مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (4) العدد (6) 2020
Tartous University Journal for Research and Scientific Studies- basic Sciences Series Vol. (4) No. (6) 2020

التّقارب والتّقارب المطلق لمتسلسلات فورييه− فرانكلين
في الفضاء المعمّم L

الدّكتور: نضال حسن *

الدكتور: منير مخلوف **

روان معلّا ***

(تاريخ الإيداع 27 / 10 / 2020 . قُبل للنشر 23 / 12 / 2020)

الملخّص:

درسنا في هذا البحث إحدى مسائل تقارب متسلسلات فورييه−فرانكلين وبشكل خاصّ التّقارب غير المشروط (المطلق) في الفضاء L حيث : $L = L^p(0,1) \cup H(\Delta)$

وقد تمّ الإثبات على صحّة المبرهنات الآتية:

مبرهنة (1): إنّ جملة دوالّ فرانكلين $F = \{f_n\,(x)\}_{n=1}^{\infty}$ تمثّل قاعدة غير مشروطة أو مطلقة في الفضاء المعمّم L.

مبرهنة (2): الشّرط اللّازم والكافي لتكون متسلسلة فورييه−فرانكلين متقاربة مطلقاً في الفضاء L هو أن تكون دالّة المجموع $f(x)$ منتمية إلى الفضاء $H(\Delta)$.

مبرهنة (3): إنّ جملة دوالّ فرانكلين هي قاعدة في الفضاء المعمّم L بحيث أنّه لأجل المجاميع الجزئيّة $S_N(f,x)$ الموافقة لمتسلسلة فورييه−فرانكلين للدّالّة $f(x)$ والمعطاة بالصّورة:

$$\sum c_n\,(f)\,f_n\,(x);\ c_n\,(f) = \int_0^1 f(x)f_n\,(x)dx$$

تحقّق المتراجحة الآتية:; $\|f - S_N(f,x)\| \le c.w\left(\frac{1}{N}\,,f\right); N = 1,2,\dots$

حيث c ثابت كيفي.

الكلمات المفتاحيّة: التّقارب، المطلق، سلسلة فورييه، جملة فرانكلين، جملة فابيرا−تشاودر، جملة هآر.

*أستاذ مساعد – قسم الرياضيّات−كليّة العلوم – جامعة طرطوس – طرطوس – سورية

**أستاذ مساعد – قسم الرياضيّات−كليّة العلوم – جامعة البعث – حمص – سورية

***طالبة دراسات عليا (ماجستير) – قسم الرياضيّات – كلّيّة العلوم-جامعة طرطوس – طرطوس – سورية

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (4) العدد (6) 2020
Tartous University Journal for Research and Scientific Studies- basic Sciences Series Vol. (4) No. (6) 2020

Convergence and absolute convergence of the Fourier - Franklin series In the generalized space L

Dr. Nidal Hasan*
Dr. Mounir Makhlouf**
Rawan Malla***

(Received 27/ 10/ 2020 . Accepted 23/12 /2020)

Abstract:

In this paper, we examined one of the problems of convergence of the Fourier - Franklin series, and in particular the unconditional convergence (absolute) in L space where:

$$L = L^p(0,1) \cup H(\Delta)$$

The following proofs have been proven to be correct:

Theorem (1):

The Franklin function: $F = \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ represents an unconditional or absolute rule in the generalized space L

Theorem (2):

The necessary and sufficient condition for the Fourier-Franklin series to be absolutely convergent in L space is that the function of the sum f (x) belongs to the space $H(\Delta)$.

Theorem (3):

The system of Franklin functions is a rule in the generalized space L, so that for the subtotals $S_N(f,x)$ corresponding to the Fourier-Franklin series of the function f (x) given by the picture:

$$\sum c_n(f)\, f_n(x);\ c_n(f) = \int_0^1 f(x) f_n(x)\,dx$$

The following inequality is achieved: $\|f - S_N(f,x)\| \le c.w\left(\frac{1}{N}, f\right); N = 1,2,\dots;$

Where c is a qualitative constant.

Keywords: convergence, absolute, Forrier-series ,Franklen-system , Vabber-Chaouder system ,Haar system .

* Assistant professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tartous University, Tartous, Syria
** Assistant professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Albaath University, Homs, Syria
*** Postgraduate student, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tartous University,Tartous,Syria

المقدّمة:

بدأت تتطوّر نظريّة المتسلسلات المتعامدة بشكل سريع إلى جانب نظريّة المتسلسلات المثلّثيّة التي لعبت دوراً هاماً في حلّ العديد من المسائل في العلوم الرّياضيّة والفيزيائيّة وغيرها من العلوم الأخرى ونتج عن هذا التّطوّر القدرة على معالجة تقارب المتسلسلات وإنّ الاهتمام بدراسة تقارب المتسلسلات سواء أكان تقارب غير مشروط أو تقارب بالقياس أو تقارب تقريباً في كلّ مكان، ظهر من خلال الاعتماد على جمل نظاميّة متعامدة وتامّة.

