مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (6) العدد (1) 2022

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (6) No. (1) 2022

معايير لتذبذب المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد السالب

د. محمد معلا *

(تاريخ الإيداع 12/19/ 2021– تاريخ النشر 20/ 2/ 2022)

□ ملخّص □

يهدف هذا البحث إلى دراسة تذبذب المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد السالب $[r(t)z'(t)]' + c(t)f\big(x(\tau(t)), r(t)z'(t)\big) = 0$، إذ يعطى التابع $z(t)$ بالعلاقة $z(t) = x(t) - a(t)x\big(\theta(t)\big)$، وذلك من خلال وضع شروط على الأمثال $c(t)$ و $r(t)$ و التوابع $a(t)$ و $\theta(t)$ و $\tau(t)$.

كلمات مفتاحية: معادلة تفاضلية – نصف خطية – محايد – متأخر – معيار التذبذب.

* مدرس في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة طرطوس – طرطوس – سوريا.

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (6) العدد (1) 2022

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (6) No. (1) 2022

Oscillation criteria for Generalized Half Linear Second Order Differential Equations with Negative Neutral Term

Dr. Mohammad Moalla*

(Received 19/12/2021.Accepted 20/2/2022)

□ABSTRACT □

We aim in this work to study the oscillation of the second order generalized half-linear negative neutral differential equation $[r(t)z'(t)]' + c(t)f\big(x(\tau(t)), r(t)z'(t)\big) = 0$; where $z(t) = x(t) - a(t)x\big(\theta(t)\big)$, by setting conditions on the coefficients $c(t)$ and $r(t)$ and the function $a(t), \theta(t)$ and $\tau(t)$.

Keywords: Half Linear – Differential Equation – Neutral – Delay – Oscillation Criteria.

*Lecturer, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Tartous University, Tartous, Syria.

مقدمة

تعد المعادلات التفاضلية التعبير الأفضل عن أغلب حالات التغير في حياتنا، من هنا تأتي أهمية هذه المعادلات، إذ يبرز ذلك بشكل واضح من حاجة الباحثين في شتى الاختصاصات وخاصة الفيزيائية منها للتعامل مع المعادلة التفاضلية، قد تكون المشكلة في إيجاد حلول المعادلة، وفي حالات أخرى قد تكمن المسألة في دراسة السلوك اللانهائي لتلك الحلول دون إيجادها، فقد نجد حلولاً متذبذبة (Oscillatory)، وأخرى غير متذبذبة (Non–Oscillatory).

نركز اهتمامنا في هذا البحث على تلك المعادلات نصف الخطية والتي تحوي على حدٍ متأخر(Delay)، والأخرى التي تحوي على حدٍ محايد(Neutral)، إذ تتميز هذه المعادلات عن المعادلات العادية بأنه قد نجد لنفس المعادلة التأخيرية حلولاً متذبذبة (Oscillatory)، وأخرى غير متذبذبة (Non–Oscillatory).

تعطى المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية بالشكل الآتي:[2,4,5]

$$[r(t)x'(t)]' + c(t)f\big(x(t), r(t)x'(t)\big) = 0 \qquad (1)$$

حيث أن $f(x,y) = |x|^{p-1}|y|^{2-p}sgn(x)$ ، و p عدد حقيقي يحقق $p \geq 1$، كما أن $r(t) > 0$.

يتمتع التابع $f(x,y)$ بالخواص الآتية:

1. مستمر على المنطقة $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ حيث أن $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$،
2. $f(x,y)$ متجانس من الدرجة الأولى، أي يحقق العلاقة $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x,y)$ أياً كانت λ من $\mathbb{R}$ ،
3. يحقق التابع $f(x,y)$ العلاقة $xf(x,y) > 0$، وذلك من أجل $xy \neq 0$،
4. يضمن التابع $f(x,y)$ وجود ووحدانية الحل للمعادلة (1)، وبالتالي من أجل أي نقطة (x_1, x_2) من Ω، فإنه يوجد حل $x(t)$ للمعادلة(1) يحقق الشروط: $x(t_0) = x_1 \,, x'(t_0) = x_2$ ، حيث $t_0 \in \mathbb{R}$،
5. إذا كان التابع $F(t)$ معرفاً بالعلاقة $F(t) := tf(t,1)$، عندئذٍ يتحقق أن $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+F(t)} < +\infty$ و $\lim_{|t| \to +\infty} F(t) = +\infty$،

تعريف ١:

يقصد بتذبذب المعادلة التفاضلية هو أن يملك كل حل من حلولها عدداً لانهائياً من الأصفار على مجال ما، أما عدم التذبذب فهو أن يوجد حل ما للمعادلة بحيث يملك عدداً منتهياً من الأصفار على ذلك المجال [1,6].

