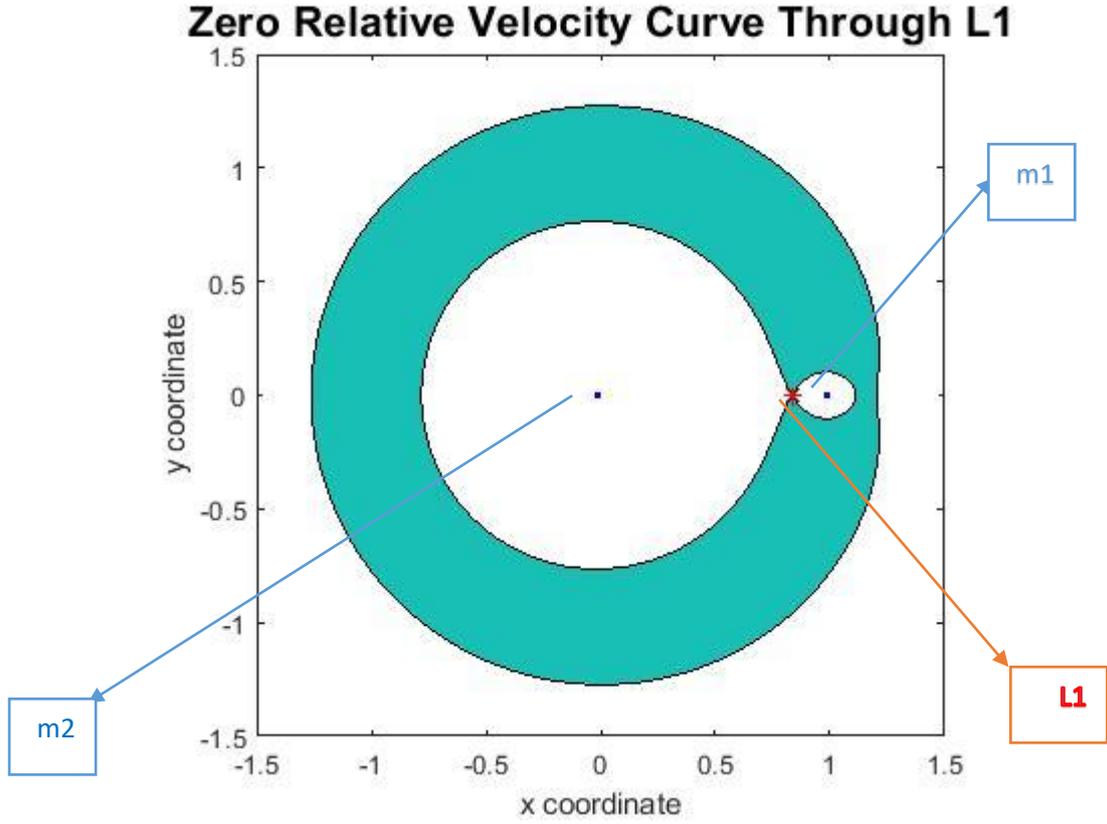
نعوض، عندما يملك الجسم ذو الكتلة m طاقة كافية للوصول إلى نقطة لاجرانج L_1 بين m_1 و

m_2 نعوض قيمة [16] $y_1 = 0$ ، $x_1 = 0.83691$ في المعادلة (5٤) بعد وضع $v = 0$

فنحصل على المعادلة:

$$x_1^2 + 2 \cdot \frac{1-\mu}{|x_1+\mu|} + 2 \cdot \frac{\mu}{|x_1-1+\mu|} = C_G \quad (61) \quad ,$$

يظهر الشكل (٦) الناتج عن استخدام بيئة الـ matlab موقع نقطة لاجرانج L_1 الناتج عن المعادلة (٦١)