وقد تمّت دراسة تقارب المتسلسلات ومنها التقارب غير المشروط على بعض فضاءات الدّوالّ الشّهيرة مثل فضاء $L^p(0,1)$ حيث $1 \le p < \infty$ والفضاء $H(\Delta)$

قدّمت جملة فرانكلين مثالاً لقاعدة متعامدة في الفضاء $C(0,1)$ وهذه الجملة تتكوّن من دوالّ خطّيّة مستمرّة، والدّراسة المنهجيّة لجملة فرانكلين تعود إلى أبحاث Ciesielski's [7][8][9] وبعد ذلك أصبحت هذه الجملة مفيدة جدّاً من أجل حلّ الكثير من المسائل.

أهمّيّة البحث وأهدافه:

تكمن أهمّيّة هذا البحث في دراسة التّقارب المطلق (الغير مشروط) لمتسلسلات فورييه–فرانكلين على الفضاء المعمّم L

ويهدف هذا البحث إلى:

- دراسة سلوك (أو طبيعة) متسلسلات فورييه–فرانكلين من حيث التّقارب أو التّقارب المطلق في الفضاء المعمّم L.

تعاريف ومفاهيم أساسيّة:

تعريف1:[3]

يقال بأنّ الدّالّة $a(x)$ المعرّفة على المجال $\Delta=[0,1]$ عنصر مميّز للمجال Δ إذا وجد مجال مثل $I \subset \Delta$ بحيث يكون:

-1 $supp\ a(x) \subset I$ حيث $supp\ a(x) = \{x\,;a(x) \neq 0\}$

-2 $\int_I a(x)dx = \int_0^1 a(x)dx = 0$

-3 $\|a\|_\infty \le |I|^{-1}$

تعريف2:[3]

إنّ الفضاء $H(\Delta)$ هو مجموعة كل الدوالّ $f \in L^1(0,1)$ والتي تكتب بالشّكل:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} M_k a_k(x);\ \sum_{k=0}^{\infty}|M_k| < \infty$$

حيث $k = 0,1,\dots.$ و $a_k(x)$ هو عنصر مميز للمجال Δ

وهو فضاء باناخ بالنّسبة للنّظيم:

$$\|f\|_{H(\Delta)} = \inf \sum_{k=0}^{\infty}|M_k|$$

عندئذٍ يكون $\|f\|_1 \le \|f\|_{H(\Delta)}$

تعريف 3:[3]

الفضاء $BMO(\Delta)$ هو مجموعة كلّ الدّوالّ $f \in l^1(0,1)$ التي تحقّق الشّرط:

$$R_\Delta(f) = \sup\left\{ |I|^{-1} \int_I |f(x) - f_I|\, dx \right\} < \infty$$

تعريف 4:[4][6]

الفضاء $L^p(0,1)$ حيث $1 \le p < \infty$ هو مجموعة كلّ التّوابع $f(x)$ المعرّفة والمقيسة على المجال $(0,1)$ بحيث يكون $\int_0^1 |f(x)|dx < \infty$.

تعريف 5:[4][6]

تدعى جملة الدّوالّ المنظّمة والتّامّة على المجال $[0,1]$ $\{H_m\}_{m=1}^{\infty}$ في الفضاء $L\,(0,1)$ جملة هآار وتعرف دوالّ هآار $H_m(t)$ على المجال $[0,1]$ بالشكل الآتي

$$H_0^{(0)}(t) = 1\,; 0 \le t \le 1$$

$$H_0^{(1)}(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < \frac{1}{2} \\ 0 & t = \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} < t \le 1 \end{cases}$$

$$H_n^{(k)} = \begin{cases} 0 & ; 0 \le t < \frac{k-1}{2^n} \\ \frac{\sqrt{2^n}}{2} & ;\ t = \frac{k-1}{2^n} \\ \sqrt{2^n} & ;\ \frac{k-1}{2^n} < t < \frac{2k-1}{2^{n+1}} \\ 0 & ; t = \frac{2k-1}{2^{n+1}} \\ -\sqrt{2^n} & ;\ \frac{2k-1}{2^{n+1}} < t < \frac{k}{2^n} \\ \frac{-\sqrt{2^n}}{2} & ; t = \frac{k}{2^n} \\ 0 & ;\ \frac{k}{2^n} < t \le 1 \end{cases}$$