درس الباحثELBERT في [4] تذبذب المعادلة(1)، وتمكن من الحصول على نتائج هامة، بعد ذلك درس الباحثان Došlý وŘezníčková الحلول الأساسية للمعادلة(1) في [3]، ومن ثم وضع الباحثان Bognár و Dosly في [2] معايير مهمة من أجل تذبذب المعادلة (1)، أما المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد السالب فهي بالشكل الآتي:

$$[r(t)z'(t)]' + c(t)f\big(x(\tau(t)), r(t)z'(t)\big) = 0 \qquad (2)$$

حيث إن $z(t) = x(t) - a(t)x\big(\theta(t)\big)$، أما $f(x,y)$ فهو معرف كما في المعادلة (1)، لكننا سنعالج المسألة من أجل p عدد فردي يحقق $p \geq 3$، كما أن $\int^{+\infty} \frac{dt}{r(t)} = +\infty$.

إن $c(t)$ و $r(t)$ تابعان موجبان تماماً من أجل كل t من $\mathbb{R}$، والتابع $\tau(t)$ يتمتع بالخواص الآتية:

1) $\tau(t) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

2) $\tau(t) \leq t$

3) $\tau'(t) > 0$

4) $\lim_{t\to+\infty} \tau(t) = +\infty$

حيث $0 < a(t) \leq a < 1$ اشتقاقي، والتابع $\theta(t)$ يحقق أن $\theta(t) \leq t$ و $\lim_{t\to+\infty} \theta(t) = +\infty$، مع اعتبار $t \in [T, +\infty[$.

اهتم الباحثان Fišnarová و Marík في [1] بوضع معايير لتذبذب المعادلات التفاضلية نصف الخطية الكلاسيكية من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد، وفي [7] استخدما تحويل ريكاتي المعدل لدراسة تذبذب هذا النوع من المعادلات ولكن بوجود حد متأخر فقط، ثم تمكنا بعد ذلك في [8] من إيجاد معيار آخر لتذبذب المعادلات ذات الحد المتأخر، وذلك من خلال الاستفادة من تذبذب المعادلات نصف الخطية من المرتبة الثانية.

درس الباحث Injrou وآخرون في[10] تذبذب المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية بوجود حد محايد، ثم بإدخال الحد الأعظمي، إذ تعد نتائج المرجع [10] من أهم الدوافع لبحثنا هذا الذي يتناول دراسة المعادلة (2) ذات الحد المحايد السالب $z(t) = x(t) - a(t)x\big(\theta(t)\big)$.

أهمية البحث وأهدافه

تأتي أهمية هذا البحث من أنه يعطي دراسة تحليلية لسلوك حلول المعادلة (2)، وهي معادلة تفاضلية نصف خطية معممة من المرتبة الثانية ذات حدٍ محايدٍ. إن لهذه الدراسة دور هام في معرفة سلوك الظواهر التي تصفها تلك المعادلة وبالتالي إمكانية التحكم بنتائج تلك الظواهر، ولذلك فإن هذا البحث يعد على درجة كبيرة من الأهمية للباحثين في المجالات العلمية النظرية والتطبيقية. يهدف البحث إلى دراسة السلوك اللانهائي لحلول المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد، من حيث التذبذب.

طرائق البحث ومواده

يندرج هذا البحث تحت اختصاص الرياضيات النظرية، وبشكل خاص في مجال نظرية المعادلات التفاضلية، لذلك فإن التقنيات الرياضية المستخدمة هنا تعتمد بشكل أساسي على طرائق الدراسة التحليلية للمعادلات التفاضلية العادية.

النتائج والمناقشة:

نركز في بداية بحثنا على عرض التمهيديات التي سنستخدمها لإتمام البرهان على صحة النتائج التي سيتم عرضها لاحقاً في هذا البحث.

تمهيدية 1:[9]

ليكن لدينا A و δ و B أعداد حقيقية، حيث $\delta \geq 0$ و $B \geq 0$، عندئذٍ تتحقق المتراجحة الآتية:

$$A\delta - B\delta^{\frac{p}{p-1}} \leq \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p} A_+^p \frac{1}{B^{p-1}} \quad (3)$$

حيث $A_+ = \max\{A, 0\}$.

