مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (6) العدد (4) 2022

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (6) No. (4) 2022

المعادلات التكاملية لكمونات Nowacki المتوافقة مع الحالة الديناميكية لجسم Koiter–Mindlin الخاضع لحمول حجمية

نضال حسن *

منتجب الحسن**

احمد الخابور***

(تاريخ الإيداع 22/ 6/ 2022 – تاريخ النشر17/ 8/ 2022)

□ ملخّص □

المسألة قيد الدراسة هي مسألة كمونات Nowacki للجسم المرن المتجانس (Homogeneous) والمتماثل المناحي (Isotropic)، والمتساوي درجات الحرارة (Isothermal) ، والمؤلف من نقاط مادية موجهة (Oriented Material Points)، وذي تشوهات مرنة صغيرة (Infinitesimal elastic Strains)، ذلك ضمن نظرية العزوم المعدّلة. وضع الأساس الرياضي لمثل هذا الجسم كلاً من الباحثين: Koiter [3] و Mindlin [4]، والذي سمي فيما بعد باسمهما ورُمز له اختصاراً بالرمز(K–M).

في البداية، سنعرض كلاً من معادلات Lame غير المتجانسة ومعادلات كمونات Nowacki الموافقة ، ذلك لأجل الجسم (K–M) ، الذي يشغل في لحظة البدء، منطقة أحادية الترابط ومحدودة في الفضاء الإقليدي R^3. بعدها باستخدام تحويل Laplace التكاملي ستتحول معادلات Lame ومعادلات كمونات Nowacki من حالتها التحريكية الى الى حالة التوازن لها. وبعد عرض مبرهنتين هامتين، تزودنا بتحويلات تكاملية، سطحية– حجمية، لأجل مؤثري Helmholtz التفاضليين المضاعفين من المرتبتين الأولى والثانية ، من ثم بتطبيقها على معادلات Nowacki وتطبيق تحويل Laplace العكسي [12,13,1,2,6,7] ، سنستنتج المعادلات التكاملية، بكمونات Nowacki الحاكمة للسلوك التحريكي المرن للجسم الصلب المرن من نوع (K–M).

الكلمات المفتاحية: معادلة Helmholtz المضاعفة، كمونات Nowacki – مسألة Lame للجسم المرن، المؤلف من نقاط مادية موجهة، من نوع Koiter–Mindlin بوجود حمول حجمية غير معدومة ،النموذج الرياضي التكاملي للجسم (K–M).

---

* أستاذ في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة طرطوس.

**أستاذ في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة البعث .

*** طالب ماجستير في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة طرطوس.

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (6) العدد (4) 2022

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (6) No. (4) 2022

The System of Integral Equations for Nowacki's potentials corresponding to the solution for the Koiter-Mindlin elastic body with body loads

Dr. Nidal Hasan *
Dr.Mountajab Al-Hasan **
Ahmad Al-Khaboor ***

(Received 22/6/2022.Accepted 17/8/2022)

□ABSTRACT □

The considerable problem is the Nowacki's potential one for the homogeneous, isotropic, and isothermal dynamic elastic body consisting of oriented material points, and of infinitesimal elastic strains in the fame of the couple stress theory. The mathematical foundations of this theory are established by the tow researchers ; Koiter [3], and Mindlin [4], so the body in the frame of this theory called (K-M) model. First, we introduce the Lame equations, and the related Nowacki's potential ones for the (K-M) elastic body, which initial configuration is a bounded, simply connected region in R^3.Then, after demonstrating 2 important theorems, that give volume-surface integral transforms for the first and second order, Helmholtz differential operators, next, applying these integral transforms to Nowacki's Equations, and applying the inverse Laplace integral transform [12,13,1,2,6,7] , we derive system of integral equations governing the considerable (K-M) body.

Key words: The multi Helmholtz Equations-The Nowacki's Potentials, the Lame's problem for the Koiter-Mindlin elastic body consisting of oriented material points, with body loads, The system of Integral Equations for (K-M) body.

* Professor At Department of Mathematics – Faculty of Science – Tartous University.
**Professor At Department of Mathematics–Faculty of Science–Al-Baath University.
***Master Student At Department of Mathematics–Faculty of Science–Tartous University.

1. مقدمة:

ناقش العديد من الباحثين الرياضيين ، مثل Ignaczak و Nowacki (1965) و Kupradse (1963) ، ناقشوا المعادلات التكاملية التي تحكم كمونات Nowacki ، ضمن المرونة الخطية التقليدية المتجانسة، متماثلة المناحي والمتساوية درجات الحرارة، وفي المرونة الخطية، المتجانسة، المتماثلة المناحي، والمترابطة مع حقل حراري (انظر ايضاً[5]) . بعدها ناقش العديد من الباحثين المعادلات التكاملية الحاكمة لأوساط مادية اعقد ، ولكن لأجل حالات خاصة .