لنضع اختصاراً:

$$H_1(t) = H_0^{(0)}(t) = 1\ ; 0 \le t \le 1$$
$$H_m(t) = H_n^{(k)}(t)\,; 0 \le t \le 1$$
$$m = 2^n + k\,; 1 \le k \le 2^n\,; n = 0,1, \dots$$

وهذه الدوال تشكّل جملة متعامدة ومنظمة وتامّة على المجال $[0,1]$

تعريف 6 :[5][3][2]

إنّ جملة فابيرا تشاودر هي جملة الدّوالّ $\phi = \{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}; x \in [0,1]$

$$\phi_0(x) = 1$$

$$\phi_1(x) = x\ ;\ \forall\, x \in [0,1]$$

وعندما $n = 2^k + i$ حيث $k = 0,1,\dots$ و $i = 1,\dots$

تكون:

$$\phi_n(x) = \varphi_k^i = \begin{cases} 0\ ;\ x \in \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right) \\ 1\ ;\ x = \frac{2i-1}{2^{k+1}} \end{cases}$$

وتكون هذه الدّوالّ خطّيّة ومستمرّة على المجالين:

$$\left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{2i-1}{2^{k+1}}\right]\ ;\ \left[\frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{i}{2^k}\right]$$

ملاحظة:

يمكن تعريف جملة فابيرا–تشاودر بمكاملة دوالّ هآار وبصورة أدقّ يمكن التّعبير عن ذلك كما يلي:

$$\phi_1(x) = \int_0^1 H_1(t)dt\ ;\ \phi_n(x) = 2\,\|H_n\|_\infty \int_0^x H_n(x)\ dt\ ; n = 2,3,\dots.$$

تعريف 7:[1][2] [3][5]

لتكن $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ جملة فابيرا–تشاودر ولتكن:

$$f_0(x) = \varphi_0(x)$$

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \mu_i^{(n)} \varphi_i(n)\ ;\ \mu_i^{(n)} > 0$$

$$< f_n, \varphi_i > = 0\ ; \qquad < f_n, f_n > = 1 \qquad ; n = 0,1,\dots.\ ; \quad i = 0,1,\dots.$$

عندئذٍ إنّ الجملة المتعامدة النّظاميّة $F = \{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ دوالّ وحيدة القيمة معروفة بالعلاقات السّابقة ونسمّيها جملة فرانكلين وهي جملة تامّة في الفضاء $L^p(0,1)$ حيث $1 \le p < \infty$

لنعرّف الآن الفضاء المعمّم $L = L^p(0,1) \cup H(\Delta)$ حيث $1 \le p < \infty$

فنجد أنّ:

$$\|f\|_{H(\Delta)} \le \|f\|_L$$

$$\|f\|_p \le \|f\|_L$$

$$\|f\|_L \le \frac{1}{2}\|f\|_p + \frac{1}{2}\|f\|_{H(\Delta)}$$

تعريف 8:[5][6]

متراجحة هولدر:

ليكن $p > 1$ و$q < \infty$ بحيث أنّ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ وليكن $f \in L^p$ و $g \in L^p$ عندئذٍ تتحقّق المتراجحة الآتية:

$$\int_0^1 |f_g| \, dx \le \|f\|_p \, \|g\|_q$$

تعريف 9:[4][6]

نقول أنّ جملة الدّوالّ $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ متعامدة نظاميّة (منظّمة) في الفضاء H إذا كان:

$$\langle \varphi_n , \varphi_m \rangle = \begin{cases} 1 ; & n = m \\ 0 ; & n \neq m \end{cases}$$

وبشكل خاصّ نقول أنّ جملة الدّوالّ $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ في الفضاء $L^2[a,b]$ متعامدة نظاميّة إذا كان :

$$\int_a^b \varphi_n(n)\varphi_m(n) = \begin{cases} 1 & ; n = m \\ 0 & ; n \neq m \end{cases}$$

تعريف 10:[4][6]

لأجل العدد الطّبيعي $N = 1,2, \dots$، إنّ الفضاء $G_N = G_N(\emptyset)$ هو فضاء كثيرات الحدود بالنّسبة إلى الجملة فابيرا–تشاودر المعطاة بالشّكل:

$$P_N = \sum_{n=0}^{N} a_n \varphi_n(x)$$

ويتطابق مع الفضاء l_N المعرّف كما يلي:

$$l_1 = \{ f \in c(0,1); \, f^{``}(x) = 0 \, ; x \in (0,1)\}$$

$$l_\lambda = \{ f \in c(0,1) \, ; \, f^{``}(x) = 0 \, ;$$
$$x \in \left(\underset{S=1}{\overset{2l}{U}} \Delta_{K+1}^{S} \right) \bigcup \left(\underset{S=2i+1}{\overset{2^K}{U}} \Delta_{K}^{S} \right) \}$$