تمهيدية 2:[9]

ليكن لدينا p عدد فردي يحقق $p \geq 3$، وليكن α و β عددان حقيقيان غير سالبين، عندئذٍ تتحقق المتراجحة الآتية:

$$\left(\frac{1}{l}\alpha + \frac{1}{l^*}\beta\right)^{\mathrm{p}-1} \leq \frac{1}{l}\alpha^{p-1} + \frac{1}{l^*}\beta^{p-1}$$

حيث $l^* > 1$ و $l > 1$ عددان حقيقيان مترافقان يحققان $\frac{1}{l} + \frac{1}{l^*} = 1$.

تمهيدية 3:[9]

بفرض أن $\theta\big(\tau(t)\big) = \tau\big(\theta(t)\big)$، عندئذٍ من أجل p عدد فردي و $p \geq 3$، يتحقق الآتي:

$$l^{p-2}x^{p-1}\big(\tau(t)\big) + l^{*p-2}\left(a\big(\tau(t)\big)\right)^{p-1} x^{p-1}(\tau(\theta(t)))$$

$$\geq \big(x(t) + a(t)x\big(\theta(t)\big)\big)^{p-1} \quad (4)$$

تمهيدية ٤:

من أجل كل عدد حقيقي T، ومن أجل $t > T$ ليكن لدينا $x(t) > 0$ حل للمعادلة(2)، عندئذٍ من أجل $\int^{+\infty} \frac{dt}{r(t)} = +\infty$ نميز الحالتين الآتيتين:

(i) $z(t) > 0$، و $z'(t) > 0$ ، و $[r(t)z'(t)]' \leq 0$.

(ii) $z(t) < 0$، و $z'(t) > 0$ ، و $[r(t)z'(t)]' \leq 0$.

برهان:

بما أن $x(t) > 0$ أياً كانت $t > T$ حل للمعادلة (2) عندئذٍ لدينا:

$$[r(t)z'(t)]' = -c(t)f\big(x(\tau(t)), r(t)z'(t)\big) \leq 0$$

لنفرض أن $z'(t) \leq 0$ ، وهنا نميز حالتين:

الحالة الأولى: $z(t) \geq 0$، وبما أن $[r(t)z'(t)]' \leq 0$ أياً كانت $t > T$، عندئذٍ يوجد $m > 0$ تحقق $r(t)z'(t) < -m$ أياً كانت $t > T_1 > T$، ومنه $z'(t) < -\frac{m}{r(t)}$، وبالمكاملة نجد:

$$m\int_T^t \frac{1}{r(s)} ds \leq z(t) + m\int_T^t \frac{1}{r(s)} ds < z(T)$$

وعندما تسعى t نحو $+\infty$ نجد أن $z(T) = +\infty$ وهذا تناقض.

الحالة الثانية: $z(t) < 0$، وبما أن $[r(t)z'(t)]' \leq 0$ أياً كانت $t > T$، فإنه يوجد عدد $k > 0$ بحيث من أجل $T_1 > T$ فإن $r(t)z'(t) < -k$ ، أي أن $z'(t) < -\frac{k}{r(t)}$، و بالمكاملة من T إلى t نجد أن $z(t) < z(T) - k\int_T^t \frac{1}{r(s)} ds$، وعندما تسعى t نحو $+\infty$ نجد $\lim_{t\to+\infty} z(t) = -\infty$، ولكن لدينا $x(\theta(t)) = \frac{x(t)-z(t)}{a(t)} > \frac{-z(t)}{a(t)}$، ومنه نجد $\lim_{t\to+\infty} x(\theta(t)) = +\infty$، وبما أن $\lim_{t\to+\infty} \theta(t) = +\infty$، نجد $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$. الآن وبملاحظة أن $z(t) < 0$ أي أن $x(t) < a(t)x(\theta(t)) < x(\theta(t))$، نشكل متتالية $t_0, t_1, t_2 \ldots$.. بحيث أن $\theta(t_n) = t_{n-1}$ و $t_{n-1} < t_n$. الآن باعتبار $x(t_0) = \eta$، وبما أن $x(t) < x(\theta(t))$ ومنه نجد أن $x(t_n) < x(\theta(t_n))$ أي $x(t_n) < x(t_{n-1})$ ومنه نجد أن $x(t_n) < \eta$ أيا كان n عدد طبيعي، وهذا يعني أن $\lim_{t\to+\infty} x(t) < \eta$ وهذا تناقض.

ومنه فإن $z'(t) > 0$ ، وهنا نجد أن $z(t) < 0$ أو أنه يوجد $T_2 > T$ بحيث $z(t) > 0$.