سوف نستنتج في البحث نموذج كمونات Nowacki الرياضي التكاملي الحاكم للجسم الصلب المتجانس والمتماثل المناحي من نوع (K−M) .

2. هدف البحث:

يهدف البحث إلى استنتاج النظام المعادلاتي التكاملي الحاكم لكمونات Nowacki لأجل الجسم الصلب المرن (K−M) المتجانس والمتماثل المناحي والذي يشغل في لحظة البدء المنطقة Ω° البسيطة الترابط والمحدودة في الفضاء الاقليدي ثلاثي البعد.

3. طرائق البحث:

سوف نقوم باستنتاج ذاك النظام المعادلاتي الحاكم لكمونات Nowacki للجسم المعتبر باتباع الخطوات التالية التي تمثل تعميماً للخطوات التي استخدمها باحثون سابقون في استنتاج النظام المعادلاتي التكاملي الحاكم لجسم Hooke الابسط:

1−كتابة مسالة كمونات Nowacki للجسم المعتبر (K−M) ،

2− استنتاج المعادلات المنفصلة لكمونات Nowacki للجسم المعتبر(K−M) ،

3− تحويل المسالة المذكورة ومعادلاتها المنفصلة من مسالة تحريك الى مسالة توازن ، باستخدام تحويل Laplace وتطبيقاته ،

4−استخدام مبرهنة هامة تعطينا تحويلاً تكاملياً حجمياً− سطحياً يتعلق بكل من مؤثر Helmholtz التفاضلي البسيط والمضاعف من المرتبة الثانية ،

5− تطبيق المبرهنة السابقة ، ومن ثم تحويل Laplace التكاملي العكسي في استنتاج النظام المعادلاتي التكاملي المطلوب .

ولهذا الغرض، نعتبر الجسم المرن المؤلف من نقاط مادية موَّجهة، وذي التشوهات الصغيرة والمتجانس والمتماثل المناحي، والمتساوي درجات الحرارة، والذي له ثلاث درجات حرية وأربعة ثوابت مادية: $\mu > 0$ و $\lambda > 0$ و $\ell^* \geq 0$ و η (حيث: $|\eta| < 1$) (التي تدعى بثوابت مرونة الجسم)، والمدروس من قبل الباحثين Koiter [3] وMindlin [4] ، والذي نرمز له اختصاراً بـ (K−M). ولأجل هذا الجسم سنفترض أن الحالة البدئية Ω° للجسم هي منطقة بسيطة الترابط، ومحدودة في الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد R^3. كما سنفترض أيضاً أن كافة الحقول الفيزيائية التي تصف الحالة الديناميكية للجسم المرن (K−M)، هي دوال حقيقية ملساء بالقدر الكافي، تتبع لإحداثيات النقاط المادية في Ω° وتتبع ايضاً للزمن t . من أجل متطلبات البحث، سنعرض فيمايلي معادلات Lame للجسم المرن (K−M)، ومعادلات كمونات Nowacki الموافقة لها ([11]).

أ) إن معادلات Lame للجسم المرن (K–M) ، هي جملة المعادلات التفاضلية الجزئية التالية، المحققة في $\Omega^\circ \times]0,\infty[$:

$$\mu u_{i,jj} + (\mu+\lambda) u_{j,ji} + \mu \ell^{*2} \in_{ijk} \in_{knp} u_{p,njss} + + F_i = \rho \ddot{u}_i \tag{3.1}$$

حيث:

$$F_i = X_i + \frac{1}{2} \in_{ijk} Y_{k,j} \tag{3.2}$$

حيث $\vec{u} \equiv (u_1, u_2, u_3)$ و $\vec{X} \equiv (X_1, X_2, X_3)$ و $\vec{Y} \equiv (Y_1, Y_2, Y_3)$ على الترتيب، تمثل المركبات الديكارتية في النظام الإحداثي الديكارتي $O x_1 x_2 x_3$، لكلٍ من متجه الإزاحة $\vec{u}$ لنقطة مادية لاغرانجية $x \equiv (x_1, x_2, x_3)$ من الجسم المرن (K–M)، ولمتجه القوة الحجمية $\vec{X}$، ولمتجه العزم الحجمي $\vec{Y}$ ، في هذه النقطة المادية اللاغرانجية. كما أن: $\in_{ijk}$ هي المركبات في النظام الاحداثي الديكارتي المعتبر، لنصف تنسور Levi–Civita، و $\rho > 0$ هي الكثافة الحجمية للجسم (وهي كمية ثابتة لأن الجسم متجانس)، كما أن الأدلة اللاتينية .... $i\ ,\ j\ ,\ k\ ,$ تأخذ القيم $1\ ,\ 2\ ,\ 3$ ، حيث سنستخدم رموز Einstein (اتفاقية الجمع على الأدلة المكررة). كما أن النقطة تدل على المشتق الجزئي بالنسبة للزمن و $\partial_t := \dfrac{\partial}{\partial t}$ و $\partial_t^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$.

