مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (6) العدد (2) 2022

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (6) No. (2) 2022

كمون شحنة نقطية في طبقة رقيقة

د. آصف محسن يوسف*

(تاريخ الإيداع 21/2/ 2022 – تاريخ النشر 11 /4/ 2022)

□ ملخّص □

حساب كمون الحجب والكمون غير المحجوب لشحنة نقطية في طبقة نصف ناقل رقيقة سماكتها اقل من طول موجة دي بروي، ودراسة دور ثابتة العازلية الكهربائية، وسماكة الطبقة على كمون الحجب.

حساب طاقة التأثير للشحنات النقطية في معظم المسائل المتعلقة بدراسة فيزياء الأفلام الرقيقة(الطبقات الرقيقة). يختلف في جملة فراغية متجانسة كمون الحجب عن كمون الحجب في فلم رقيق، ففي الفلم الرقيق يكون الكمون ثنائي البعد، أي تكون حركة حاملة الشحنة في مستوي الفيلم (xy) حرة، وتكون الحركة وفق البعد الثالث(z) العمودي على الفيلم مكمّمة. كما تبين أن تأثير كمون كولوم للشحنة يزداد بشكل كبير بإنقاص سماكة الفيلم عندما تكون العازلية الكهربائية لمادة الفيلم أكبر من العازلية الكهربائية للوسط المحيط بالفيلم.

تنقص ظاهرة الحجب في فيزياء الحقول الكهربائية الناتجة عن حوامل الشحنات الكهربائية المتحركة، وتعبر عن ظاهرة هامة لسلوك حاملة الشحنة في السوائل، مثل الغازات المؤينة(البلازما الكلاسيكية)، الشوارد، وحاملات الشحنة في النواقل الالكترونية(إنصاف النواقل، المعادن).

كلمات مفتاحيه:كمون الحجب، أفلام رقيقة، ظاهرة التماس، قوى الخيال الكهربائي، ثابتة العازلية الكهربائية، كمون كولون، كمون التأثير الذاتي.

*استاذ مساعد في قسم الفيزياء –كلية العلوم –جامعة تشرين–اللاذقية – سوريا

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (6) العدد (2) 2022

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (6) No. (2) 2022

Point charge potential in a thin layer

Dr. asef M. Youssef*

(Received 21/2/2022.Accepted 11/4/2022)

□ABSTRACT □

Calculation of the screened potential and the unscreened potential of a point charge in a thin semiconductor layer whose thickness is less than the de Broglie wavelength, and the study of the role of the dielectric constant, and the thickness of the layer on the layer potential.

Knowing the effective energy of point charges in most problems related to the study of thin film physics (thin layers). It differs in a homogeneous spatial system from the screening potential in a thin film. In a thin film, the potential is two-dimensional, that is, the movement of the charge carrier in the plane of the film (xy) is free, and the movement according to the third dimension (z) perpendicular to the film is quantified. It was also found that the effect of the Coulomb potential of the charge increases significantly by decreasing the thickness of the film when the dielectric constant of the film material is greater than the dielectric constant of the medium surrounding the film.

In physics, screening is the damping of electric fields caused by the presence of moving charge carriers. It is an important part of the behavior of charge-carrying fluids, such as ionized gases (classical plasmas), electrolytes, and charge carriers in electronic conductors (semiconductors, conductors).

Keywords:screened potential, thin films, contact effect, Image electric forces, dielectric constant, Coulomb potential, Self-Action potential.

*Assistant Prof. at physics department – Faculty of science –tishreen university – Lattakia - Syria

مقدمة :

يسبب الحجب (screening) في الفيزياء تقليل المجال الكهربائي لحوامل الشحنة المتحركة، وتُعتبر هذه الظاهرة هامة في سوائل حاملات الشحنة، مثل الغازات المتأنية (البلازما الكلاسيكية)، والكترونات الناقلية في أشباه الموصلات، والمعادن. يتفاعل كل زوج من الشحنات في سائل مكون من جسيمات مشحونة وفق قانون كولوم التالي:

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon |r|^2}\hat{r}$$

يُعبر المتجه **r** عن الموضع النسبي بين الشحنات. يُعقد هذا التفاعل المعالجة النظرية للسائل، وتكمن الصعوبة في حقيقة أنه على الرغم من تقلص قوة كولوم مع المسافة مثل $\frac{1}{r^2}$ ، فإن متوسط عدد الجسيمات عند كل مسافة r يتناسب مع r^2 ، على افتراض أن السائل متماثل المناحي إلى حد ما. نتيجة لذلك، فإن اهتزاز الشحنة عند أي نقطة له تأثيرات غير مهمة على مسافات كبيرة.