تمهيدية 5:

لنفرض أن$x(t) > 0$ حل للمعادلة(2) من أجل $t > T$، حيث $x\left(\tau(\theta(t))\right) > 0$، و$x\left(\tau(t)\right) > 0$، ولنفرض أن$\tau(\theta(t)) = \theta(\tau(t))$، عندئذ تتحقق المتراجحة الآتية:

$$l^{p-2}\left[\left(r(t)z'(t)\right)^{p-1}\right]' + l^{*p-2}\frac{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta'(t)}\left[\left(r(\theta(t))z'(\theta(t))\right)^{p-1}\right]'$$

$$+(p-1)Q(t)z^{p-1}(\tau(t)) \leq 0 \qquad (5)$$

حيث أن$Q(t) = min\{c(t), \varphi(t)c(\theta(t))\}$، و$\varphi(t)$ تابع موجب تماماً، إضافةً لذلك، إذا وجدa_0 عدد حقيقي موجب تماماً يحقق $a(t) \leq a_0 < +\infty$ أياً كانت $t \geq t_0$، والعدد الحقيقي الموجب تماماًθ_0 إذ أن$\theta'(t) \geq \theta_0$، فإنه يتحقق:

$$l^{p-2}[(r(t)z'(t))^{p-1}]' + l^{*p-2}\frac{(a_0)^{p-1}\varphi(t)}{\theta_0}\left[\left(r(\theta(t))z'(\theta(t))\right)^{p-1}\right]' +$$

$$(p-1)Q(t)z^{p-1}(\tau(t)) \leq 0 \qquad (6)$$

برهان:

لنأخذ المعادلة (2)، ولنضرب طرفيها بـ$(p-1)\left(r(t)z'(t)\right)^{p-2}$، وبملاحظة العلاقة الآتية:

$$[(r(t)z'(t))^{p-1}]' = (p-1)\left(r(t)z'(t)\right)^{p-2}[r(t)z'(t)]'$$

تصبح المعادلة(2) كالآتي:

$$[(r(t)z'(t))^{p-1}]' + (p-1)c(t)x^{p-1}(\tau(t)) = 0 \qquad (7)$$

نستبدل كلt بـ$\theta(t)$ فتصبح:

$$\frac{1}{\theta'(t)}\left[(r(\theta(t))z'(\theta(t)))^{p-1}\right]' + (p-1)c(\theta(t))x^{p-1}(\tau(\theta(t))) = 0 \qquad (8)$$

حيث $z'(\theta(t)) = \frac{dz(s)}{ds}\Big|_{s=\theta(t)}$.

الآن نضرب المعادلة(7) بـl^{p-2}، ونضرب المعادلة(8) بـ $\varphi(t)l^{*p-2}\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}$، ثم نجمع العلاقتين، وبالاستفادة من الفرضية$\tau(\theta(t)) = \theta(\tau(t))$، وحسب التمهيدية 3، نحصل على الآتي:

$$l^{p-2}\left[\left(r(t)z'(t)\right)^{p-1}\right]' + l^{*p-2}\frac{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta'(t)}\left[\left(r(\theta(t))z'(\theta(t))\right)^{p-1}\right]'$$

$$+(p-1)Q(t)\left(x(\tau(t))+a(\tau(t))x\left(\theta(\tau(t))\right)\right)^{p-1}\leq 0$$

وبما أن$x(\tau(t))+a(\tau(t))x\left(\theta(\tau(t))\right)\geq z(\tau(t))$ ، كما أن:

$$x(\tau(t))+a(\tau(t))x\left(\theta(\tau(t))\right)\geq -z(\tau(t))$$

ومنه فإن $\left[x(\tau(t))+a(\tau(t))x\left(\theta(\tau(t))\right)\right]^{p-1}\geq z(\tau(t))^{p-1}$، وبالتالي نجد الآتي:

$$l^{p-2}\left[\left(r(t)z'(t)\right)^{p-1}\right]'+l^{*p-2}\frac{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(\mathrm{t})}{\theta'(t)}\left[\left(r(\theta(t))z'(\theta(t))\right)^{p-1}\right]'$$

$$+(p-1)Q(t)z^{p-1}(\tau(t))\leq 0$$

وبملاحظة أن المقدارا ن $\left[\left(r(\theta(t))z'(\theta(t))\right)^{p-1}\right]'$ و $\left[\left(r(t)z'(t)\right)^{p-1}\right]'$ سالبان، فعندما نعوض الشروط الحدية لـ$a(t)$ و $\theta'(t)$ نجد أن:

$$l^{p-2}\left[\left(r(t)z'(t)\right)^{p-1}\right]'+l^{*p-2}\frac{(a_0)^{\,p-1}\varphi(\mathrm{t})}{\theta_0}\left[\left(r(\theta(t))z'(\theta(t))\right)^{p-1}\right]'$$

$$+(p-1)Q(t)z^{p-1}(\tau(t))\leq 0$$

معايير تذبذب المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة ذات الحد المحايد السالب

سنعالج في هذا البحث الحالة التي يكون فيها $p\geq 3$ عدد فردي، و $\int^{+\infty}\frac{dt}{r(t)}=+\infty$.