من أجل متطلبات هذا البحث، سنكتب فيمايلي معادلات Lame (3.1)، بدلالة المؤثر الاشتقاقي الديناميكي: $\square_0 := \left(\ell^{*2} \nabla^2 - 1 \right) \nabla^2 + \dfrac{1}{\hat{c}_2^2} \partial_t^2$ ، حيث: $\hat{c}_2 := \sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}}$ ، و ∇^2 يمثل مؤثر Laplace الاشتقاقي السلمي ثلاثي الأبعاد، الذي يعطى في النظام الاحداثي الديكارتي المعتبر بالعلاقة: $\nabla^2 (\cdots) = \dfrac{\partial}{\partial x_i} \dfrac{\partial}{\partial x_i} (\cdots) = (\cdots)_{,ii}$.

إلى المعادلات (3.1) نضيف الشروط الحدية والابتدائية التالية :

– الشروط الحدية المحققة على $\partial \Omega^\circ \times [0,\infty[$:

$$u_i = h_i \ , \qquad \varphi_\alpha^0 = k_\alpha \tag{3.3}$$

حيث φ_α^0 $(\alpha = 1, 2)$ هي مركبات متجه الدوران $\vec{\varphi}$، الواقعة في المستوي المماس لـ $\partial \Omega^\circ$، أما الدوال الحقيقية: $h_i , k_\alpha : \partial \Omega^\circ \times [0,\infty[\to R$ فهي معلومة.

– الشروط الابتدائية المحققة في $\Omega^\circ \times \{0\}$:

$$u_i = f_i \ , \quad \dot{u}_i = g_i \tag{3.4}$$

حيث الدوال الحقيقية التالية معطاة : $f_i , g_i : \Omega^\circ \to R$. بما أن:

$$\in_{ijk} \in_{knp} = \delta_{jp} \delta_{in} - \delta_{jn} \delta_{ip} \tag{3.5}$$

فتأخذ بذلك المعادلة (3.1) الشكل التالي في $\Omega^{\circ} \times]0,\infty[$:

$$\mu u_{i,jj} + (\mu+\lambda) u_{j,ji} + \mu \ell^{*2} (u_{j,jiss} - u_{i,jjss}) + \\ + F_i = \rho \ddot{u}_i \tag{3.6}$$

أو:

$$(\mu \nabla^2 u_i - \mu \ell^{*2} \nabla^2 \nabla^2 u_i - \rho \ddot{u}_i) + \\ + \left[(\mu+\lambda) u_{j,ji} + \mu \ell^{*2} \nabla^2 u_{j,ji} \right] + F_i = 0 \tag{3.7}$$

وبالتبسيط والاختصار، نحصل على المعادلة الاشتقاقية التالية، في $\Omega^{\circ} \times]0,\infty[$:

$$-\mu \square_0 u_i^* - \mu \left(\frac{1}{2\nu - 1} - \ell^{*2} \nabla^2 \right) u^*_{j,ji} + F_i^* = 0 \tag{3.8}$$

بالتالي نحصل على المعادلة الاشتقاقية التالية، المحققة في $\Omega^{\circ} \times]0,\infty[$:

$$\square_0 u_i + \left(\frac{1}{2\nu - 1} - \ell^{*2} \nabla^2 \right) u_{j,ji} - \frac{1}{\mu} F_i = 0 \tag{3.9}$$

حيث: $\nu := \dfrac{\lambda}{2(\mu+\lambda)}$ هي نسبة Poisson.

ب) معادلات كمونات Nowacki للجسم المرن (K-M):

وفقاً لمبرهنة Stokes –Helmholtz ، كتب Nowacki ، الازاحات u_i والحمول الحجمية F_i بالشكل التالي في $\Omega^{\circ} \times]0,\infty[$:

$$u_i = \Phi_{,i} + \epsilon_{ijk} \psi_{k,j} \quad , \text{ such that } \psi_{k,k} \tag{3.10}$$

$$F_i = \rho \left(\upsilon_{,i} + \epsilon_{ijk} \chi_{k,j} \right), \text{ such that } \chi_{k,k} \tag{3.11}$$

حيث: Φ و $\vec{\psi} \equiv (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ ، على الترتيب، هما كمونا Nowacki المجهولين، السلمي والمتجهي، كما أن: υ و $\vec{\chi} \equiv (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$ ، على الترتيب، هما كمونا Nowacki المعلومين، السلمي والمتجهي. أخيراً ندعو الجزء $\Phi_{,i}$ (الجزء $\rho \upsilon_{,i}$)