يتم في الواقع، إيقاف هذه التأثيرات بعيدة المدى بوساطة تدفق الجسيمات استجابة للمجالات الكهربائية. يقلل هذا التدفق من التفاعل الفعّال بين الجسيمات إلى تفاعل كولوم قصير المدى "محجوب"(screened) [١]).

بفرض أن سائل من الالكترونات، ينتج عن كل إلكترون مجال كهربائي، يدفع هذا المجال الالكترونات الأخرى، ويحصل بالنتيجة أن لإلكترون يصبح في منطقة محاط بإلكترونات كثافتها أقل من الحالة الطبيعية. يمكن اعتبار هذه المنطقة شحنة موجبة "ثقب محجوب" (screening hole)، لهذا الثقب المحجوب تأثير شحنة موجبة مغطية، وتلغي المجال الكهربائي الناتج عن الإلكترون، ويمكن فقط على مسافات قصيرة داخل منطقة الثقب اكتشاف مجال الإلكترون [2].

تناولت المعالجة النظرية الأولى للحجب الكهروستاتيكي، التي أجراها بيتر ديباي، وايرش هيوكل **(Peter Debye and Erich Hückel)**، شحنة نقطية ثابتة موجودة في سائل[٣].

حيث افترضا أن سائل من الإلكترونات في خلفية من الأيونات الثقيلة موجبة الشحنة. ومن أجل التبسيط تم تجاهل الحركة والتوزيع المكاني للأيونات، وتم تقريبها كشحنة خلفية موحدة. هذا التبسيط مسموح به لأن الإلكترونات أخف وزنا وأكثر قدرة على الحركة من الأيونات، بشرط أن تُعتبر المسافات أكبر بكثير من الفصل الأيوني، وقد تمت الإشارة إلى هذا النموذج في فيزياء المادة المكثفة بالهلام.

أهمية البحث وأهدافه

تأتي أهمية هذا البحث من كونه يدرس تأثير طاقة كمون الحجب، والكمون غير الحجوب لحاملة شحنة في طبقة رقيقة، ودراسة تأثير دور ثابتة العازلية الكهربائية للطبقة، وللوسط المحيط بها على ذلك الكمون، وكذلك دراسة تأثير سماكة الطبقة على الكمون، بهدف الحصول على عبارة الكمون لحاملة الشحنة تمهيداً لتعويضه في معادلة شرودنجر، ومن ثم حلها من أجل ذلك الكمون، والحصول على طاقة حاملة الشحنة، وبعد ذلك مناقشة المعاملات المؤثرة على تلك الطاقة.

طريقة البحث ومواده

لدراسة طيف الطاقة الكهربائية لحاملة الشحنة في طبقة رقيقة، وفي الجمل العديدة الطبقات من الضروري حساب الكمون الناتج عن الحقل الذي تولده الشحنة في نقطة في الطبقة. يمكن الحصول على الطاقة الكمونية لشحنة نقطية q (إلكترون أو ثقب) في طبقة رقيقة باستخدام الطريقة الكلاسيكية(الالكتروديناميك)، وذلك باستخدام معادلة بواصون:

$$\mathrm{div}(\varepsilon\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \phi\ (\vec{\mathrm{r}},\vec{\mathrm{r}}')) = -\ \varepsilon_0^{-1}\rho_{\mathrm{k}}$$

حيث $\phi(\vec{\mathrm{r}},\vec{\mathrm{r}}')$ الكمون الناتج من توزع الشحنات بكثافة حجميه $\rho(\vec{\mathrm{r}})$. نعوض بعد ذلك في عبارة الكمون العامة $\mathrm{z_e = z_h}$ فنحصل على الكمون المحجوب، وتتم بعد ذلك مناقشة عبارة الكمون التي يتم الحصول عليها.

النتائج والمناقشة

بفرض N كثافة الإلكترونات، و ϕ الكمون الكهربائي. يتم في البداية توزيع الإلكترونات بشكلٍ منتظم، حيث تكون محصلة الشحنة(الشحنة الصافية) عند كل نقطة صفر، لذلك فان ϕ يكون ثابتاً أيضًا في البداية.