مبرهنة 1:

ليكن لدينا$\tau(\theta(t))=\theta(\tau(t))$ و $\tau(t)\leq\theta(t)$، و$\varphi(\mathrm{t})$ و $\rho(t)$ تابعين موجبين تماماً، حيث أن$\rho(t)$ اشتقاقي من المرتبة الأولى على مجال$[t_0,+\infty[$، عندئذٍ إذا تحقق الشرط الآتي:

$$\lim_{t\to\infty}\sup\int^{\mathrm{t}}\rho(s)Q(s)-\frac{1}{(p)^p}\frac{\rho(s)r^{p-1}(\tau(s))}{(\tau'(s))^{p-1}}$$

$$\times\left(l^{p-2}\left(\frac{\rho'_+(s)}{\rho(s)}\right)^p+(l^*)^{p-2}\frac{\left(a(\tau(s))\right)^{p-1}\varphi(s)}{\theta'(s)}\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}+\left(\frac{\left(a(\tau(s))\right)^{p-1}\varphi(s)}{\theta'(s)}\right)'\frac{\theta'(s)}{\left(a(\tau(s))\right)^{p-1}\varphi(s)}\right)_+^p\right)ds=\infty \qquad (9)$$

فإن المعادلة (2) متذبذبة.

برهان:

سنستخدم طريقة نقض الفرض لإنجاز البرهان. لنفرض أن الشرط (9) محقق، وأن المعادلة (2) غير متذبذبة، أي أنه يوجد حل$x(t)$ للمعادلة(2) ويحقق$x(t)>0$ وذلك أياً كانت $t>t_0$. لنأخذ$t_1>t_0$ حيث أن$min\left\{x(t),x(\tau(t)),x(\theta(t)),x\left(\theta(\tau(t))\right)\right\}>0$ مهما كانت$t>t_1$ ، وهنا حسب التمهيدية ٤ نميز حالتين، ستتم مناقشتهما بنفس الأسلوب كالآتي:

لنعرّف الآن التابع w بالعلاقة $w(t)=\rho(t)\frac{\left(r(t)z'(t)\right)^{p-1}}{\left(z(\tau(t))\right)^{p-1}}$. نلاحظ أن $w(t)>0$ وذلك أياً كانت $t>t_2$، باشتقاق التابع $w(t)$ نجد العلاقة الآتية:

$$w'(t)=$$

$$\rho'(t)\frac{\left(r(t)z'(t)\right)^{p-1}}{\left(z(\tau(t))\right)^{p-1}}+\rho(t)\frac{\left(\left(r(t)z'(t)\right)^{p-1}\right)'}{\left(z(\tau(t))\right)^{p-1}}-(p-1)\rho(t)\frac{\left(r(t)z'(t)\right)^{p-1}z'(\tau(t))\tau'(t)}{\left(z(\tau(t))\right)^{p}}$$

وبما أن $\tau(t)\leq t$، وأن $r(t)z'(t)$ متناقص تماماً أياً كانت $t>t_2$، فإننا نجد أن $z'(\tau(t))\geq\frac{r(t)z'(t)}{r(\tau(t))}$، وبالتالي:

$$w'(t)\leq\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}w(t)+\rho(t)\frac{\left(\left(r(t)z'(t)\right)^{p-1}\right)'}{\left(z(\tau(t))\right)^{p-1}}-(p-1)\frac{\tau'(t)}{\rho^{\frac{1}{p-1}}(t)r(\tau(t))}w^{\frac{p}{p-1}}(t)$$

(10)

لنعرف الآن التابع V بالعلاقة $V(t)=\rho(t)\frac{\left(r(\theta(t))z'(\theta(t))\right)^{p-1}}{\left(z(\tau(t))\right)^{p-1}}$، نلاحظ أن $V(t)>0$ وذلك من أجل كل $t>t_2$، وباشتقاق التابع $V(t)$ نحصل على العلاقة الآتية:

$$V'(t)=\rho'(t)\frac{\left(r(\theta(t))\,z'(\theta(t))\right)^{p-1}}{\left(z(\tau(t))\right)^{p-1}}+\rho(t)\frac{\left(\left(r(\theta(t))z'(\theta(t))\right)^{p-1}\right)'}{\left(z(\tau(t))\right)^{p-1}}$$
$$-(p-1)\rho(t)\frac{\left(r(\theta(t))z'(\theta(t))\right)^{p-1}z'(\tau(t))\tau'(t)}{\left(z(\tau(t))\right)^{p}}$$

