|  |
| --- |
| **مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية \_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (5) العدد (1) 2021**  **Tartous University Journal for Research and Scientific Studies- Basic Sciences Series Vol. (5) No. (1) 2021** |

**دراسة ترافق المعادلات التفاضلية العادية الخطية من المراتب العليا**

**نزار محمد حسن\***

**(تاريخ الإيداع** **3 / 1 / 2021** . **قُبل للنشر 3 / 2 / 2021)**

**ملخص**

تم في هذا البحث إثبات المبرهنة الآتية:

إذا كان:  و  و  وذلك من أجل: . وأيضاً إذا وجد , بحيث  وكان:



فإن المعادلة التفاضلية: 

مترافقة من المرتبة  في المجال , حيث  دالة قابلة للمكاملة.

**كلمات مفتاحية**: المعادلات التفاضلية الخطية , المترافقة

د. نزار محمد حسن – أستاذ مساعد – قسم العلوم الأساسية - كلية الهندسة التقنية – جامعة طرطوس

|  |
| --- |
| **مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية \_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (5) العدد (1) 2021**  **Tartous University Journal for Research and Scientific Studies- Basic Sciences Series Vol. (5) No. (1) 2021** |

**Studying o conjugacy of high-order**

**liner ordinary differential equations**

**Nizar Hasan\***

**(Received 3 / 1 / 2021 . Accepted 3 / 2 / 2021 )**

**Abstract**

In this research paper we proved the theorem:

Let  and  for  . If, in addition, there exist  such that  and:



Then the differential equation: 

Is  conjugate in , where  is a integrable function.

**Key words** Linear Differential Equation , Conjugate

\*Associate Professor, Department of Basic Sciences, Faculty of Technical Engineering University, Tartous, Syria

**مقدمة البحث:**

إن دراسة ترافق المعادلات التفاضلية الخطية من المراتب العليا كان لها المكانة الأولى في أعمال كثير من العلماء [1] و [2] ; فقد درسوا ترافق المعادلة التفاضلية التالية:

 وذلك من أجل 

سنعرض بعض الرموز اللازمة لتوضيح محتوى هذا البحث:

 مجموعة الأعداد الحقيقية ,  فضاء الدوال القابلة للمكاملة على المجال  من  ,  فضاء الدوال القابلة للمكاملة محلياً على المجال  ; حيث  أي أن الدالة قابلة للمكاملة على كل مجموعة جزئية متراصة من المجال ,  دالة قابلة للمكاملة.

لندرس المعادلة التفاضلية الآتية:

(1) 

حيث  و  و  مجال .

**تعريف:** نقول عن المعادلة (1) أنها مترافقة في المجال , إذا وجد لها حل غير صفري يملك  صفراً على الأقل في .

**تعريف:** نقول عن المعادلة (1) أنها مترافقة من المرتبة  في المجال , إذا وجد لها حل  غير صفري يحقق الشروط التالية:



حيث:  و .

**تعريف:** نقول عن مجموعة ما إن قياسها موجب (positive measure), إذا كان قياسها أكبر من الصفر.

**أهدف و أهمية البحث:**

يهدف البحث إلى دراسة ترافق المعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة :



حيث  دالة قابلة للمكاملة. وإيجاد الشروط المثلى لهذه الدراسة, لتخفيف بعض القيود على المسائل المطروحة, بحيث يمكن الاستفادة من هذه النتائج في دعم وتطوير البحث العلمي.

**طرائق البحث ومواده:** يقع هذا البحث ضمن اختصاص الرياضيات النظرية وبشكل خاص ضمن التحليل الرياضي والمعادلات التفاضلية.

**المناقشة والنتائج :**

لنفرض أولاً أن:  و .

اعتماداً على دالة غرين [3], سنثبت صحة التمهيدية التالية, والتي تلعب دوراً كبيراً في تحقيق هدف هذا البحث:

**تمهيدية:** إذا كان  , فإن دالة غرين  للمسألة التالية:



تحقق المتراجحة:

(2) 

**الإثبات:** نكتب دالة غرين  بالشكل التالي:



حيث .

يمكن التحقق أنه ومن أجل أي  فإن:

الدالة , تكون متناقصة على المجال .

والدالة , تكون متزايدة على المجال  . وهكذا:

(3) 

وإذا أخذنا بالاعتبار أن:



و:



فإننا نستنتج من المتراجحة (3):



**إن تحقيق هدف هذا البحث يتم من خلال إثبات المبرهنة التالية:**

**مبرهنة 1:**  إذا كان  و  , وكان:

(4) 

وأيضاً إذا وجد  ; بحيث  وكان:

(5) 

فإن المعادلة (1) مترافقة من المرتبة  في المجال  .

تجدر الملاحظة أن هذه الدراسة تم إثباتها في [2] وذلك من أجل .

**الإثبات:** لنضع  من أجل  ولندرس المعادلة (1) في المجال .

ليكن  ; حيث  حل للمعادلة (1) يحقق الشروط التالية:



ولنعتبر الآن , وعلى الرغم من تحقق فرضيات المبرهنة , أن المعادلة (1) ليست مترافقة من المرتبة  في المجال .

نلاحظ أنه إذا كان  , فإن  ; حيث  و:



وهذا صحيح لأنه لو لم يكن كذلك فإنه يوجد  ; بحيث .

