مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الهندسية المجلد (6) العدد(4) 2022
Tartous University Journal for Research and Scientific Studies - engineering Sciences Series Vol. (6) No. (4) 2022

تقييم خوارزميّة برمجيّة لدراسة تأثير تغيُّر السّماكة على قيمة حمل التّحنيب الحرج للبلاطات الرّقيقة باستخدام طريقة العناصر المنتهية في المجال اللّاخطّي الهندسي

***م. صفوان سليمان ديب**

(تاريخ الإيداع 1/11 /2022 . قُبِل للنشر في 2022/5/24)

□ ملخّص□

يتناول هذا البحث تحليل البلاطات الرّقيقة الخاضعة لأحمال مؤثرّة ضمن مستويها باستخدام طريقة العناصر المنتهية – نموذج الانتقالات في المجال اللّاخطّي الهندسي، ويَدرس مسألة التّحنيب للبلاطات.

الأساس المتغيّراتي لهذه الدّراسة ينطلق من الشّكل التّزايدي لمبدأ الانتقالات الوهميّة في حساب حمل التّحنيب الحرج للبلاطات، حيث تمّت دراسة تأثير تغيُّر السّماكة على قيم حمل التّحنيب الحرج لعدد من النّماذج.

بيّنت الدّراسة أنّ قيمة حمل التّحنيب الحرج تزداد مع ازدياد قيمة سماكة العنصر، كما أنّ مقدار التّزايد في حمل التّحنيب الحرج يتزايد بشكلٍ ملحوظ عندما تتجاوز سماكة البلاطة قيماً معيّنة.

الكلمات المفتاحيّة: طريقة العناصر المنتهية – التّحليل اللّاخطّي الهندسي – حمل التّحنيب الحرج – مبدأ الانتقالات الوهميّة.

*حائز على درجة الماجستير في الهندسة الإنشائيّة – كليّة الهندسة المدنيّة – جامعة تشرين – اللّاذقيّة – سورية.

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الهندسية المجلد (6) العدد(4) 2022
Tartous University Journal for Research and Scientific Studies - engineering Sciences Series Vol. (6) No. (4) 2022

Software Algorithm Evaluation To Study The Effect Of Thickness Change On Critical Buckling Load Value of Thin Plates Using Finite Element Method in Geometrical Nonlinear Field

Safwan Sulaiman Deeb *

(Received 11/1/ 2022 . Accepted 24/5/ 2022)

□ ABSTRACT □

This research deals with the analysis of thin plates subjected to compressive loads acting in its middle plane using the finite element method of displacement type under considering the geometric nonlinearly, and the study focus on the buckling problems of plates.

The incremental form of the principle of virtual work is used as a variational basis to deal with the buckling problems of plates. The effect of thickness change on critical buckling load values has been studied for a number of models.

The study showed that the value of the critical buckling load increases with the increase in the value of the thickness of the element, and the increase in the critical buckling load increases remarkably when the thickness of the plate exceeds certain values.

Keywords: Finite element method, Geometrical nonlinear analysis, Critical load

*Master's degree in structure engineering, Faculty of Civil Engineering, Tishreen University, Syria.

المُقدّمة:

يُطلق مفهوم العناصر الرّقيقة على العناصر الّتي تكون سماكتها أصغر بكثير من بُعديها الآخرين، حيث يُبيّن الجدول (1) تصنيف البلاطات الرّقيقة بحسب سماكتها وفق التّالي [1]:

الجدول (1): تصنيف البلاطات حسب النّسبة (L/t)

تصنيف البلاطات حسب النّسبة (L/t)			
نوع البلاطة	سميكة	**رقيقة**	**رقيقة جدّاً**
L/t	$(\approx 5) \rightarrow (\approx 10)$	$(\approx 10) \rightarrow (\approx 100)$	$> (\approx 100)$
السّلوك الفيزيائي	تشوّهات القص العرضانيّة لا يُمكن إهمالها	تشوّهات القص العرضانيّة يُمكن إهمالها	سلوك لاخطّي هندسي

تُستخدم هذه العناصر على نطاقٍ واسع في العديد من المنشآت الهندسيّة مثل الطّائرات والسّفن والمباني والهياكل البحريّة وغيرها، تتعرّض هذه العناصر إلى أشكال مختلفة من التّحميل، يمكن أن تؤثّر عليها ضمن مستويها، أو تكون متعامدة مع مستويها الوسطي، وقد تكون هذه الأحمال على شكل عزوم في بعض الحالات. وعلى الرّغم من قدرة هذه العناصر على تحمّل الأحمال الشّادّة بصورة جيّدة (Tensile Loadings)، إلّا أنها ضعيفة في مقاومة الحمولات الضّاغطة الّتي قد تُسبّب خروجها عن مستويها.