وبما أن $\tau(t)\leq\theta(t)$، وأن $r(t)z'(t)$ متناقص تماماً، فإننا نجد أن $z'(\tau(t))\geq\frac{r(\theta(t))z'(\theta(t))}{r(\tau(t))}$، وبالتالي:

$$V'(t)\leq\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}V(t)+\rho(t)\frac{\left(\left(r(\theta(t))z'(\theta(t))\right)^{p-1}\right)'}{\left(z(\tau(t))\right)^{p-1}}-(p-1)\frac{\tau'(t)}{\rho^{\frac{1}{p-1}}(t)r(\tau(t))}V^{\frac{p}{p-1}}(t)$$

(11)

نضرب(10) بـl^{p-2}، ونضرب(11) بـ$\frac{l^{*p-2}\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta'(t)}$ ثم نجمع العلاقتين، وبالاستفادة من التمهيدية 5 نحصل على:

$$l^{p-2}w'(t)+l^{*p-2}\frac{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta'(t)}V'(t)\leq-(p-1)\rho(t)Q(t)$$
$$+l^{p-2}\left[\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}w(t)-(p-1)\frac{\tau'(t)}{(\rho(t))^{\frac{1}{p-1}}r(\tau(t))}w^{\frac{p}{p-1}}(t)\right]$$
$$+l^{*p-2}\left[\frac{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta'(t)}\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}V(t)-(p-1)\frac{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta'(t)}\frac{\tau'(t)}{(\rho(t))^{\frac{1}{p-1}}r(\tau(t))}V^{\frac{p}{p-1}}(t)\right]$$

ومنه نحصل على الآتي:

$$l^{p-2}w'(t)+l^{*p-2}\left(\frac{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta'(t)}V(t)\right)'\leq-(p-1)\rho(t)Q(t)$$

$$+l^{p-2}\left[\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}w(t)-(p-1)\frac{\tau'(t)}{(\rho(t))^{\frac{1}{p-1}}r(\tau(t))}w^{\frac{p}{p-1}}(t)\right]$$

$$+l^{*p-2}[(\frac{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta'(t)}\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}+(\frac{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta'(t)})')V(t)$$

$$-(p-1)\frac{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta'(t)}\frac{\tau'(t)}{(\rho(t))^{\frac{1}{p-1}}r(\tau(t))}V^{\frac{p}{p-1}}(t)]$$

وحسب التمهيدية 1:

$$l^{p-2}w'(t)+l^{*p-2}\left(\frac{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta'(t)}V(t)\right)'\leq-(p-1)\rho(t)Q(t)$$

$$+l^{p-2}\frac{1}{p^p}\left(\frac{\rho_+'(t)}{\rho(t)}\right)^p\frac{\rho(t)\left(r(\tau(t))\right)^{p-1}}{\left(\tau'(t)\right)^{p-1}}+l^{*p-2}\frac{1}{p^p}\left(\frac{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta'(t)}\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}+\left(\frac{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta'(t)}\right)'\right)_+^p$$

$$\times\frac{\left(\theta'(t)\right)^{p-1}}{\left(a(\tau(t))\right)^{(p-1)^2}\varphi^{p-1}(t)}\frac{\rho(t)\left(r(\tau(t))\right)^{p-1}}{\left(\tau'(t)\right)^{p-1}}\leq-(p-1)\rho(t)Q(t)+\frac{\rho(t)\left(r(\tau(t))\right)^{p-1}}{\left(\tau'(t)\right)^{p-1}}\frac{1}{p^p}$$

$$\times[l^{p-2}\left(\frac{\rho_+'(t)}{\rho(t)}\right)^p+l^{*p-2}\frac{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta'(t)}\left(\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}+\left(\frac{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta'(t)}\right)'\frac{\theta'(t)}{\left(a(\tau(t))\right)^{p-1}\varphi(t)}\right)_+^p]$$