بالجزء الكموني لـ u_i (لـ F_i)، كما ندعو الجزء $\epsilon_{ijk} \psi_{k,j}$ (الجزء $\rho \epsilon_{ijk} \chi_{k,j}$)، بالجزء الدوّار لـ u_i (لـ F_i). لإيجاد معادلات الحقل الاشتقاقية بتوابع كمون Nowacki، المجهولة: $\vec{\psi}$ و Φ، وفقاً لطريقة كموناتNowacki، نعوض (3.10) و(3.11) في معادلات Lame (3.9)، فنحصل على المعادلة التفاضلية التالية المحققة في $\Omega^{\circ} \times]0,\infty[$:

$$\square_0\left(\Phi_{,i}+\in_{ijk}\psi_{k,j}\right)+\left(\frac{1}{2\nu-1}-\ell^{*2}\nabla^2\right)\left(\nabla^2\Phi_{,i}+0\right)-\frac{1}{\hat{c}_2^2}\left(\upsilon_{,i}+\in_{ijk}\chi_{k,j}\right)=0 \tag{3.12}$$

أو:

$$\left\{\left[\square_0+\left(\frac{1}{2\nu-1}-\ell^{*2}\nabla^2\right)\nabla^2\right]\Phi-\frac{1}{\hat{c}_2^2}\upsilon\right\}_{,i}+ +\in_{ijk}\left(\square_0\psi_k-\frac{1}{\hat{c}_2^2}\chi_k\right)_{,j}=0 \tag{3.13}$$

وبما أن:

$$\square_0+\left(\frac{1}{2\nu-1}-\ell^{*2}\nabla^2\right)\nabla^2=-\frac{1}{\mu}\square_1$$

حيث: $\square_1 := (\lambda+2\mu)\nabla^2-\rho\,\partial_t^2$ ، فتأخذ المعادلة السابقة الشكل التالي في $]0,\infty[\times\Omega^\circ$:

$$\left(\square_1\Phi+\rho\upsilon\right)_{,i}+ +\in_{ijk}\left[-\mu\left(\square_0\psi_k-\frac{1}{\hat{c}_2^2}\chi_k\right)\right]_{,j}=0 \tag{3.14}$$

الآن، وفقاً لـ Nowacki ، فإن (3.14) تكون محققة ، إذا حققت كمونات Nowacki : $\vec{\psi}$ و Φ، معادلات الحقل التالية في $]0,\infty[\times\Omega^\circ$:

$$\square_1\Phi+\rho\upsilon=0\,,\qquad \square_0\psi_k-\frac{1}{\hat{c}_2^2}\chi_k=0 \tag{3.15}$$

ندعوا المعادلتين (3.15) بمعادلتي كمونات Nowacki للجسم المرن (K–M) ، المتجانس والمتماثل المناحي والمتساوي درجات الحرارة، والذي يشغل في لحظة البدء، المنطقة بسيطة الترابط وغير المحدودة Ω°.

فيما يلي سوف نقوم باستنتاج الشروط الحدية والابتدائية التي يجب ان نضيفها الى معادلتي كمونات Nowacki السابقتين:

ينتج عن (3.10) وعن كون أن و متجه الدوران للجسم يعطى بـ:

$$\varphi_i=\frac{1}{2}\in_{ijk}u_{k,j}$$

أن:

$$\varphi_i=\frac{1}{2}\in_{ijk}\left(\Phi_{,kj}+\in_{kmn}\psi_{n,mj}\right)$$

او :

$$\varphi_i = \frac{1}{2}\left(\in_{ijk} \Phi_{,kj} + \in_{ijk} \in_{kmn} \psi_{n,mj} \right) \tag{3.16}$$

وبما ان :

$$\in_{ijk} \Phi_{,kj} = 0 \quad \text{(بسبب الخاصة التناظرية)} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned} \in_{ijk} \in_{kmn} \psi_{n,mj} &= \in_{ijk} \in_{kmn} \psi_{n,mj} = \\ -\in_{kji} \in_{kmn} \psi_{n,mj} &= -\left(\delta_{jm}\delta_{in} - \delta_{jn}\delta_{im}\right)\psi_{n,mj} \\ = -\left(\psi_{i,jj} - \psi_{j,ji}\right) &= \psi_{j,ji} - \psi_{i,jj} = 0 - \nabla^2 \psi_i = \\ &= -\nabla^2 \psi_i \end{aligned} \tag{3.18}$$

فتصبح (3.17) بالشكل :

$$\varphi_i = \frac{1}{2}\left(\in_{ijk} \Phi_{,kj} + \in_{ijk} \in_{kmn} \psi_{n,mj} \right) = -\frac{1}{2}\nabla^2 \psi_i$$

وبالتالي بالشكل المتجهي يصبح لدينا :

$$\vec{\varphi} = -\frac{1}{2}\nabla^2 \vec{\psi} \tag{3.19}$$

وبناءً على ما تقدم ذكره تصبح الشروط الحدية بكمونات Nowacki بالشكل التالي :

$$\Phi_{,i} + \in_{ijk} \psi_{k,j} = h_i \ , \qquad \varphi_\alpha^0 = k_\alpha \tag{3.20}$$

حيث φ_α^0هما مركبتا جزء المتجه: $\vec{\varphi} = -\frac{1}{2}\nabla^2 \vec{\psi}$ المماس في النقطة المادية Pواللحظة $t \in [0, \infty[$ للسطح $\partial\Omega^\circ \times$.