نضع الآن شحنة نقطية ثابتة q في نقطة الأصل. تكون كثافة الشحنة المرافقة هي $q\delta(r)$، حيث $\delta(r)$ هو تابع دلتا ديراك. نفترض أن التغيير في كثافة الإلكترون والكمون الكهربائي بعد عودة النظام إلى التوازن، هما $\Delta N(r)$ و $\Delta\phi(r)$ على الترتيب. ترتبط كثافة الشحنة والكمون الكهربائي بمعادلة بواصون التالية:

$$\Delta\phi(r) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\left[q\ \delta(\mathrm{r}) - \mathrm{e}\Delta\mathrm{N}(\mathrm{r})\right]$$

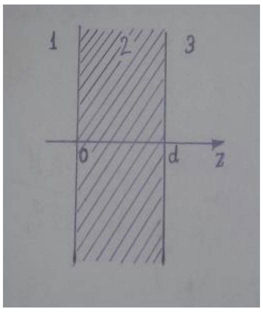
حيث ε_0 هي سماحية الفراغ(ثابتة العازلية الكهربائية للفراغ).

يجب عند دراسة الخواص الفيزيائية للطبقات الرقيقة دراسة تأثير كمون الشحنات النقطية في مسائل تلك الطبقات، بتعبير آخر يجب حساب الكمون الناتج عن شحنة نقطية في طبقة رقيقة(**كمون الخيال**). يكون في جملة ثلاثية البعد(جملة فراغية) غير متجانسة كمون شحنة نقطية غير مساوٍ لكمون شحنة نقطية في جملة ثنائية البعد.

بفرض طبقة رقيقة سماكتها d صغيرة مقارنة مع طول موجة دي بروي للإلكترونات أي أن $d << 1/\sqrt{N}$ في حالة التحلل، و $d << \hbar/\sqrt{mkT}$ في حالة توزع بولتزمان، حيث N الكثافة السطحية للإلكترونات، T درجة الحرارة، و k ثابتة بولتزمان (في طبقة نصف ناقل سماكتها $100\,A^0$، وكتلة الشحنة النقطية $m = 0.1m_0$، فان الشروط السابقة تتحقق من اجل كثافة $n < 10^{18}cm^{-3}$ و $T < 30^0 K$)، وتكون في هذه الحالة حركة الإلكترون باتجاه المحور z العمودي على مستوى الطبقة مكممة، وتتلخص المسألة في إيجاد الكمون غير المحجوب والكمون المحجوب لشحنة نقطية في طبقة رقيقة.

١. الكمون غير المحجوب

لتكن لدينا طبقة نصف ناقل رقيقة كما في الشكل المرسوم، وبفرض أن ε_1 ثابتة العازلية الكهربائية للوسط المحيط بطبقة نصف الناقل الرقيقة، و ε_2 ثابتة العازلية الكهربائية للطبقة، ونفرض أن النسبة بينهما هي $\gamma = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$. و أن المحور z عمودي على مستوي الطبقة. كما أن مستوي الطبقة xy لانهائي.



بفرض أن شحنة نقطية في هذه الطبقة معينة بنصف قطر شعاعي $\vec{r}'$، ولنحسب الكمون الناتج عن هذه الشحنة في نقطة معينة بنصف قطر شعاعي $\vec{r}$. يمكن الحصول على الكمون في المستويات ١،٢،٣ من خلال حل المعادلات الثلاث التالية على الترتيب(معادلات بواصون):

$$\nabla_{\vec{r}}^2 \phi_1(\vec{r},\vec{r}') = 0 \quad (١)$$
$$\nabla_{\vec{r}}^2 \phi_2(\vec{r},\vec{r}') = -\frac{4\pi e}{\varepsilon_2}\delta(\vec{r}-\vec{r}')$$
$$\nabla_{\vec{r}}^2 \phi_3(\vec{r},\vec{r}') = 0$$

وتُعطى الشروط الحدية بالعلاقات التالية:

$$z=0 \Rightarrow \phi_1=\phi_2 \quad , \quad \frac{\partial\phi_1}{\partial z} = \gamma\frac{\partial\phi_2}{\partial z}$$
$$z=d \Rightarrow \phi_2=\phi_3 \quad , \quad \gamma\frac{\partial\phi_2}{\partial z} = \frac{\partial\phi_3}{\partial z} \qquad (٢)$$

في حال كان xy مستوي الطبقة متجانس ومتماثل المناحي، فان الكمون $\phi(\vec{r},\vec{r}')$ يعتمد على $|\vec{\rho}-\vec{\rho}'|$، حيث $\vec{\rho}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$ متجه نصف قطر في مستوي الطبقة، يمكن اعتبار $\vec{\rho}'=0$ (الشحنة على المحور z)، $\vec{\rho}'$ نصف قطر متجه في مستوي الطبقة يدل على مكان وجود الشحنة المدروسة، و $\vec{\rho}$ نصف قطر متجه في مستوي الطبقة يدل على النقطة التي نحسب فيها الكمون. بنشر الكمون $\phi(\vec{r},\vec{r}')$ وفق تكامل فوريية المضاعف:

$$\phi(\vec{r},\vec{r}') = \int\frac{d\vec{\eta}}{(2\pi)^2}e^{i\vec{\eta}\cdot\vec{\rho}}\phi(\eta,z,z') \qquad (٣)$$