بما أن $p\geq 3$، وبمكاملة الطرفين نجد أن:

$$-\lim_{t\to\infty}\sup\int_{t_2}^{t}\rho(s)Q(s)-\frac{1}{(p)^p}\frac{\rho(s)r^{p-1}(\tau(s))}{(\tau'(s))^{p-1}}$$

$$\times[l^{p-2}\left(\frac{\rho_+'(s)}{\rho(s)}\right)^p+(l^*)^{p-2}\frac{\left(a(\tau(s))\right)^{p-1}\varphi(s)}{\theta'(s)}$$

$$\times\left(\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}+\left(\frac{\left(a(\tau(s))\right)^{p-1}\varphi(s)}{\theta'(s)}\right)'\frac{\theta'(s)}{\left(a(\tau(s))\right)^{p-1}\varphi(s)}\right)_+^p]ds\geq l^{p-2}\,w(t)$$

$$+l^{*p-2}\frac{\left(a\left(\tau(t)\right)\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta'(t)}V(t)-l^{p-2}\,w(t_2)-l^{*p-2}\frac{\left(a\left(\tau(t_0)\right)\right)^{p-1}\varphi(t_0)}{\theta'(t_0)}V(t_2)$$

وبالتالي ينتج لدينا حسب الفرض أن $l^{p-2}\,w(t)+l^{*p-2}\frac{\left(a\left(\tau(t)\right)\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta'(t)}V(t\,)\leq-\infty$، لكن بما أن $w(t)$ و $\frac{\left(a\left(\tau(t)\right)\right)^{p-1}\varphi(t)}{\theta'(t)}V(t)$ تابعان موجبان فإننا نحصل على تناقض.

نتيجة 1:

بفرض أن $\tau\left(\theta(t)\right)=\theta\left(\tau(t)\right)$ و $\tau(t)\leq\theta(t)$، وليكن $\rho(t)$ و $\varphi(\mathrm{t})$ تابعين موجبين تماماً، حيث أن $\rho(t)$ اشتقاقي من المرتبة الأولى على مجال $[t_0,+\infty[$، وبفرض أنه يوجد عددان $a_0\geq0$ و $\theta_0>0$ يحققان أنه من أجل كل $t\geq t_0$ فإن $a(t)\leq a_0<+\infty$ وأن $\theta'(t)\geq\theta_0$، عندئذٍ إذا تحقق الشرط الآتي:

$$\lim_{t\to+\infty}\sup\int^{\mathrm{t}}\rho(s)Q(s)-\frac{1}{(p)^p}\frac{\rho(s)r^{p-1}(\tau(s))}{(\tau'(s))^{p-1}}$$
$$\times[l^{p-2}\left(\frac{\rho'_+(s)}{\rho(s)}\right)^p+(l^*)^{p-2}\frac{(a_0)^{p-1}\varphi(s)}{\theta'(s)}$$
$$\times\left(\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}+\left(\frac{(a_0)^{p-1}\varphi(s)}{\theta_0}\right)'\frac{\theta_0}{(a_0)^{p-1}\varphi(s)}\right)_+^p]ds=+\infty \qquad (12)$$

فإن المعادلة (2) متذبذبة.

برهان:

نتبع الخطوات نفسها في برهان المبرهنة 1، إذ نضرب العلاقة (10) بـ l^{p-2}، ونضرب العلاقة(11) بـ $\frac{l^{*p-2}(a_0)^{p-1}\varphi(t)}{\theta_0}$ ثم نجمع العلاقتين، وبالاستفادة من العلاقة(6) في التمهيدية 5 نحصل على:

$$l^{p-2}w'(t)+l^{*p-2}\left(\frac{(a_0)^{p-1}\varphi(t)}{\theta_0}V(t)\right)'\leq-(p-1)\rho(t)Q(t)$$

$$+\frac{\rho(t)\left(r(\tau(t))\right)^{p-1}}{\left(\tau'(t)\right)^{p-1}}\frac{1}{p^p}[l^{p-2}\left(\frac{\rho'_+(t)}{\rho(t)}\right)^p$$
$$+l^{*p-2}\frac{(a_0)^{p-1}\varphi(t)}{\theta_0}\left(\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}+\left(\frac{(a_0)^{p-1}\varphi(t)}{\theta_0}\right)'\frac{\theta_0}{(a_0)^{p-1}\varphi(t)}\right)_+^p]$$

بما أن $p\geq3$، وبالمكاملة من t_2 إلى t نحصل على:

$$-\lim_{t\to\infty}\sup\int_{t_2}^t\rho(s)Q(s)-\frac{1}{p^p}\frac{\rho(s)r^{p-1}(\tau(s))}{(\tau'(s))^{p-1}}$$

$$\times[l^{p-2}\left(\frac{\rho'_+(s)}{\rho(s)}\right)^p+(l^*)^{p-2}\frac{(a_0)^{p-1}\varphi(s)}{\theta_0}$$

$$\times\left(\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}+\left(\frac{(a_0)^{p-1}\varphi(s)}{\theta_0}\right)'\frac{\theta_0}{(a_0)^{p-1}\varphi(s)}\right)_+^p]ds \geq l^{p-2}\,w(t)$$
$$+l^{*p-2}\,\frac{(a_0)^{p-1}\varphi(t)}{\theta_0}V(t)-l^{p-2}\,w(t_2)-l^{*p-2}\,\frac{(a_0)^{p-1}\varphi(t)}{\theta_0}V(t_2)$$