- الشروط الابتدائية المحققة في $\Omega^\circ \times \{0\}$:

للحصول على هذه الشروط نستفيد من (3.10) ومن مبرهنة Stocks−Helmholtz [11] مرة ثانية بكتابة الشروط الابتدائية (3.4) ، فنحصل على الشروط الابتدائية التالية

$$\begin{aligned} \Phi_{,i} + \in_{ijk} \psi_{k,j} &= f_i = \Phi^0_{,i} + \in_{ijk} \psi^0_{k,j} \ , \\ \dot{\Phi}_{,i} + \in_{ijk} \dot{\psi}_{k,j} &= g_i = \dot{\Phi}^0_{,i} + \in_{ijk} \dot{\psi}^0_{k,j} \ , \end{aligned} \tag{3.21}$$

حيث الدوال: $\Phi^0, \dot{\Phi}^0, \psi^0_k, \dot{\psi}^0_k : \Omega^\circ \to R$ يمكن اعتبارها معلومة ؛ حيث يمكن أن تحسب من العلاقتين السابقتين .

مبرهنة مساعدة[5,8,9,10]:

إذا كانت لدوال الحقيقية Vو Wملساء بالقدر الكافي في $\overline{\Omega}^0$ ($\overline{\Omega}^0 = \Omega^0 \cup \partial\Omega^0$) ، عندئذٍ لدينا القضيتين التاليتين :

أولاً : لتكن لدينا معادلة Helmholtz التفاضلية التالية المحققة في Ω^0:

$$\square_{iC}^2 W(\boldsymbol{x}) = -P(\boldsymbol{x}) \qquad (3.22)$$

حيث: $\square_C^2 = \nabla^2 + C^2$ مؤثر Helmholtz البسيط (من المرتبة الأولى) و $W(\boldsymbol{x})$ الدالة المجهولة و $P(\boldsymbol{x})$ دالة معطاة. عندئذٍ المعادلة السابقة تكافئ في Ω^0، المعادلة التكاملية (انظر [5]):

$$\begin{aligned} W(\xi) = {} & \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega^0} P(\boldsymbol{x})\frac{e^{-CR}}{R}\, d\Omega^0(\boldsymbol{x}) + \\ & + \frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega^0} \Big[\frac{e^{-CR}}{R}\frac{\partial W}{\partial n}(\boldsymbol{x}) \\ & - W(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial n}\Big(\frac{e^{-CR}}{R}\Big)\Big]\, dS(\boldsymbol{x}) \end{aligned} \qquad (3.23)$$

حيث: $\boldsymbol{x}, \xi \in \Omega^0$ و $R = |\boldsymbol{x} - \xi|$، أما $\dfrac{\partial W}{\partial n}$ فهو مشتق W وفق متجه واحدة الناظم $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ على السطح $\partial\Omega^0$ والموجَّه نحو خارج $\partial\Omega^0$؛ ($\dfrac{\partial W}{\partial n} = \vec{n}\,.\,\overrightarrow{grad}\,W = n_i\dfrac{\partial W}{\partial x_i}$) ،

ثانياً: لتكن لدينا معادلة Helmholtz التفاضلية المضاعفة من المرتبة التالية،المحققة في Ω^0:

$$\square_{iC_1}^2 \square_{iC_2}^2 V(\boldsymbol{x}) = -H(\boldsymbol{x}) \qquad (3.24)$$

حيث $V(\boldsymbol{x})$ دالة سلمية مجهولة و $H(\boldsymbol{x})$ دالة سلمية معلومة في Ω^0 ، أما C_1 و C_2 فهما عددان عقديان اختياريان.

عندئذٍ المعادلة التفاضلية (3.24) تكافئ المعادلة التكاملية التالية في Ω^0:

$$\begin{aligned} 4\pi(C_1^2 - C_2^2)V(\xi) = {} & \int_{\Omega^0} \frac{e^{-C_1R} - e^{-C_2R}}{R} H(\boldsymbol{x})\, d\Omega^0(\boldsymbol{x}) + \\ & + \int_{\partial\Omega^0} \Big\{ \frac{e^{-C_1R} - e^{-C_2R}}{R}\frac{\partial}{\partial n}[\square_{iC}^2 V(\boldsymbol{x})] \\ & - [\square_{iC}^2 V(\boldsymbol{x})]\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{-C_1R} - e^{-C_2R}}{R} + \\ & + \frac{C_1^2 e^{-C_1R} - C_2^2 e^{-C_2R}}{R}\frac{\partial V}{\partial n}(\boldsymbol{x}) \\ & - V(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial n}\frac{C_1^2 e^{-C_1R} - C_2^2 e^{-C_2R}}{R}\Big\}\, dS(\boldsymbol{x}) \end{aligned} \qquad (3.25)$$

حيث: $C^2 = C_1^2 + C_2^2$.