حيث: $N = 2^K + i \, ; i = 1,2, \dots , 2^K \, ; k = 0,1,2, ..$

تعريف 11:[4][6]

ترمز $L_\infty[a,b]$ إلى مجموعة التّوابع $f = f(x)$ المعرّفة والمقيسة على المجال $[a,b]$ بحيث يكون $ess \, sup_{s\in[a,b]} |f(x)| < \infty$ حيث أنّ:

$$ess \, sup_{s\in[a,b]} |f(x)| = \inf[\, C: \mu(\, x \in [a,b]: |f(x)| \ge C)] = 0$$

حيث ترمز $\mu(0)$ لقياس ليبيغ للمجموعة A

وهي فضاءات باناخ مع النّظيم ; $1 \le p < \infty, \|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$

$$\|f\|_\infty = ess \, sup_{s\in[a,b]} |f(x)|$$

مبرهنة1:

إنّ جملة فرانكلين تمثّل قاعدة غير مشروطة في الفضاء L.

الإثبات:

هنا نميّز حالتين:

الحالة الأولى: إنّ جملة فرانكلين تمثّل قاعدة غير مشروطة (مطلقة) في $H(\Delta)$ وذلك لأنّ جملة فرانكلين هي جملة تامّة في الفضاء $H(\Delta)$ وهذا ينتج من حدوديّة دوالّ هذه الجملة في الفضاء المذكور والمتراجحة

$$\|f\|_{H(\Delta)} \leq \|f\|_2$$

وحسب خواصّ عناصر الفضاء $L^\infty(0,1)$ والنّظيم المعرّف على $H(\Delta)$ نكون جملة فرانكلين f تامّة وبهذا الشّكل يكفي أن نبيّن بأنّ لكلّ دالّة $f \in H(\Delta)$ ولكلّ $\varepsilon_n = \pm 1$ حيث $x = 0,1, \ldots.$

يكون

$$\|T_{\varepsilon,N} f\|_{H(\Delta)} \leq \|f\|_{H(\Delta)}$$

$$T_{\varepsilon,N}(f,x) = \sum_{n=0}^{N} \varepsilon_n c_n(f) f_n(x)$$

حيث c ثابت كيفي و $c_n(f) = \int_0^1 f(x) f_n(x) dx$ حيث $n = 0,1, \ldots.$ معاملات فورييه فرانكلين للدّالّة $f(x)$ ، ومن جهة ثانية نلاحظ أنّ:

$$(f, f_n) = \int_0^1 f(x) f_n(x) dx$$

حيث $f_n \in L^\infty(0,1)$

$$\|T_{\varepsilon,N} f\|_{H(\Delta)} \leq c\, sup \|y\|_{BM_0(\Delta)} \leq 1 \left| \int_0^1 T_{\varepsilon,N}(f,x)\, g(x) dx \right|$$

ولكن على اعتبار أنّ جملة فرانكلين متعامدة ونظاميّة فإنّ:

$$\left| \int_0^1 T_{\varepsilon,N}(f,x)\, g(x) dx \right| = \left| \sum_{n=0}^{N} \varepsilon_n c_n(f) c_n(g) \right| = \left| \int_0^1 f(x)\, T_{\varepsilon,N}(g,x)\, dx \right|$$
$$\leq c\, \|f\|_{H(\Delta)} \|T_{\varepsilon,N}(g)\|_{BM_0(\Delta)}$$

والآن بقي التحقّق من أنّ كلّ دالّة $g \in BM_0(\Delta)$ ولكلّ متتالية $\varepsilon_n = \pm 1$ حيث $n = 0,1,2, \ldots.$ لدينا:

$$\|T_{\varepsilon,N}(g)\|_{BM_0(\Delta)} \leq c\, \|(g)\|_{BM_0(\Delta)} \qquad ; N = 1,2, \ldots.$$

وهذه العلاقة تنتج بصورة مباشرة من المبرهنة 11 [14]

إنّ القيمة $\|(g)\|_{BM_0(\Delta)}$ لا تتعلّق بإشارة الأعداد $C_n(g)$ ومنه يتمّ المطلوب.