يعتمد مكون(مركبة) فوريية $\phi(k,z,z')$ على القيمة المطلقة لمتجه الموجة $\vec{\eta}$. بالتعويض من (٣) في (١) و (٢) نحصل من أجل مركبات فوريية $\phi(\eta,z,z')$ للكمون على المعادلات التالية:

$$\frac{\partial^2\phi_1(\eta,z,z')}{\partial z^2} - \eta^2\phi_1(\eta,z,z') = 0$$
$$\frac{\partial^2\phi_2(\eta,z,z')}{\partial z^2} - \eta^2\phi_2(\eta,z,z') = -\frac{4\pi e}{\varepsilon_2}\delta(\vec{r}-\vec{r}') \qquad (٤)$$
$$\frac{\partial^2\phi_3(\eta,z,z')}{\partial z^2} - \eta^2\phi_3(\eta,z,z') = 0$$

تهمنا المعادلة الثانية من جملة المعادلات في (٤)، لأنها تُعبر عن الشحنة في مستوي الطبقة المدروسة. يُعطى حل تلك المعادلة بالصيغة التالية[3]:

(٥)

$$\phi_2(\eta, z, z') = \frac{2\pi e}{\varepsilon_2 \eta}\left\{e^{-\eta|z-z'|} + \frac{2\delta}{e^{2\eta d} - \delta^2}\left[\delta \, ch\, \eta(z - z') + e^{\eta d} ch\, \eta\, (z + z' - d)\right]\right\}$$

حيث
$$\delta = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$$

للحصول على علاقة الكمون $\phi(\vec{r}, \vec{r}')$ عند نقطة تبعد أكثر بكثير من سماكة الطبقة $(\rho >> d)$ يكفي حساب $\phi(\eta, z, z')$مركبة فوريية. فمن أجل طبقة رقيقة $(\eta\, d << 1)$، نحصل من (٥) على علاقة لا تعتمد على z و z' بالصيغة:

$$\phi(\eta) = \frac{2\pi e}{\varepsilon_2 \eta}\left[\frac{e^{\eta d} + \delta}{e^{\eta d} - \delta}\right] \quad (٦)$$

نستنتج من هذه العلاقات أنه في حال كانت المسافة ρ كبيرة مقارنة مع d سماكة الطبقة، فان كمون الشحنة النقطية لا يعتمد على الإحداثيتين zو z' ويصبح الكمون ثنائي البعد. وسنناقش هذا الكمون في الحالات الخاصة التالية:

١. $\gamma >> 1$ $(\varepsilon_2 >> \varepsilon_1)$أي أن الكثافة الضوئية للطبقة أكبر بكثير من الكثافة الضوئية للوسط المحيط بالطبقة، ويكون في هذه الحالة لدينا $\delta = 1 - \frac{2}{\gamma}$، وتأخذ العلاقة في (٦) الصيغة التالية:

$$\phi(\eta) = \frac{4\pi e}{\varepsilon_2 \eta\, d\left(\eta + \frac{2}{\gamma\, d}\right)} \quad (٧)$$

بالتعويض من (٧) في (٣) نحصل على عبارة الكمون من أجل $(\rho >> d)$ بالصيغة التالية [5]:

$$\phi(\rho) = \frac{2 e}{\varepsilon_2 d}\int_0^\infty \frac{J_0(\eta\rho)}{\eta + \frac{2}{\gamma d}} d\eta = \frac{\pi e}{\varepsilon_2 d}\left[H_0\left(\frac{2\rho}{\gamma d}\right) - N_0\left(\frac{2\rho}{\gamma d}\right)\right] \quad (٨)$$

حيث $H_0(x)$, $N_0(x)$, $J_0(x)$ توابع ستروفي و نيمن وبيسل على الترتيب، وهي من الرتبة الصفرية.

وعند مسافة كبيرة $\rho >> \frac{\gamma\, d}{2}$ فان عبارة الكمون في (٨) تأخذ الصيغة التالية:

$$\phi(\rho) = \frac{e}{\varepsilon_1 \rho} \quad (٩)$$

أي أن كمون شحنة نقطية عند نقطة تبعد كثيراً عن الشحنة في مستوي الطبقة هو عبارة عن كمون كولون للشحنة النقطية في وسط متجانس ثابت عازليته الكهربائية ε_1.