4. النتائج والمناقشة:

1–تحويل المسالة السابقة والمعادلات المنفصلة المتعلقة بها من تحريك الى توازن :

بتطبيق مؤثر Laplace التكاملي ([12,13]):

$$\bar{\vec{F}}(\boldsymbol{x},s) := \pounds[\vec{F}(\boldsymbol{x},t)] := \int_0^\infty \vec{F}(\boldsymbol{x},t)\ e^{-st}\,dt$$

(حيث: $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$) ، وبالاستفادة من الخاصة التالية من خواص هذا المؤثر:

$$\pounds[\ddot{f}(t)] = s^2 F(s) - (a + s\,b)$$

حيث : $f(0) = a$ و $\dot{f}(0) = b$ ، $F(s) = \pounds[f(t)]$ ،

تتحول كمونات Nowacki التحريكية الى مسالة التوازن التالية:

$$\begin{aligned}
&\left[\nabla^2 - \sigma_1^2(s)\right]\bar{\Phi} = -\frac{1}{c_1^2}\left[\rho\,\upsilon + (\Phi^0 + s\,\dot{\Phi}^0)\right],\\
&\left[\left(\nabla^2 - \ell^{*-2}\right)\nabla^2 + \frac{\hat{\sigma}_2^2(s)}{\ell^{*2}}\right]\bar{\psi}_k = \frac{1}{\ell^{*2}}\left[\frac{1}{\hat{c}_2^2}\chi_k + \hat{\sigma}_2^2(s)(\psi_k^0 + s\,\dot{\psi}_k^0)\right]
\end{aligned} \tag{4.1}$$

او :

$$\begin{aligned}
&\left[\nabla^2 - \sigma_1^2(s)\right]\bar{\Phi}(\mathbf{x},s) = -A(\mathbf{x},s),\\
&\left[\left(\nabla^2 - \ell^{*-2}\right)\nabla^2 + \frac{\hat{\sigma}_2^2(s)}{\ell^{*2}}\right]\bar{\psi}_k = -B_k(\mathbf{x},s)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

حيث :

$$\begin{aligned}
&A(\mathbf{x},s) = \frac{1}{c_1^2}\left[\rho\,\upsilon + (\Phi^0 + s\,\dot{\Phi}^0)\right],\\
&B_k(\mathbf{x},s) = -\frac{1}{\ell^{*2}}\left[\frac{1}{\hat{c}_2^2}\chi_k + \hat{\sigma}_2^2(s)(\psi_k^0 + s\,\dot{\psi}_k^0)\right]
\end{aligned} \tag{4.3}$$

لدينا :

$$\nabla^2 - \sigma_1^2(s) = \Box^2_{i\,\sigma_1(s)} \tag{4.4}$$

واذا فرضنا ان:

$$\begin{aligned}
\left(\nabla^2 - \ell^{*-2}\right)\nabla^2 + \frac{\hat{\sigma}_2^2(s)}{\ell^{*2}} &= \left[\nabla^2 - \lambda_1^{*2}(s)\right]\left[\nabla^2 - \lambda_2^{*2}(s)\right] =\\
&= \Box^2_{i\,\lambda_1^*(s)}\Box^2_{i\,\lambda_2^*(s)}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

حيث : $i = \sqrt{-1}$ ، أما $\lambda_1^*(s)$ و $\lambda_2^*(s)$ فهما صفرا كثير الحدود من الدرجة الرابعة :

$$\Delta_4^*(\lambda^*;s) = \lambda^{*4} - \ell^{*-2}\,\lambda^{*2} + \frac{\hat{\sigma}_2^2(s)}{\ell^{*2}} \tag{4.6}$$

بالتالي يحققان علاقتا فييت التاليتان:

$$\lambda_1^{*2}(s) + \lambda_2^{*2}(s) = \ell^{*-2} , \lambda_1^{*2}(s)\, \lambda_1^{*2}(s) = \frac{\hat{\sigma}_2^2(s)}{\ell^{*2}} \qquad (4.7)$$

وبذلك تصبح معادلتا التوازن (4.2) بالشكل النهائي التالي في Ω^0 :

$$\begin{aligned} &\square^2_{i\,\sigma_1(s)} \bar{\Phi}(\mathbf{x},s) = -A(\mathbf{x},s) , \\ &\square^2_{i\,\lambda_1^*(s)} \square^2_{i\,\lambda_2^*(s)} \bar{\psi}_k = -B_k(\mathbf{x},s) \end{aligned} \qquad (4.8)$$