الحالة الثّانية:

جملة فرانكلين تمثّل قاعدة غير شرطيّة(مطلقة) في $L^p(0,1)$ حيث $1 \le p < \infty$ وذلك لأنّه في هذه الحالة يكفي أخذ $1 < p < 2$ ، والأمر الذي يقضي وجود ثابت $c = c_p$

بحيث: $\left\|T_{\varepsilon,N}(f)\right\|_p \le c_p \,\|(f)\|_p$

وذلك لأجل أية دالّة $f \in L^p(0,1)$ ولأجل أيّ مؤثّر $T_{\varepsilon,N}(f)$:

$$\left\|T_{\varepsilon,N}(f)\right\|_{H(\Delta)} \le c\,\|(f)\|_{H(\Delta)}$$

وينتج بأنّ $f \in L^1(0,1)$ و $y > 0$

$$T_{\varepsilon,N}(f,x) = \sum_{n=0}^{N} \varepsilon_n c_n(f) f_n(x); \qquad \varepsilon_n = \pm 1\,; n = 0,1,\dots$$

ومن جهة ثانية، بما أنّ هذه جملة فرانكلين تشكّل جملة نظاميّة فإنّ:

$$m\{\, x \in (0,1);\ \left|T_{\varepsilon,N}(f,x) > y\,\right|\} \le \frac{1}{y}\left\|T_{\varepsilon,N}(f)\right\|_1 \le \frac{1}{y}\left\|T_{\varepsilon,N}(f)\right\|_{H(\Delta)} \le \frac{c}{y}\,\|(f)\|_{H(\Delta)}$$
$$\le \frac{c}{y}\,\|S^*(f)\|_1$$

حيث $S^*(f,x) = sup_{1\le N<\infty}|S_N(f,x)|)$ و

$$S_N(f,x) = \begin{cases} |\Delta_n^+|^{-1} \displaystyle\int_{\Delta_n^+} f(t)dt\ ; x \in \Delta_n^+ \\ |\Delta_n^-|^{-1} \displaystyle\int_{\Delta_n^-} f(t)dt\ ; x \in \Delta_n^- \end{cases}$$

$$\Delta_n^+ = \left(\Delta_k^i\right)^+ = \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{2i-1}{2^{k+1}}\right) = \Delta_{k+1}^{2i-1}$$
$$\Delta_n^- = \left(\Delta_k^i\right)^- = \left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{i}{2^k}\right) = \Delta_{k+1}^{2i}$$

حيث: $N = 2,3,\dots$

ومن جهة أخرى كون جملة فرانكلين نظاميّة متعامدة يكون:

$$m\{\, x \in (0,1);\ \left|T_{\varepsilon,N}(f,x) > y\,\right|\} \le \frac{1}{y^2}\left\|T_{\varepsilon,N}(f)\right\|_2^2 \le \frac{1}{y^2}\,\|(f)\|_2^2$$

وبالتّالي يتمّ المطلوب.

مما تقدّم نحصل على أنّ جملة فرانكلين هي قاعدة غير مشروطة في الفضاء المعمّم L و هذا يكون إثبات المبرهنة (1).

مبرهنة2:

الشّرط اللّازم والكافي لتكون متسلسلة فورييه –فرانكلين متقاربة بشكل غير مشروط (مطلق) في الفضاء L هو أن يكون دالّة الجموع $f(x)$ تنتمي إلى $H(\Delta)$.

لإثبات صحّة هذه المبرهنة نحتاج إلى التّمهيديّة الآتية.

التّمهيديّة:

لأجل أي عدد طبيعي $n = 1,2,3,....$ يمكن إيجاد عدد طبيعي ما s_0 بحيث يكون:

$$\int_{H_n} f_n^2(x)dx \geq \frac{1}{2}$$

حيث $U_n = \bigcup_{\substack{1 \le j \le 2^k \\ |i-j| \le s_0}} \Delta_k^i$

$$n = 2^k + i \; ; \; k = 0,1,.....; \; i = 1,2,.....,2^k$$

إثبات التّمهيديّة:

حسب العلاقة:

$$\int_I f_m^2(x)dx \leq c\, q^{2m\, d(\Delta_m, I)}$$

$$I = (\alpha, \beta) \subset (0,1) \; ; \; m = 1,2,...$$

و $q < 1$

نجد أنّ :

$$\int_{(0,1)/U_n} f_m^2(x)dx \leq 2c\, q^{n s_0 2^{-k}} \leq 2c\, q^{s_0} < \frac{1}{2}$$

و إذا كان s_0 كبير بقدر كافٍ مع الأخذ بالحسبان أنّ:

$$\int_0^1 f_m^2(x)dx = 1$$

فإنّنا نحصل على المطلوب ويكون من المناسب أن نضع أيضاً $U_0 = U_1 = (0,1)$ واعتبار العدد s_0 ثابت فنلاحظ بأنّ $U_n \; ; n = 0,1,...$ هو عبارة عن مجال جزئي من المجال $(0,1)$ ويكون قياس المجال:

$$|\Delta_n| \leq m|U_n| \leq (2\, s_0 + 1)|\Delta_n| \equiv c_0|\Delta_n| \; ; n = 0,1,....$$

وبذلك تمّ إثبات التّمهيديّة.