٢. $\gamma \approx 1$ أي أن الكثافة الضوئية للطبقة الرقيقة، وللوسط المحيط بها واحدة، ويكون في هذه الحالة لدينا $|\delta| << 1$، وتعطى مركبة فوريية بالعلاقة:

$$\phi(\eta)=\frac{2\,\pi\,\mathrm{e}}{\varepsilon_1\,\eta}=\frac{2\,\pi\,\mathrm{e}}{\varepsilon_2\,\eta} \qquad (١٠)$$

بما أن $\varepsilon_1 \approx \varepsilon_2$ في هذه الحالة، أي تصبح الجملة متجانسة تقريباً، فنحصل بالتعويض من (١٠) في (٣) وعندما $(\rho >> \mathrm{d})$ على كمون كولون أيضاً بالصيغة التالية:

$$\phi(\rho)=\frac{\mathrm{e}}{\varepsilon_2}\int_0^{\infty} J_0(\eta\,\rho)\,\mathrm{d}\,\eta=\frac{\mathrm{e}}{\varepsilon_2\,\rho}=\frac{\mathrm{e}}{\varepsilon_1\,\rho}$$

٣. $\gamma << 1$ الكثافة الضوئية للطبقة أصغر بكثير من الكثافة الضوئية للوسط المحيط بها. وبالتالي فإن $\delta = -(1-2\,\gamma)$، وتعطى مركبة فورييه بالعلاقة:

$$\phi(\eta) = \frac{2\,\pi\,\mathrm{e}\,\gamma}{\varepsilon_2\,\eta} = \frac{2\,\pi\,\mathrm{e}}{\varepsilon_1\,\eta}$$

وتعطى علاقة كمون كولون في هذه الحالة، وعندما $\rho >> \mathrm{d}$ كما لو أن الطبقة الرقيقة غير موجودة، أي بالصيغة التالية:

$$\phi(\rho) = \frac{\mathrm{e}}{\varepsilon_1\,\rho}$$

كمون الحجب

بفرض أن طبقة تحوي على شحنات حرة (الكترونات) موزعة بكثافة سطحية وسطية N، وتحوي على شحنات غير متحركة معاكسة بالإشارة، موزعة بنفس الكثافة السطحية الوسطية السابقة، وبالتالي فإن الطبقة متعادلة كهربائياً، ومتجانسة في المستوي xy.

يمكن إيجاد الكمون المحجوب $\tilde{\phi}(\vec{r},\vec{r}\,')$ لشحنة نقطية معينة بالمتجه $\vec{r}\,'$ في الطبقة (كما في الفقرة السابقة يمكننا أن نضع $\vec{\rho}\,' = 0$). تتحقق في مستوي الطبقة (المستوي ٢) معادلة بواصون التالية[6]:

$$\nabla_{\vec{r}}^2\ \phi_2(\vec{r}\ ,\vec{\mathrm{r}}') = -\frac{4\pi e}{\varepsilon_2}\left[\delta\ (\vec{r}-\vec{\mathrm{r}}') - \Delta\,\mathrm{n}\ (\vec{r}\ ,\vec{\mathrm{r}}')\right] \qquad (١١)$$

حيث $\Delta n(\vec{r}\ ,\vec{\mathrm{r}}')$ تغير كثافة الالكترونات الحرة في النقطة $\vec{r}\,'$.

يمكن في حالة التوازن الحراري التعبير عن كثافة الالكترونات كتابع للكمون الكهروكيميائي.

$$\mu = \mu_0 + \mathrm{e}\,\tilde{\phi}$$

حيث μ_0 الكمون الكيميائي للإلكترونات في غياب المجال الكهربائي. عند مسافة كبيرة، وعندما $\mathrm{e}\,\tilde{\phi} << \mu_0$ يمكن نشر Δn في وفق $\tilde{\phi}$ والاكتفاء بالحد الخطي الأول من النشر.

$$\Delta n = \frac{\partial\,\mathrm{n}}{\partial\,\mu_0} e\ \tilde{\phi} \qquad (١٢)$$

بالتعويض من (١٢) في (١١) وبنشر $\tilde{\phi}\ (\rho, z\,, z\,')$ وفق تكامل فورييه كما في (٣)، نحصل على مركبات فورييه في الأوساط ١ و ٢ و٣ على الترتيب وفق العلاقات التالية:

(١٣)

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}_1(\eta, z, z')}{\partial z^2} - \eta^2 \ \tilde{\phi}_1(\eta, z, z') = 0$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}_2(\eta, z, z')}{\partial z^2} - \left[\eta^2 + \frac{4\pi e^2}{\varepsilon_2} \frac{\partial n}{\partial \mu_0}\right] \tilde{\phi}_1(\eta, z, z') = - \frac{4\pi e}{\varepsilon_2} \delta(z - z')$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}_3(\eta, z, z')}{\partial z^2} - \eta^2 \ \tilde{\phi}_3(\eta, z, z') = 0$$

باستخدام الشروط الحدية لـ $\tilde{\phi}$ كما في السابق من أجل ϕ المعادلات (٢).