إذا كان  , فإن  وذلك من أجل , وأيضاً:



وهذا يناقض فرضيتنا.

إذا كان: 

ولنفرض أولاً الحالة التي يكون فيها  . فهنا يوجد متتالية , بحيث:



حيث  حل للمعادلة (1) . وهذا يبين لنا أن:

(6)  , وذلك من أجل 

واضح أن  ; حيث  . لأنه لو كان  وذلك من أجل  فإنه ومن أجل أي  كبير بما يكفي فالدالة  سيكون لها على الأقل صفر واحد في المجال  , ومع الأخذ بالاعتبار مضاعفات أصفار  في  وفي  ; حيث يمكن ملاحظة أن  لها على الأقل صفرين في المجال . وهنا  تغير إشارتها في هذا المجال وهذا مستحيل . وهكذا فالمتراجحة (6) محققة.

من هذه المتراجحة وكذلك النتائج الموجودة في [4] ينتج أنه يوجد:

 ; (  زوجي) و  بحيث إن:

(7) 

واضح أن:

(8) 

وبالتالي .

لنفرض أن , عندئذ ومن أجل أي  كبير بما يكفي فإنه يكون لدينا:



هذا يعني أن الدالة  لها على الأقل صفر واحد في المجال .

ومع الأخذ بالاعتبار مضاعفات الصفر في  ; حيث يمكن ملاحظة أن  لها على الأقل صفرين في المجال  , و  تغير إشارتها في هذا المجال وهذا مستحيل, وهكذا فإن .

بما أن  فإنه وحسب المتراجحتين (7) و (8) ينتج أن:



إذا كان:



فإن:



هنا:

(9) 

لنرمز بـ :  , وذلك من أجل  ; و , بالتالي:



وبما أن  , من أجل  و  فإنه يكون لدينا:



وهذا يؤدي إلى أن:

(10) 

من (9) و(10) نحصل على:



والتي تناقض المتراجحة (5).

هذا يعني أنه يجب إهمال الحالة : .

لندرس الآن الحالة التي يكون فيها  , حيث لدينا المعطيات السابقة:

 وأيضاً:

(11) 

هنا:



حيث  دالة غرين لمسألة القيمة الحدية (11) للمعادلة .

إذا كان  ; بحيث أن:

(12) 

فإنه ومن التمهيدية و المتراجحة (12) نجد أن:

(13) 

وبما أن:



فالمتراجحة (13) تناقض المتراجحة (5).

إذا رمزنا بـ :  ; حيث  فردي و بـ :

 ;  زوجي

فيمكننا استنتاج أن:





**نتيجة 1:** إذا كان لدينا إحدى الفرضيتين التاليتين:

 و  من أجل 

 و  من أجل 

وإضافة لذلك إذا وجد  ; بحيث:  , و:



فإن المعادلة (1) تكون مترافقة على المجال  .

تجدر الملاحظة هنا أن:



وهكذا من المبرهنة (1) ينتج أن:

**نتيجة 2:** إذا كان  , وإذا كانت الشروط (4) محققة , وإذا وجد  ; بحيث  , و:

(14) 

فإن المعادلة (1) تكون مترافقة من المرتبة  على المجال .

نلاحظ في العلاقة (14) أن  لا يمكن استبداله بـ  ; حيث .

وهذا المثال يوضح أن المتراجحة تسمى متراجحة دقيقة, إذا أجرينا أي تغيير صغير بالثابت فلن تبقى المتراجحة صحيحة:

**مثال:** إذا كان  معطى مسبقاً واخترنا  و , بحيث:

(15) 

وإذا وضعنا:





و:



فإن الدالة  غير متناقصة من أجل  , كما تتحقق المتراجحة التالية:



وإذا أخذنا بالاعتبار المتراجحة (15) , فإننا نحصل على:



من ناحية أخرى, في الحالة المدروسة, المعادلة (1) غير مترافقة على المجال  لأنها تملك الحل  المحقق للشروط التالية:



هذا المثال يبين لنا أن المتراجحة (14) في النتيجة 2 لا يمكن استبدالها بالمتراجحة:



وذلك مهما يكن .

لندرس الآن المعادلة (1) على محور الأعداد الحقيقية  و  من النتيجة 2 نجد أن:

**نتيجة 3:** إذا كان  , و  ليس صفراً على مجموعة قياسها موجب , وكان:



فإن المعادلة (1) تكون مترافقة من المرتبة  في .

**التوصيات:**

يمكن متابعة البحث في تحسين الشروط الواردة في نص المبرهنة (1) بحيث تسهل للباحث الدارس الاستفادة من المسألة بشروط بسيطة للحصول على نتائج أفضل, وبحث إمكانية دراسة ترافق المعادلات التفاضلية غير الخطية.

**المراجع العلمية**

[1]. Korshikova. N . L 1984 *– On zeroes of solutions of linear equations of*

*highorders* . (Russian) Differential equations and their applications .

143-148 Moscow University press.

[2]. Lomtatidze A. G . 1989- *On oscillatory properties of solutions of linear*

*differential equations of second order*. (Russian) Reports of the seminar

of the I.N.Vekua institute of Applied Mathematics. 39-54.

[3]. Alberto Cabada . 2014-*Greens Functions in the theory of ordinary*

*differential equations.* Springer.

[4]. Ivar Stakgold, Michael Holst. 2011*- Greens Functions and boundary value*

*Problems.* Wiley.