إثبات المبرهنة (2):

إذا كانت $f \in L$ نميّز حالتين:

إذا كانت $f \in L^p(0,1)$ حيث $1 \leq p < \infty$ فإنّ حسب المبرهنة:

الشرط اللازم والكافي لنكوّن متسلسلة فرانكلين $\sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(x)$ متقاربة بشكل غير مشروط في الفضاء $L'(0,1)$ هو أن يكون مجموعها $f(x)$ ينتمي إلى الفضاء $H(\Delta)$.

-أمّا إذا كانت $f \in H(\Delta)$ فإنّ المتسلسلة الموافقة لها متقاربة مطلقاً في $H(\Delta)$ أي في الفضاء $l^1(0,1)$ كحالة خاصّة من الفضاء $l^p(0,1)$ حيث

$p = 1$

مبرهنة 3:

لتكن جملة فرانكلين هي قاعدة للفضاء L بحيث أنّه لأجل المجاميع $S_N(f,x)$ لمتسلسلة فورييه- فرانكلين للدّالّة $f(x)$ الّتي تنتمي إلى $H(\Delta)$ والمعطاة بالشّكل:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(f) f_n(x) \qquad ; \; c_n(f) = \int_0^1 f(x) f_n(x) dx$$

تحقّق المتراجحة الآتية:

$$\|f - S_N(f)\|_L \le C\, W\left(\frac{1}{N}, f\right); \quad N = 1,2, \ldots$$ حيث C ثابت كيفيّ.

لإثبات هذه المبرهنة نحتاج إلى التّمهيديّات الآتية:

تمهيديّة1:

الشّرط اللّازم والكافي لتكون جملة الدّوالّ (جملة فابيرا-تشاودر) $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ قاعدة للفضاء L هو أن تتحقّق الشّروط الآتية:

1- الجملة $\{\varphi_n\}$ في الفضاء L

2- الجملة $\{\varphi_n\}$ أصغريّة

3- يمكن إيجاد عدد حقيقي موجب $M > 0$ بحيث يكون لكلّ عنصر $f \in L$ تتحقّق :

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} (f, \tilde{\varphi}_n) \varphi_n \right\|_L \le M \|f\|_L \,; N = 1,2, \ldots.$$

حيث $\tilde{\varphi}_n$ جملة مرافقة لـ φ_n

تمهيديّة 2:

إذا كانت $\phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ جملة نظاميّة متعامدة وقاعدة في الفضاء $c(0,1)$ تكون قاعدة في الفضاء المعمّم L .

إثبات التّمهيديّة 2:

حسب التّمهيديّة (1) نلاحظ أنّ الجملة المفروضة تامّة في الفضاء L وبالتّالي تكون تامّة في الفضاء $c(0,1)$ وأصغريّة في الفضاء L و للتّأكّد من تحقّق الشّرط الثّالث سوف نستخدم متراجحة هولدر:

$$S_N\ (f,t) = \sum_{n=1}^{N} C_n\ (f) \varphi_n\ (t) = \int_0^1 f(x) k_N(x,t) dx \,; t\ \in (0,1)$$

$$k_N\ (x,t) = \sum_{n=1}^{N} \varphi_n\ (x)\ \varphi_n\ (t)\,;\ \ x\,, t\ \in (0,1)\ \,; N = 1,2, \ldots.$$

نجد أنّه لكلّ $f \in L$:

$$|S_N(f,t)| \le \int_0^1 |k_N(x,t)|^{\frac{1}{q}} |k_N(x,t)|^{\frac{1}{p}} |f(x)|\, dx$$
$$\le \left\{ \int_0^1 |k_N(x,t)| \right\}^{\frac{1}{q}} \left\{ \int_0^1 |k_N(x,t)|\, |f(x)|^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}}$$
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

ومن العلاقات السّابقة والعلاقة الآتية:

$$\|L_N(t)\| \le M \ < \infty \ ; N = 1,2, \dots.$$

حيث L_N دوالّ ليبيغ للجملة ϕ نجد أنّ لكلّ دالّة $f\epsilon L$ يكون :

$$\int_0^1 |S_N(f,t)|^p \ dt \ \le \ M^{\frac{p}{a}} \int_0^1 \int_0^1 |k_N(x,t)||f(x)|^p \ dx\, dt$$
$$= \ M^{\frac{1}{q}} \int_0^1 |f(x)|^p \int_0^1 |k_N(x,t)| \ dt\, dx \ \le \ M^{\frac{p}{q+1}} \int_0^1 |f(x)|^p \, dt$$

وبذلك تمّ الإثبات.