نحصل من أجل $\tilde{\phi}_2$ على معادلة خطية مع ثوابت متغيرة، مثل $\frac{\partial n}{\partial \mu_0}$ يتعلق بـ d. بالتعويض في المعادلة الثانية من (١٣) عن القيمة الوسطى لـ $\frac{\partial n}{\partial \mu_0}$ بالعلاقة:

$$\left\langle \frac{\partial n}{\partial \mu_0} \right\rangle = \frac{1}{d} \int_0^d \frac{\partial n}{\partial \mu_0} dz = \frac{1}{d} \frac{\partial N}{\partial \mu_0}$$

فإنها تأخذ الصيغة التالية:

$$\frac{\partial \tilde{\phi}_2}{\partial z^2} - \tilde{\eta}^2 \ \tilde{\phi}_2 = - \frac{4\pi \text{ e}}{\varepsilon_2} \delta(z - z') \qquad (١٤)$$

حيث

$$\tilde{\eta} = \sqrt{\eta^2 + \frac{4 \ \pi \ e^2}{\varepsilon_2 \ d} \frac{\partial N}{\partial \mu_0}} \qquad (١٥)$$

يُعطى حل المعادلة (١٤) بالنسبة لـ $\tilde{\phi}_2$ بشكل مشابه للحل بالنسبة لـ ϕ_2 في (٥)، أي بالصيغة:

$$\tilde{\phi}_2(\tilde{\eta}, z, z') = \frac{2\pi e}{\varepsilon_2 \tilde{\eta}} \left\{ e^{-\tilde{\eta}|z-z'|} + \frac{2\tilde{\delta}}{e^{2\tilde{\eta} d} - \tilde{\delta}^2} \left[\tilde{\delta} \text{ ch} \tilde{\eta} (z - z') + e^{\tilde{\eta} d} ch \tilde{\eta} (z + z' - d) \right] \right\}$$

(١٦)

حيث:

$$\tilde{\delta} = \frac{\gamma \ \tilde{\eta} - \eta}{\gamma \ \tilde{\eta} + \eta}$$

من أجل طبقة رقيقة، أي عندما $\tilde{\eta} d << 1$، فإننا نحصل من العلاقة (١٦) كما في المعادلة (٦) على عبارة لكمون ثنائي البعد بالصيغة التالية:

$$\tilde{\phi}(\eta) = \frac{2\pi e}{\varepsilon_2 \tilde{\eta}} \left[\frac{e^{\tilde{\eta} d} + \tilde{\delta}}{e^{\tilde{\eta} d} - \tilde{\delta}} \right] \qquad (١٧)$$

يمكن أن يتحقق الشرط $\tilde{\eta} d << 1$ بشكل فعلي فقط عند تحقيق الشرطين التاليين معاً:

$$\eta d << 1$$
$$\frac{4\pi e^2 d}{\varepsilon_2}\frac{\partial N}{\partial \mu_0} << 1 \qquad (١٨)$$

تعني المتراجحة الأولى $\eta d << 1$ أن العلاقة (١٧) تصف الكمون عند مسافات بعيدة من الشحنة $\rho >> d$.
لنحاول الآن إيجاد المعنى الفيزيائي المتراجحة الثانية في (١٨)، يُعطى الكمون الكيميائي μ_0 [7]بغياب المجال الكهربائي بالعلاقة:

$$\mu_0 = E_1 + kT\ell n\left(e^{\frac{\pi N \hbar^2}{mkT}} - 1\right)$$

حيث E_1 طاقة السوية الكوانتية الأولى، وأن:

$$\frac{\partial N}{\partial \mu_0} = \frac{m}{\pi \hbar^2}\left(1 - e^{\frac{\pi N \hbar^2}{mkT}}\right) \qquad (١٩)$$