تحدث ظاهرة التّحنيب بشكل مفاجئ في العناصر الرّقيقة الخاضعة لقوى ضاغطة، الأمر الّذي قد يؤدّي إلى فشل كارثيّ؛ لهذا السّبب من المهم معرفة قدرة تحمّل هذه العناصر للأحمال الضّاغطة من أجل تجنّب الفشل المبكّر.

بيّنت الأدبيّات أنّ أولى الدّراسات الّتي اهتمّت بدراسة ظاهرة التّحنيب كانت في القرن التاسع عشر وفق فرضيّات وضعها (Kirchhoff)، ثم قام العالم (Navier) [2] في العام (1822) باشتقاق معادلات التّوازن للبلاطات المستطيلة.

قام الباحث (Saint Venant) في العام (1883) وفق ما أوضحهُ المرجع [3] بتعديل المعادلة الّتي توصّل إليها (Navier) من خلال تضمين قوى الضّغط المحوريّة وقوى القصّ، شكّلت المعادلة المعدّلة الأساس لكثيرٍ من الأبحاث الّتي أُجريت للتّحقّق من مقاومة البلاطات للتّحنيب تحت تأثير أحمال مختلفة وشروط طرفيّة مختلفة.

اهتمّ الباحث (Bryan) [4] في العام (1891) بدراسة مجموعة من الأمثلة بشروط استناد محدّدة، حيث قام بإجراء دراسات على بلاطات مستندة استناداً بسيطاً وخاضعة لحمولات ضاغطة مؤثّرة ضمن مستويها، وقد استطاع أن يقدّم حلاً أولياً للمشكلة مستخدما طريقة الطّاقة، وتمكّن من الحصول على قيم الأحمال الحرجة، حيث افترض أنّه يمكنه تمثيل سطح التّحنيب للبلاطات بواسطة سلسلة فورييه مزدوجة.

قدّم الباحث (Timoshenko) وآخرون [5] في العام (1925) طريقة أخرى لحلّ المشكلة، حيث افترضوا أنّ سطح التّحنيب عبارة عن عدة موجات نصف جيبيّة وفق اتجاه الانضغاط، ونتيجة ذلك شكّلت هذه المعادلات مصفوفة نتج عن حلّها قيماً مختلفة لحمل التّحنيب الحرج وذلك بحسب الشّروط الطّرفيّة.

بعد ذلك قام مجموعة من الباحثين: (Timoshenko) وآخرون [6] و (Bulson) [7] و (Batdorf) وآخرون [8] و (Wang) وآخرون [9] و (Xiang) وآخرون [10] بتطوير الدّراسات السّابقة لتتضمّن أشكال

مختلفة للبلاطات وشروط الاستناد وظروف التّحميل (SSSS و CSCS و FSSS و FSCS) حيث (S: طرف ذو استناد بسيط، F: طرف حر، C: طرف موثوق) وكانت النّتائج النّظريّة متقاربة جدّاً مع النّتائج الّتي حصل عليها (Bridget) وآخرون [11].

تساعد البيئة البرمجيّة (Matlab) في برمجة طريقة العناصر المنتهية، ويرجع ذلك إلى حقيقة أنّها تسمح للمستخدم بسهولة تحويل العلاقات العدديّة إلى خوارزميّات برمجيّة (Code Numerical) تُمكّن من حساب التّشوهات والإجهادات والانتقالات، كما أنّها تحوي مكتبة رياضيّة واسعة وشاملة ومناسبة للتّعامل مع المصفوفات [12].

أهميّة البحث وأهدافه:

في مختلف المجالات الهندسيّة كالسّيّارات والطّائرات والهياكل البحريّة والجسور والأبنية العالية، وكافّة المنشآت الّتي يدخل في تركيبها عناصر رقيقة سماكتها أصغر بكثير من بُعديها الآخرين والتي تؤثّر عليها أحمال مطبّقة ضمن مستويها الوسطي ممّا يجعلها عرضة لما يسمّى ظاهرة التّحنيب، بالتّالي تحسين أداء هذه العناصر يتطلّب دراسة تحليليّة دقيقة لتحديد الحالات الاجهاديّة الحرجة الّتي تضمن عملها بشكلٍ آمن.

ومن هنا كان هدف البحث في كتابة خوارزميّة برمجيّة تعتمد على طريقة العناصر المنتهية – نموذج الانتقالات، تُساعد في دراسة العناصر الانشائيّة الرّقيقة الخاضعة لأحمال مؤثّرة في مستويها، ودراسة تأثير تغيُّر السّماكة على قيم حمل التّحنيب الحرج لها.