إثبات المبرهنة 3:

استناداً إلى المبرهنة (1.9) و (6) [14]وحسب المتراجحة:

تكون جملة فرانكلين قاعدة في الفضاء $L^p(0,1)$ حيث $1 \le p < \infty$ ويكون:

$$\|S_N\ (f,x)\|_p \le M\|f\|_p \ ; f \in L^p(0,1); 1 \le p < \infty$$

محقّق.

حيث M ثابت كيفيّ.

وإذا كان $f(x) \in L$ وهنا نميّز حالتين:

1- إذا كان $f \in L^p(0,1) \subset L$ حيث $1 \le p < \infty$ و $g \ \in \ G_N$ وبملاحظة أنّ $S_N(g,x) =$ $g(x)$ فيكون لدينا:

$$\|f - \ S_N(f,x)\|_p \le \ \|f - g\|_p + \ \|g - \ S_N(f,x)\|_p = \ \|f - g\|_p + \ \|S_N(f - g,x)\|_p$$
$$\le (M + 1)\ \|f - g\|_p$$

وبالتّالي لإثبات صحّة العلاقة (1) من أجل هذه الحالة يكفي التّحقّق من أنّ:

$$E_N(f) = \ inf_{g\in G_N} \|f - g\|_p \le BW_p\left(\frac{1}{N}\ ,f\right) \ (3)$$

الآن لنثبت دالّة $f \in L^p(0,1)$ وعدد k حيث $k = 0,1,2, \dots.$ وحسب المبرهنة (3.3)[14] فينتج أنّ:

$$\|\theta(x) - f(x)\|_p \ \le \ c^1 W_p(2^{-k}, f) \quad (4)$$

حيث $\theta(x) = \ 2^k \int_{\Delta_k^i} f(t)dt = \ \theta_i$

وذلك لأجل $x \ \in \ \Delta_k^i = (\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k})$ حيث $i = 1,2, \dots, 2^k$ و $k = 0,1,2, \dots$

الآن لنأخذ الدّالّة $g(x) \in G_{2^k} = E_{2^k}$ حيث $k \geq 1$

وحيدة القيمة والمعرّفة بالشّروط الآتية:

$$g\left(\frac{i}{2^k}\right) = \theta_i \; ; \quad i = 1,2, \ldots\ldots, 2^k \;\; ; k = 0,1,2, \ldots$$

$$; g(0) = \theta_1$$

عندئذٍ $g(x) = \theta_1$ عندما $x \in \Delta_k^1$ و

$$g(x) = 2^k(\theta_i - \theta_{i-1})\left(x - \frac{i-1}{2^k}\right) + \theta_{i-1} \; ; i = 2,3, \ldots\ldots, 2^k$$

k

وبالتّالي فإنّ:

$$\|g - \theta\|_p^p = \sum_{i=1}^{2^k} \int_{\Delta_k^i} |g(x) - \theta_i|^p \, dx$$

$$= \sum 2^{kp} |\theta_i - \theta_{i-1}|^p \, \frac{1}{p+1} \, 2^{-k(p+1)}$$

$$= \frac{1}{(p+1)2^k} \sum_{i=2}^{2^k} \left| 2^k \int_{\Delta_k^i} f(t)dt - 2^k \int_{\Delta_k^{i-1}} f(t)dt \right|^p$$

$$\leq \frac{1}{p+1} \, 2^{k(p-1)} \sum_{i=2}^{2^k} [\int_{\Delta_k^{i-1}} |f(t + 2^{-k}) - f(t)| \, dt \,]^p$$

$$\|g - \theta\|_p^p \leq \frac{1}{p+1} 2^{k(p-1)} \sum_{i,2^k}^{2^k} 2^{\frac{-kp}{p}} \int_{\Delta_k^{i-1}} |f(t + 2^{-k})|^p \, dt$$

$$\leq \frac{1}{p+1} \int_0^{1-2^{-k}} |f(t + 2^{-k}) - f(t)|^p \;\; dt \;\; \leq \frac{1}{p+1} \, W_p^p \;\, (2^{-k}, f)$$

ومن هذا والعلاقة (4) تنتج العلاقة (3):

لأجل ; $k = 0,1,2, \ldots . \; N = 2^k$

وأخيراً إذا كان $2^k < N < 2^{k+1}$ باستخدام المتراجحة:

$$W_p(2S, f) \leq 2W_p\,(S, f) > 0$$

نحصل على:

$$E_N(f) \leq \; E_{2^k}(f) \leq \; B^1 W_p\left(\frac{1}{2^k}, f\right) \leq 2B^1 W_p\left(\frac{1}{2^{k+1}}, f\right) \leq BW_p\left(\frac{1}{N}, f\right)$$

أمّا إذا كان $f(x) \in H(\Delta)$ فالمتراجحة 2 تكون محقّقة أيضاً مع الأخذ بالحسبان أنّه عندما $p = 1$

يكون:

$$\|f - S_N(f)\|_1 \;\leq C \; W_1 \, \left(\frac{1}{N} \, , f\right); N = 1,2, \ldots ..$$

وبالتّالي ممّا تقدّم يمكننا القول بأنّ جملة الدّوالّ فرانكلين $F = \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ هي قاعدة للفضاء المعمّم L والمجاميع الجزئيّة $S_N(f,x)$ متسلسلة فورييه–فرانكلين للدّالّة $f \in L$
تحقّق المتراجحة (1) وبهذا يكون إثبات المبرهنة (3) قد تمّ.