بالتعويض من (١٩) في (١٨) نحصل على:

$$\frac{4d}{a}\left(1 - e^{\frac{\pi N \hbar^2}{mkT}}\right) << 1 \qquad (٢٠)$$

حيث $a = \frac{\varepsilon_2 \hbar^2}{me^2}$ نصف مدار بور الأول في وسط ثابتة عازليته الكهربائية ε_2. يُعطى توزع فرمي للإلكترونات في حالة التحلل على السوية الأولى بـ $\left(\frac{N\pi\hbar^2}{mkT} >> 1\right)$، ويُعطى شرط توزع بولتزمان غير المتحلل بـ $\left(\frac{N\pi\hbar^2}{mkT} << 1\right)$، تُصبح العلاقة (٢٠) بالشكل:

$$\frac{4d}{a} << 1 \quad , \quad \frac{4d}{a}\frac{\pi N \hbar^2}{mkT} << 1 \qquad (٢١)$$

لتوضيح المعنى الفيزيائي للمتراجحة في (٢٠) نذكر بنصف قطر دي بروي r_0 في بلورة كبيرة:

$$r_0^{-1} = \begin{cases} 2\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/6}\sqrt{\frac{me^2}{\varepsilon_2\hbar^2}n^{1/3}} & \text{(حالة فرمي فرمي)} \\ \sqrt{\frac{4\pi ne^2}{\varepsilon_2 kT}} & \text{(حالة بولتزمان)} \end{cases} \qquad (٢٢)$$

بوضع $\alpha = \frac{d}{r_0}$ ، $n = \frac{N}{d}$ ينتج أن:

$$\alpha = \frac{d}{r_0} = \begin{cases} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/6}\left(N\ d^2\right)^{1/6}\left(\frac{4d}{\alpha}\right)^{1/2} & \text{(حالة فرمي)} \\ \left(\frac{\pi N \hbar^2}{mkT}\right)^{1/2}\left(\frac{4d}{\alpha}\right)^{1/2} & \text{(حالة بولتزمان)} \end{cases} \qquad (٢٣)$$

بمقارنة العلاقة الحدية (٢٣) مع المتراجحة اليسارية في (٢١)، نجد أن الشرط (٢٠) الذي يضمن الكمون المحجوب الثنائي البعد على مسافات بعيدة، يتطابق مع الشرط $\alpha >> 1$، أي أن سماكة الطبقة يجب أن تكون أقل من نصف قطر ديباي للحجب في بلورة كبيرة.

نناقش الكمون المحجوب $\tilde{\phi}(\rho)$ كما في الفقرة السابقة، وذلك في ثلاث حالات حدية(حسب ε_1 ε_2). ندرس حالة التحلل عندما:

$$\tilde{\eta} = \sqrt{\eta^2 + \frac{4}{\alpha d}}$$

(٢٤)

١. $\gamma >> 1$ يكون في هذه الحالة $1 + \tilde{\delta} = 2$ و $1 - \tilde{\delta} = \frac{2\eta}{\gamma\tilde{\eta}}$، ونحصل من العلاقة (١٧) على مركبة فوريية للكمون بالصيغة:

$$\tilde{\phi}(\eta) = \frac{4\pi e}{\varepsilon_2\ \mathrm{d}\left[\eta\left(\eta + \frac{2}{\gamma d}\right) - \frac{4}{\alpha d}\right]}$$

(٢٥)

إذا كان $\frac{1}{\gamma^2} << \frac{4\mathrm{d}}{\alpha}$ فإنه يمكن إهمال الحد الخطي في مقام العلاقة (٢٥)، ونحصل على:

$$\tilde{\phi}(\eta) = \frac{4\pi e}{\varepsilon_2\ \mathrm{d}\left(\eta^2 - \frac{4}{\alpha d}\right)}$$

ونحصل عندئذٍ من أجل $\rho >> d$ على كمون الحجب بالصيغة:

$$\tilde{\phi}(\rho) = \frac{2e}{\varepsilon_2\ \mathrm{d}} K_0\left(\frac{2\rho}{\sqrt{d\,\alpha}}\right)$$

(٢٦)

حيث $K_0(x)$ تابع ماكدونالد McDonald من الرتبة صفر. تأخذ الصيغة (٢٦) من أجل المسافة $\rho = \rho_0 = \frac{1}{2}\sqrt{d\alpha}$ الصيغة التالية:

$$\tilde{\phi}(\rho) = \frac{2\mathrm{e}}{\varepsilon_2 d}\sqrt{\frac{2\rho_0}{\pi\rho}}\ \mathrm{e}^{-\frac{\rho}{\rho_0}}$$

نستنتج منها أن كمون الحجب صغير. حيث أن:

$$\rho_0 = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{d\alpha} & \text{(حالة فرمى)} \\ \frac{1}{2}\sqrt{d\alpha\frac{mkT}{\pi N\hbar^2}} = \sqrt{\frac{\mathrm{d}\varepsilon_0 kT}{4\pi Ne^2}} & \text{(حالة بولتزمان)} \end{cases}$$