نظام المعادلات التكاملية الحاكم لكمونات Nowacki للجسم المعتبر(K–M) :

للحصول على هذا النظام نطبق المبرهنة السابقة على جملة معادلتي Nowacki *التفاضليتين* (4.8) *باتباع مايلي :*

أ) بتطبيق العلاقة التكاملية(3.23) على المعادلة الأولى في (4.8) نحصل مباشرة على المعادلة التكاملية :

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(\xi,s) = &\frac{1}{4\pi}\int_{\Omega^0} A(\mathbf{x},s)\frac{e^{-\sigma_1(s)R}}{R}\, d\,\Omega^0(\boldsymbol{x}) + \\ &+\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega^0} [\ \frac{e^{-\sigma_1(s)R}}{R}\ \frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial n}(\boldsymbol{x},s) \\ &- \bar{\Phi}(\boldsymbol{x},s)\ \frac{\partial}{\partial n}(\frac{e^{-\sigma_1(s)R}}{R})\ ]\ d\,S(\boldsymbol{x}) \end{aligned} \qquad (4.9)$$

ب) بتطبيق العلاقة التكاملية(3.25) على المعادلة الثانية في (4.8) نحصل مباشرة على المعادلة التكاملية :

$$\begin{aligned} 4\pi[\lambda_1^{*2}(s)-\lambda_2^{*2}(s)]\,\bar{\psi}_k(\xi,s) = &\int_{\Omega^0}\frac{e^{-\lambda_1^*(s)R} - e^{-\lambda_2^*(s)R}}{R}\, B_k(\boldsymbol{x},s)\, d\,\Omega^0(\boldsymbol{x}) + \\ &+\int_{\partial\Omega^0}\{\frac{e^{-\lambda_1^*(s)R} - e^{-\lambda_2^*(s)R}}{R}\ \frac{\partial}{\partial n}[\ \square^2_{i\,\lambda^*(s)}\bar{\psi}_k(\boldsymbol{x},s)\ ] \\ &-[\ \square^2_{i\,\lambda^*(s)}\bar{\psi}_k(\boldsymbol{x},s)\ ]\ \frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{-\lambda_1^*(s)R} - e^{-\lambda_2^*(s)R}}{R} + \\ &+\frac{\lambda_1^{*2}e^{-\lambda_1^*(s)R} - \lambda_1^{*2}e^{-\lambda_2^*(s)R}}{R}\ \frac{\partial\bar{\psi}_k}{\partial n}(\boldsymbol{x},s) \\ &-\bar{\psi}_k(\boldsymbol{x},s)\ \frac{\partial}{\partial n}\frac{\lambda_1^{*2}e^{-\lambda_1^*(s)R} - \lambda_1^{*2}e^{-\lambda_2^*(s)R}}{R}\ \}\, d\,S(\boldsymbol{x}) \end{aligned} \qquad (4.10)$$

حيث

$C^2 = \lambda_1^{*2} + \lambda_2^{*2} = \ell^{*-2}$.

تمثل المعادلتان (4.9) و(4.10) نظام معادلات التكاملية الحاكم لتحويلات $\bar{\Phi}(\xi,s)$ Nowacki و $\bar{\psi}_k(\xi,s)$.

نضيف الى جملة هاتين المعادلتين الشروط الحدية التالية الناتجة عن تطبيق مؤثر Laplace على الشروط الحدية (3.20):

$$\bar{\Phi}_{,i} + \epsilon_{ijk}\,\bar{\psi}_{k,j} = \bar{h}_i \,, \qquad \bar{\varphi}^0_\alpha = \bar{k}_\alpha \qquad (4.11)$$

تمثل (4.9) و(4.10) و(4.11) النموذج الرياضي التكاملي الحاكم لتحويلات Nowacki $\bar{\Phi}(\xi,s)$ و $\bar{\psi}_k(\xi,s)$.

آلية حل المسالة :بحل المسالة التكاملية (4.9) و(4.10) و(4.11) نحصل على تحويلات Nowacki $\bar{\Phi}(\xi,s)$ و $\bar{\psi}_k(\xi,s)$. بعدها بتطبيق تحويل Laplace العكسي على هذه التحويلات المعلومة ، نحصل على كمونات Nowacki $\Phi(\mathbf{X},t)$ و $\psi_k(\mathbf{X},t)$. بالتعويض في الصيغة (3.10) نحصل على الازاحات $u_i(\mathbf{X},t)$.