الشكل (٦): سطح معدوم السرعة بالقرب من نقطة لاغرانج L_1

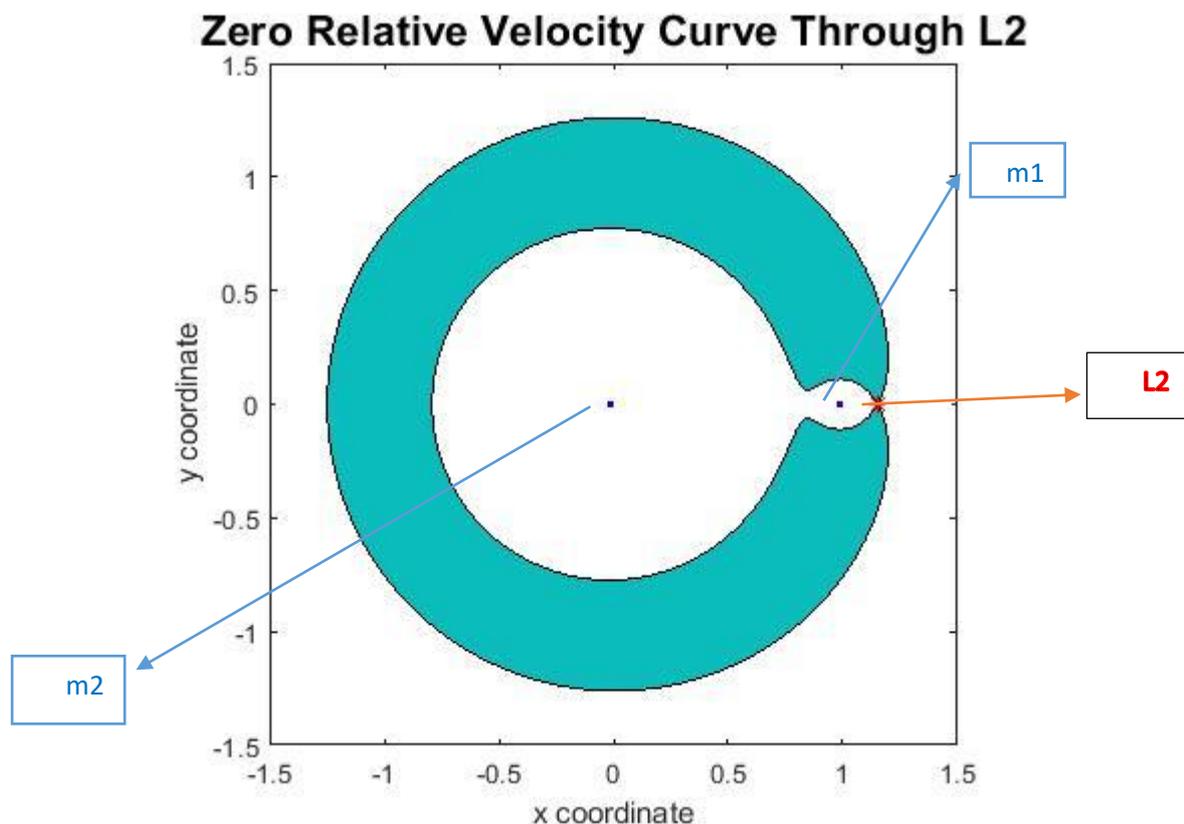
-٢ الحالة الثانية:

إن زيادة حالة الطاقة للجسم ذو الكتلة m بشكل لامتناهي في الصغر خلف هذه الحالة يفتح ممر بين مداري الجسمين ، ويجعل من الممكن نظرياً للجسم أن يعبر من الجسم ذو الكتلة m_1 إلى الجسم ذو الكتلة m_2 ، ولكن لايزال من المستحيل للجسم بالقرب من m_1 أو m_2 أن يغادر جملة جسمين، حيث نحصل بتعويض قيمة $x_2 = 1.15568$ $y_2 = 0$ [16] في المعادلة (٥٤) بعد وضع $v = 0$ نحصل على المعادلة

$$x_2^2 + 2 \cdot \frac{1-\mu}{|x_2+\mu|} + 2 \cdot \frac{\mu}{|x_2-1+\mu|} = C_G \quad (62)$$

يظهر الشكل (٧) الناتج عن استخدام بيئة matlab موقع نقطة لاغرانج L_2 الناتج عن المعادلة