ومنه فإن $l^{p-2}\,w(t)+l^{*p-2}\,\frac{(a_0)^{p-1}\varphi(t)}{\theta_0}V(t)\leq-\infty$، ولكن التابعان $w(t)$ و $\frac{(a_0)^{p-1}\varphi(t)}{\theta_0}V(t)$ موجبين وبالتالي لدينا تناقض.

أمثلة:

نقدم فيما يأتي مثالاً عن معادلة تفاضلية نصف خطية، ولندرس تذبذبها وفق النتائج التي حصلنا عليها.

مثال١:

لتكن لدينا المعادلة الآتية:

$$\left(x(t)-\frac{1}{3}x(\tfrac{t}{2})\right)''+t^4f\left(x\left(\frac{t}{2}\right),\left(x(t)-\frac{1}{3}x(\tfrac{t}{2})\right)'\right)=0 \qquad (13)$$

علماً أن $p\geq 3$ و فردي، ولندرس تذبذب المعادلة (13) على المجال $[1,+\infty[$. بما أن التابعين $\rho(t)$ و $\varphi(t)$ الواردين في بناء المعيار (12) موجبان واختياريان، لذلك نختار $\varphi(t)\equiv\rho(t)\equiv 1$ ، كما نلاحظ أن $\tau(\theta(t))=\theta(\tau(t))$، وأن $\tau(t)=\theta(t)$، وأن $\int_1^{+\infty}\frac{1}{r(t)}dt=+\infty$، ومنه باستخدام المعيار (12)، نجد أن $\lim_{t\to\infty}\sup\int_1^t\left(\frac{s}{2}\right)^4 ds=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t^5-1}{80}\right)=\infty$ ، وبالتالي المعادلة (13) متذبذبة.

الاستنتاجات:

درسنا في هذا البحث تذبذب المعادلة التفاضلية نصف الخطية المعممة من المرتبة الثانية ذات الحد المحايد السالب مع بعض الشروط مثل $p\geq 3$ و فردي، كما أن $\tau(t)\leq\theta(t)$، واحتجنا أيضاً إلى الشرطين $\tau(\theta(t))=\theta(\tau(t))$ ، و $\int^{+\infty}\frac{dt}{r(t)}=+\infty$، وتوصلنا إلى معيار يكشف تذبذب المعادلة المدروسة، ثم قدمنا مثالاً يوضح أهمية النتيجة التي حصلنا عليها.

المراجع

[1] DOŠLÝ, O. *half-linear differential equation*. 2005.

[2] DOŠLÝ, O; BOGNÁR, G. *Conditional oscillation and principal solution of generalized half-linear differential equation*. Submitted, Debrecen, 2013 ,pp 459-451,.

[3] DOŠLÝ,O; ŘEZNÍČKOVÁ, J. *Conjugacy and principal solution of generalized half-linear second order differential equations*. Qual, no 5, 2012, pp 1-13.

[4] ELBERT, A. *On the half-linear second order differential equations*. Acta Math. Hungar. vol 49, 1987, pp 487–508.

[5] ELBERT,A. *Generalized Riccati equation for half-linear second order differential equations*. J´anos Bolyai, 1984 ,pp 227–249.

[6] ELBERT,A; KUSANO, T; TANIGAWA, T. *an oscillatory half-linear differential equation*. Vol 33, No 4, 1997, pp 355-361.

[7] FIŠNAROVÁ, S; MARÍK, R. *Modified Riccati technique for half-linear differential equations with delay*. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, No 64, 2014, pp 1-14.

[8] FIŠNAROVÁ, S; MARÍK, R. *Oscillation of half-linear differential equations with delay*, Abstr. Appl. Anal. Art. ID 583147, 2013, 6 pp.

[9] FIŠNAROVA, S; R. MARÍK. *Oscillation criteria for neutral second-order half-linear differential equations with applications to Euler type equations.* Boundary Value Problems, 2014, pp1-14.

[10] INJROU, S; KAROUM, R; MOALLA, M. *Oscillation criteria for Generalized Half Linear Second Order Differential Equations with neutral*, Tishreen university journal, vol 38, no (5), 2019.