٢. بالتعويض $\gamma \approx 1$ عن $1 + \tilde{\delta} = \frac{2\eta}{\eta - \tilde{\eta}}$ & $1 - \tilde{\delta} = \frac{2\eta}{\eta - \tilde{\eta}}$ في (١٧) نحصل على:

$$\tilde{\phi}(\eta)=\frac{2\pi\,\mathrm{e}}{\varepsilon_2\left(\eta-\dfrac{2}{\alpha}\right)} \qquad (٢٧)$$

فعندما $\rho >> d$ فان:

$$\tilde{\phi}(\rho)=\frac{\mathrm{e}}{\varepsilon_2}\left\{\frac{1}{\rho}-\frac{\pi}{\alpha}\left[H_0\left(\frac{2\rho}{\alpha}\right)-\mathrm{N}_0\left(\frac{2\rho}{\alpha}\right)\right]\right\} \qquad (٢٨)$$

وتأخذ المعادلة (٢٨) عند مسافات كبيرة $\rho >> \dfrac{\alpha}{2}$ الصيغة التالية:

$$\tilde{\phi}(\rho)=\begin{cases}\dfrac{e\alpha^2}{4\varepsilon_2\rho^3} & \text{(حالة فرمي)}\\[2ex] \dfrac{e\alpha^2}{4\varepsilon_2\rho^3}\left(\dfrac{mkT}{\pi N\hbar^2}\right)^2 & \text{(حالة بولتزمان)}\end{cases} \qquad (٢٩)$$

لا يوجد في هذه الحالة نصف قطر حجب ρ_0. ويتناقص الكمون عند مسافات كبيرة مثل قانون: واحد على مكعب المسافة.

٣. $\gamma << 1$ بالتعويض في المعادلة (١٧) عن $1+\tilde{\delta}=\dfrac{2\gamma\,\tilde{\eta}}{\gamma\,\tilde{\eta}-\eta}$ و $1-\tilde{\delta}=\dfrac{2\eta}{\gamma\,\tilde{\eta}-\eta}$ وبإهمال الحدود غير المعتمدة على η (لأن η لا يؤثر على على الكمون عند مسافات بعيدة) نحصل على:

$$\tilde{\varphi}(\eta) = \frac{2\,\pi\,\mathrm{e}\,\gamma}{\varepsilon_2\left(\eta+\dfrac{2\gamma}{\alpha}\right)}=\frac{2\,\pi\,\mathrm{e}^2}{\varepsilon_1\left(\eta+\dfrac{2me^2}{\varepsilon_1\hbar^2}\right)} \qquad (٣٠)$$

الاستنتاجات :

نستنتج أن كمون الحجب لا يعتمد على :

-سماكة الطبقة في الحالتين ١ و٢.

- ε_2ثابتة العازلية الكهربائية للطبقة $(\varepsilon_2=\varepsilon_1)$.

لذلك ضمن هذه الشروط لا يوجد معنى للشروط الحدية عند حدود طبقة منتهية السماكة.

المراجع (References)

[1]McComb, W.D. (2007*). Renormalization methods : a guide for beginners (Reprinted with corrections, Reprinted ed.)*. Oxford: Oxford University Press. ISBN 978-0199236527.

[2]^ Jump up to:a b c d Escande, D F; Elskens, Yves; Doveil, F (1 February 2015*). "Direct path from microscopic mechanics to Debye shielding, Landau damping and wave-particle interaction*". Plasma Physics and Controlled Fusion. 57 (2): 025017. arXiv:1409.4323. Bibcode:2015PPCF...57b5017E. doi:10.1088/0741-3335/57/2/025017.

[3]Fahoud. *M Effect of self – action potential Energy of Electron and hole on the Wannier – Mott exciton Energy spectrum in Multilayer systems*. Tishreen university Journal for Rescarch and Scientific Studies – Basic Series Vol. (35)N0(2) 2013.

[4]^ Jump up to:a b P. Debye and E. Hückel (1923*). "The theory of electrolytes. I. Lowering of freezing point and related phenomena"* (PDF). Physikalische Zeitschrift. 24: 185–206. Archived from the original (PDF) on 2013-11-02.

[5]Gradshtain and RYGEK, *Tables of integrals, sum, products*, Moscow 1963.

[6]Ivan A. Avrutsky, Alexey V. Vosmishev. *Calculation of exiton suppression in quantum well field by 2D electron gas and resultant modification spectra*, Moscow 2021.

[7]R. K. Pathria and Paul D. Beale. *Statistical Mechanics Third Edition*. 2011 Elsevier Ltd. All rights reserved. P 671 -681.