5. الاستنتاجات والمقترحات:

أولاً: الاستنتاجات: في البحث تم استنتاج النموذج الرياضي التكاملي الحاكم لسلوك كمونات Nowacki الذي يصف الجسم المرن (K–M) المدروس الخاضع للقوى الحجمية المعممة F_i ، والذي يعتبر اسهل من النموذج الرياضي التفاضلي الحاكم لهذه الكمونات المذكورة ، وتكمن الصعوبة هنا بكون ان المعادلات التفاضلية الجزئية الموجودة في هذا النموذج من المرتبة الرابعة .

ثانياً: المقترحات: فيمايلي يمكن أن نقترح المسائل التالية، الجديدة ،للمناقشة:

المسألة الأولى: اذا كان حقل الازاحة المتجهي $\vec{u}(\mathbf{X},t)$ كمونياً ،أي ان دورانه معدوم عندئذ يؤول النموذج الرياضي التكاملي فقط الى المعادلة التكاملية:

$$\bar{\Phi}(\xi,s) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega^0} A(\mathbf{x},s)\,\frac{e^{-\sigma_1(s)R}}{R}\,d\,\Omega^0(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega^0}\Big[\frac{e^{-\sigma_1(s)R}}{R}\,\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial n}(\boldsymbol{x},s) - \bar{\Phi}(\boldsymbol{x},s)\,\frac{\partial}{\partial n}\Big(\frac{e^{-\sigma_1(s)R}}{R}\Big)\Big]\,d\,S(\boldsymbol{x})$$

اضافةً الى الشرط الحدي التالي : $\bar{\Phi}_{,i} = \bar{h}_i$

وهي مسالة تكاملية حلها اسهل من حل المسالة فيما لو كانت المعادلات اشتقاقية جزئية.

وهنا نوصي بحل هذه المسالة التكاملية .

المسألة الثانية: إعادة ما تقدم ذكره عندما يكون حقل الإزاحات المتجهي دوّار ؛ أي ان الجزء الكموني لحقل الازاحة المتجهي معدوماً.

المسألة الثالثة: إعادة نفس الدراسة (أي استنتاج النموذج التكاملي الحاكم لكمونات Nowacki) لاجل جسم صلب اكثر تعقيدياً يتمثل بالجسم الصلب دقيق الاستقطاب من نوع Eringen – Nowacki.

المراجع

[1]- Hetnarski, R.B., Ignaczak, J., Eslami, M.R., Noda, N., Sumi, N., and Tanigawa, Y.,**2013** - *Theory of Elasticity and Thermal Stresses*, Springer Science+Business Media Dordrecht.

[2] – Hetnarski, R.B., and Ignaczak, J., **2011** - *The Mathematical Theory of Elasticity , Second Edition* , CRC Press,Taylor & Francis Group,6000 Broken Sound Parkway NW, Suite 300,Boca Raton, FL 33487-2742**.**

[3]- Koiter ,W.T. , **1964** – *Couple-Stresses in the theory of elasticity, Koninkl*. Nederl. Akad .Van Wetensehappen. Proc . Ser . 8,1-1964 , 67 ,1,17;1964,67,1,30 .

[4]- Mindlin , R.D. , **1963** – *Influence of couple-Stresses on stress concentration* , Exper . Mech .,1963,3,1.

[5]- Kamel Mouhamad, Mountajab Al-Hasan, **2011** – *An integral – differential mathematical model of elastic body in the frame of linear dynamic thermoelasticity*, Journal of Al-Baath Uni-versity,Vol.33, Nr.25, p.119 -148.

[6]- Rasha Tulemat , **2010** – *Transforming the Partial Differential Equations of Elastic Body into Integral Equations on Spherical Surface*, **Dissertation** , Faculty of Science , Al-Baath University.

[7]-Taleb Gareeba, Mountajab Al-Hasan , Rasha Tulemat , **2009** – *Using volume – surface transforms for translating the differential equations of elastic body into integral equations,* , Journal of Al-Baath University,Vol.31, Nr.20, p.175 -192.

[8]- kupradse , Gegelya ,Bashelishili , Burchuladse, **1968** & **1976** – *Three Dimensional Problems of The Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity* , Izd.Nauka.Moscow. J.Ela.**2**,307-321.

[9]- Ignaczak i Nowacki, **1965** -*Osobliwe równania całkowe termosprężystości, Rosprawe Inżynierski*e,**13(1965)**,655-670.

[10]-Kupradse , **1963** - *Dynamical problems in elasticity* , Progress in Solid Mech.,vol.3,North-Holland Publ.Co.,Amsterdam.

[11]-Nowacki , **1970** - *Theory of Elasticity* , Warsaw PWN.

[12] – Gerrit van Dijk , **2013** - *Distribution Theory , De Gtuyter Graduate Lectures*, Deutsche Nationalbibliothek , Berlin.

[13] – Debnath , L & Bhatta , D , **2007** – *Integral Transforms and their Applications, (* Second Edition), CRC Press, Boca Raton, Florida.