(٦٢)



الشكل (٧): منحنى لسطح معدوم السرعة بالقرب من نقطة لاغرانج L_2

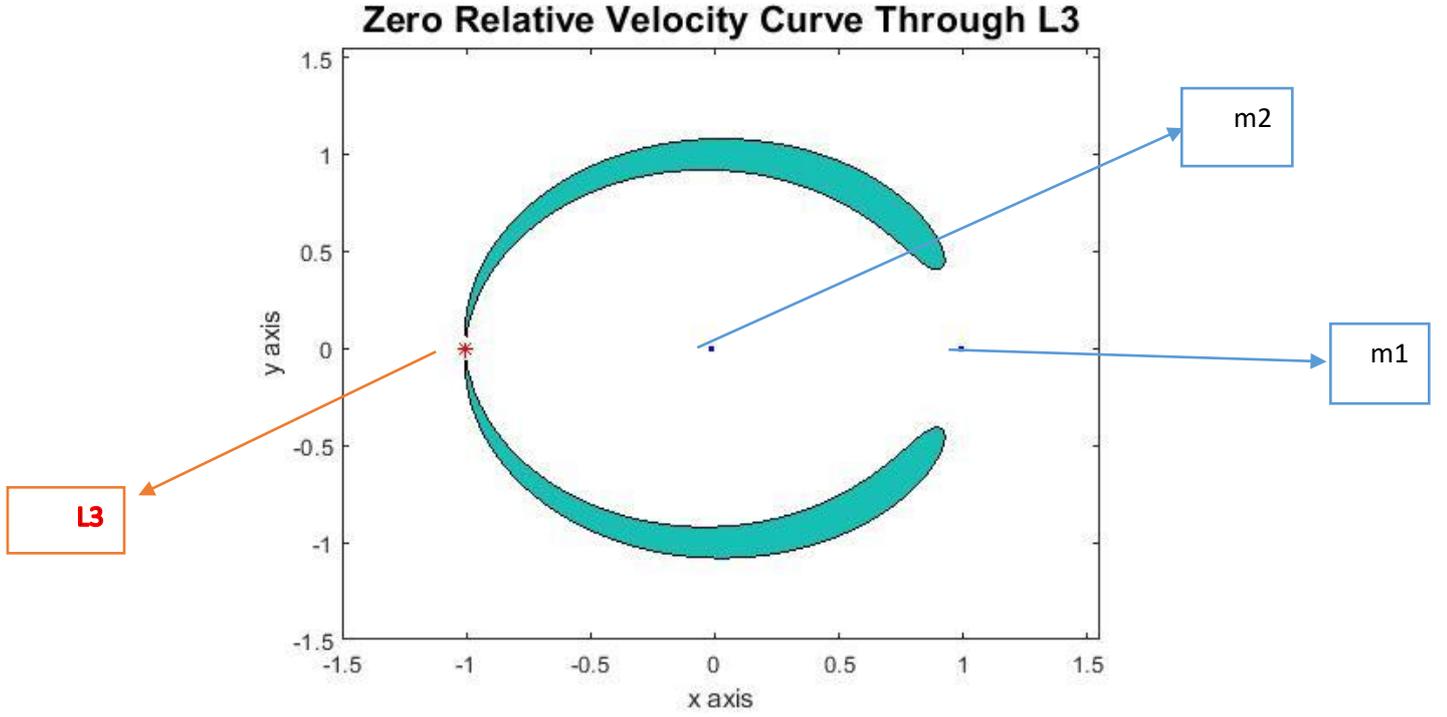
الحالة الثالثة: -٣

إن الحالة الطاقية التالية هي الوصول لسطح معدوم السرعة عند نقطة لاغرانج L_2 . أي طاقة إضافية الآن تجعل من الممكن من أجل الجسم ذو الكتلة m التمكن من الهروب نظرياً من جملة الجسمين. هذه الحالة هي فقط سطح معدوم السرعة يلامس نقطة لاغرانج L_3 ، بتعويض قيمة $y_3 = 0$ و $x_3 = -1.00506$ في [16]