بعض النّتائـج المهمّة:

إنّ جملتي دوالّ فرانكلين وهآر هما قاعدتان متكافئتان في الفضاء $l^p(0,1)$ حيث $1 \le p < \infty$
وذلك لأنّ لأجل أيّ تركيب خطّيّ من الشّكل:

$$p(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n f_n(x)$$

بالنّسبة لجملة فرانكلين يكون:

$$C^{`} \left\| \sum_{n=0}^{m} a_n\ H_{n+1} \right\|_p = \|p\|_p = C \left\| \sum_{n=0}^{m} a_n\ H_{n+1} \right\|_p$$

مع مراعاة أنّ جملة دوالّ فرانكلين تمثّل قاعدة غير شرطيّة(مطلقة) للفضاء $L^p(0,1)$ حيث
$1 \le p < \infty$ و $C = C^{`}$ثوابت كحالة خاصّة

–إذا كانت الّدالّة $f(x) \in H(\Delta)$ فإنه بالإمكان تمثيل هذه الدّالّة بمتسلسلة فورييه–فرانكلين متقاربة بشكل غير شرطيّ (مطلق) في الفضاء $L^1(0,1)$ وهذا ينتج من كون العناصر التي تنتمي إلى الفضاء $H(\Delta)$ تحقّق شروط المبرهنة (19) [14]

–إذا كانت $b(x)$ دّالّة من الفضاء $BMO(\Delta)$ حيث :

$$b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n f_n(x) \in BMO(\Delta)\ ;\ \|b\|_{BMO(\Delta)} \le 1$$

فإنّ:

$$\sum_{n \in \Omega_\mu} b_n^2 \le c.m(E_{r-1}) - \|b\|_{BMO(\Delta)}^2\ ; \quad n = 0,1, \dots \dots$$

حيث c ثابت كيفيّ

وكما أنّ $\Omega_\mu = \{ x \in (0,1); p(f,x) > 2^n \}$

$$E_r = \{x \in (0,1); M\left(H_{\Omega \mathrm{r}}, x\right) > \frac{1}{4c_0}\}$$

$$p(f,x) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2(f)\ f_n^{\,2}(x) \right\} \in l^1(0,1);\ \|f\|_{H(\Delta)} \le c.\|p(f)\|_1$$

$$\Omega_r = \left\{ n: m(U_n \cap \Omega_{r-1}) > \frac{|\Delta_n|}{4}\ b\ m(U_n \cap \Omega_r) \le \frac{|\Delta_n|}{4} \right\}$$

$$U_n = U_{\substack{1 \le j \le 2^k \\ |i-j| \le s_0}} \Delta_k^i$$

حيث s_0عدد طبيعي و c_0 ثابت كيفي.

المراجع:

1. Чисельский, Симон, Шёлин (Ciesielski Z, Simon P, Sjolin P). (1977). *Equivalence of Haar and Franklin bases in L_p spaces*. Studia Math, 60, 195-210.

2. Шаудер (Schauder J.). (1927). *Zur Theorie stetiger Abbildungen in Functionalraumen. Math Zeit*, 26, 47-65.

3.KATION, B. C., SAAKION, A. A. (1984). *Perpendikulär Séries(pp.495)*. Moscow Science.

4. NATANSON, E. P. (1972). *Theory of real variable functions(pp.399*). Moscow.

5. КОНТОРОВИЧ Л. В., АКИЛОВ Г. Л. (1977). *Функциональный Анализ. Издательства (pp.739).* Наука, Москва.

6. ZYGMUND. A. (1965). *Trigonometric series (pp.615*). Moscow Peace.

7. G.G Gevorkyan. (2016). "*On the uniqueness of series in the Franklin System,"* Mat.Sb.207(12), 30-53

8. G.G Gevorkyan. (2018)." *Uniqueness theorems for Franklin series converging to integrable functions".* Mat.Sb.209(6),25-46.

9. G.G Gevorkyan.(2017)" *Uniqueness theorem for multiple Franklin series"*.Mat.Zametki 101(2),199-210