المعادلة (٥٤) بعد وضع $v = 0$ نحصل على المعادلة (٦٣)

$$x_3^2 + 2 \cdot \frac{1 - \mu}{|x_3 + \mu|} + 2 \cdot \frac{\mu}{|x_3 - 1 + \mu|} = C_G \quad (63)$$

يظهر الشكل (٨) الناتج عن استخدام بيئة matlab موقع نقطة لاغرانج L_3 الناتج عن المعادلة (٦٣)



الشكل (٨): سطح معدوم السرعة بالقرب من نقطة لاغرانج L_3

٤- الحالة الرابعة:

هي المناطق المحظورة الأخيرة للوصول إليها هي مناطق لها شكل الموز حول نقاط لاغرانج للتوازن L_4 و L_5 .

إن تقدم حالة الطاقة الأخفض، بينما تتطلب النقاط L_4 و L_5 الطاقة الأكبر، وبتعويض بالقيم $y_4 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $x_4 = -\mu + 0.5$ في المعادلة (٥٤) بعد وضع $v = 0$ فنحصل على

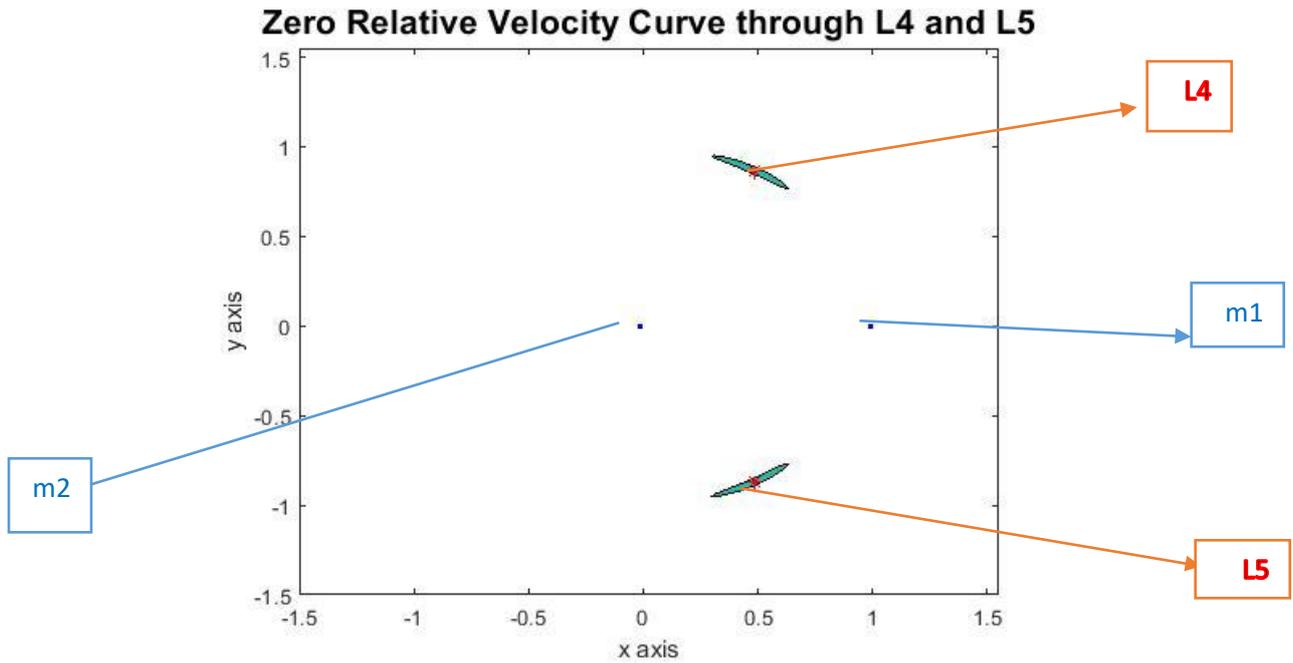
المعادلة

$$(x_4^2 + y_4^2) + 2 \cdot \frac{1 - \mu}{\sqrt{(x_4 + \mu)^2 + y_4^2}} + 2 \cdot \frac{\mu}{\sqrt{(x_4 - 1 + \mu)^2 + y_4^2}} = C_G \quad (64)$$

(وبشكل مشابه لـ L_5) حيث $y_5 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $x_5 = -\mu + 0.5$

يظهر الشكل (٩) الناتج عن استخدام بيئة matlab موقع نقطتا لاغرانج L_4, L_5 الناتج عن المعادلة

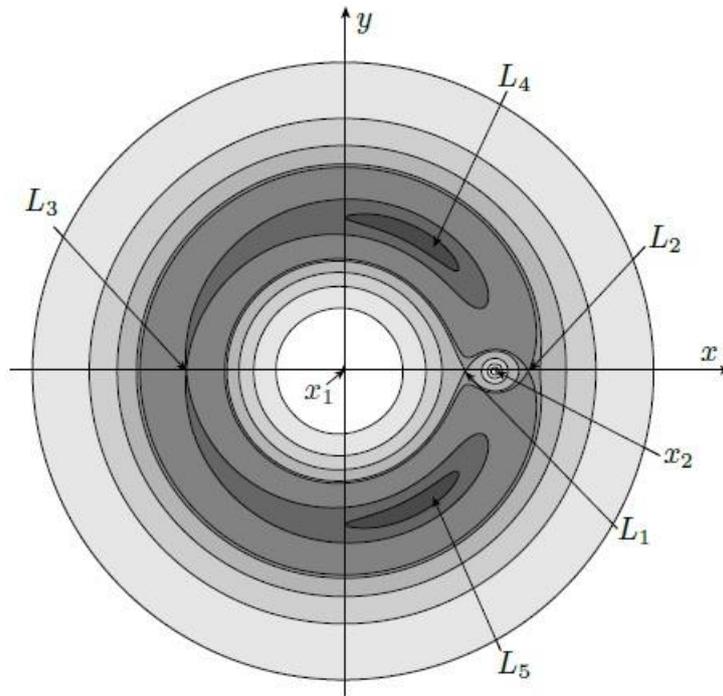
(٦٤)



الشكل (٩): سطح معدوم السرعة بالقرب من نقطتي لاغرانج L_4 و L_5

ونريد الإشارة إلى أن مصطلح " الطاقة " الذي نتعامل معه هو عبارة عن المواضع والسرع في جملة إحداثيات دوارة.

وقمنا بتمييز نقاط التوازن بعلامات نجمية بينما تظهر الأرض والقمر كنقاط صغيرة (m_1 تمثل كتلة القمر و m_2 تمثل كتلة الأرض) وهذه السطوح مشابهة لما تم التوصل إليه من المرجع [17]



الشكل (٥): سطوح السرعة المعدومة لجملة قمر-أرض في المستوى (x, y)

برنامج الـ matlab

```

function zvc(L2)
mu=1/(81.3+1);
if (~exist('zerorelativecontour.mat'))
disp('running')
x=-1.5:.01:1.55;
y=-1.5:.01:1.55;
for i=1:length(x)
for j=1:length(y)
%v^2=(x'^2+y'^2)=(x^2+y^2)+2*(1-mu)/r_1 +2*mu/r_2 -C_G=
Z(j,i)=x(i)^2+y(j)^2+2*(1-mu)/sqrt((x(i)+mu)^2+...
+y(j)^2)+2*mu/sqrt((x(i)-1+mu)^2+y(j)^2);
end
end
save('zerorelativecontour','x','y','Z');
else
load('zerorelativecontour');
end
switch upper('L2')
case 'L1'
x1=.836915;
Csurf= x1^2+2*(1-mu)/abs(x1+mu) +2*mu/abs(x1-1+mu);
case 'L2'
x2=1.15568;
Csurf= x2^2+2*(1-mu)/abs(x2+mu) +2*mu/abs(x2-1+mu);
case 'L3'
x3=-1.00506;
Csurf= x3^2+2*(1-mu)/abs(x3+mu)+2*mu/abs(x3-1+mu);
case {'L4','L5'}
x4=.5-mu;
y4=sqrt(3)/2;
Csurf=x4^2+y4^2+2*(1-mu)/sqrt((x4+mu)^2+y4^2)...
+2*mu/sqrt((x4-1+mu)^2+y4^2)+.001;

```

otherwise

Csurf=isosurf;

end

[c,h]=contourf(x,y,-Z,[-Csurf -Csurf]);

xlabel('x axis'), ylabel('y axis')

الاستنتاجات والتوصيات

• إذا كنا في إطار مرجعي دوار فهناك مدارات دورية لاتتمحور حول أي من الجسمين أو مركزهما المشترك barycenter ولكن بدلاً من ذلك تتمركز هذه المدارات حول نقاط لاغرانج.

• تسمح لنا دراسة هذه الأسطح بتحديد ما إذا كان من الممكن لجسم ما أن ينتقل من الأرض إلى القمر أو ما بعده. أي تحديد سطح السرعة الصفرية، حيث لا يمكن للقمر الصناعي أو الجسم الفلكي العبور من خلال هذه السطوح عديمة السرعة مالم يتجاوز الطاقة U_0 .

$$U_0 = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + y^2) + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}$$

: U_0 طاقة المدار في حالة السرعة معدومة

• نوصي بتطوير هذه الدراسة لتشمل أنظمة أخرى من المجموعة الشمسية ومقارنة النتائج ومدى تغير شكل المنحنيات عديمة السرعة في هذه الحالة وتغير الطاقة اللازمة لكي يتمكن الجسم الأصغر من الهروب من جملة الجسمين.

المراجع

1. R. Bate, D.D. Muller and J.E. White, 1971, *Fundamentals of Astrodynamics*, Dover
2. Pini Gurfil, P, 2016, Kenneth Seidelmann, *Celestial Mechanics and Astrodynamics: Theory and Practice*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg,.
3. Beutler G ,2005, "*Methods of Celestial Mechanics*", Springer
4. Richard Fitzpatrick, 2012, *An Introduction to Celestial Mechanics*, Cambridge University Press,.
5. Jan Vrbik, 2010, *New Methods of Celestial Mechanics*, Bentham Science Publishers,.
6. WORTHINGTON, J. 2012, *A Study of the Planar Circular Restricted Three Body Problem and the Vanishing Twist*, An essay submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of B.Sc. (Honours), Applied Mathematics University of Sydney, 98.
7. MUSIELAK. Z.E ; QUARLES. B. 2015, *The three-body problem*, Department of Physics, The University of Texas at Arlington, 68.
8. KOON, W. 2011, *Dynamical Systems, the Three-Body Problem and Space Mission Design*, California Institute of Technology, 327.
9. SUCARRAT, E. 2012, *The Full Problem of Two and Three Bodies: Application to Asteroids and Binaries*, Surrey Space Centre, UK, 180.
10. GEIGES, H. 2016, *The Geometry of Celestial Mechanics*, Cambridge University Press, 350.
11. R. A. Broucke. 1968, *Periodic Orbits in the Restricted Three-Body Problem with Earth-Moon Masses*, California Institute of Technology.
12. Gerald R. Hintz. 2015, *Orbital Mechanics and Astrodynamics*, Astronautical Engineering Department University of Southern California.
13. Henri Poincaré. 2017, *The Three-Body Problem and the Equations of Dynamics* Translated by Bruce D. Popp, Springer International Publishing AG.
14. J H Grützelius. 2004, *The Three Body Problem*, Karlstad University, December 26.
15. Alain Chenciner. 2012, *Poincaré and the Three-Body Problem*, D'épartement de mathématique, Université Paris VII.
16. dr. Mohey Aldin Nizam ; dr. Nabil Joudieh ; dr. Hammoud ALorabi ; Hanan Amin . 2021, *The Circular restricted three body problem (CR3BP)*, Basic Sciences Series, Volume (42) Number (5), Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies.
17. Hanspeter Schaub ; John L. Junkins, 2009 , *Analytical Mechanics of Space Systems* Second Edition, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 819.