طرائق البحث وموادّه:

1. الحلّ العام لحمل التّحنيب:

يؤدّي تطبيق القوى الخارجيّة الضّاغطة على المستوي الوسطي للبلاطات الرّقيقة إلى خروج هذه العناصر من مستويها الأصلي تحت ما يسمّى ظاهرة التّحنيب، وهنا قد يكون التّشوّه على شكل قوس أو على شكل أمواج نصف جيبيّة (Half-sine Waves) حسب شدّة الأحمال الضّاغطة المؤثّرة وحسب شروط الاستناد.

لإيجاد قيمة حمل التّحنيب الحرج (q_{cr}) الذي يسبّب ظاهرة التّحنيب، ننطلق من المعادلة التّفاضليّة الحاكمة لمسألة البلاطات الرّقيقة في الحالة العامّة، والّتي تسمّى معادلة (Von Karman)، على اعتبار أنّ البلاطة تخضع لقوى مؤثّرة ضمن مستويها وفق المحورين $(x\ ,y)$ [13]:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2.\frac{\partial^4 w}{\partial x^2.\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{1}{D}.\left(N_x.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+N_y.\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2.N_{xy}.\frac{\partial^2 w}{\partial x.\partial y}\right) \quad (1)$$

حيث: (N_x,N_y,N_{xy}): القوى المؤثّرة على المستوي الوسطي للبلاطة ضمن المستوي (xy).

(w): الانتقال وفق المحور (z).

$D=\frac{E.t^3}{12.(1-\vartheta^2)}$: صلابة البلاطة على الانعطاف.

(E): معامل يونغ.

(ϑ): معامل بواسون.

(t): سماكة البلاطة.

تتضمّن العلاقة الأخيرة جزأين: جزء يتعلّق بطاقة التّشوّهات، وجزء يتعلّق بعمل القوى الخارجيّة.

تأخذ طاقة التّشوّهات للقوى الدّاخليّة الشّكل التّالي [14]:

$$U = \frac{1}{2}.D.\iint\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 - 2.(1-\vartheta).\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x.\partial y}\right)^2\right]\right\}.dx.dy \qquad (2)$$

بينما يُعطى العمل الميكانيكي للقوى الخارجيّة المطبّقة بالعلاقة التّالية:

$$W = -\frac{1}{2}.\iint\left[N_x.\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + N_y.\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + 2.N_{xy}.\frac{\partial w}{\partial x}.\frac{\partial w}{\partial y}\right].dx.dy \qquad (3)$$

بافتراض أنّه حصل تغيّر لطاقة التّشوّهات وعمل القوى الخارجيّة بالمقدار (δU) و (δW) وفق التّرتيب، بالتّالي يتم تحديد سلوك البلاطة حسب العلاقة بين طاقة التّشوّهات وعمل القوى الخارجيّة، عندئذ يمكننا أن نميّز الحالات التّالية [15]:

- ❖ $\delta U > \delta W$: عمل القوى الخارجيّة المؤثّرة أصغر من طاقة التّشوّهات الدّاخليّة، بالتّالي تكون البلاطة في حالة استقرار مطلق.
- ❖ $\delta U < \delta W$: عمل القوى الخارجيّة المؤثّرة أكبر من طاقة التّشوّهات الدّاخليّ، بالتّالي تكون البلاطة في حالة عدم استقرار، وفي هذه الحالة تحدث ظاهرة التّحنيب.
- ❖ $\delta U = \delta W$: هنا تكون البلاطة في حالة توازن قلق، إذ أنّه في حال حصلت أيّة زيادة طفيفة في القوى الخارجيّة فإنّها تؤدّي إلى خروج البلاطة عن مستويها (التّحنيب).

في الحالة الخاصّة الّتي يكون فيها العنصر خاضع لقوى ضغط محوريّة مطبّقة ضمن المستوي الوسطي وفق المحور (x) فقط، عندئذٍ يكون: $(N_y = N_{xy} = 0)$، بالتّالي تصبح المعادلة التّفاضلية بالشّكل التّالي [16]:

$$D\nabla^2\nabla^2 w + N_x.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \qquad (4)$$

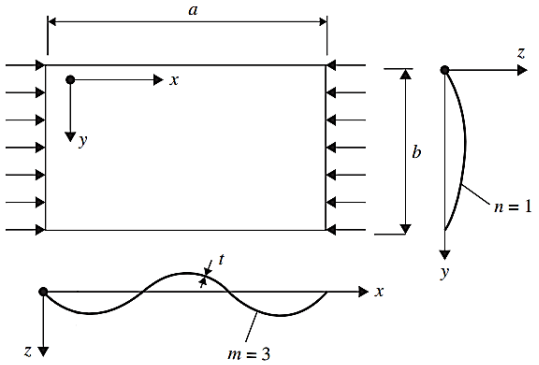
تمثّل المعادلة السّابقة معادلة تفاضليّة من المرتبة الرّابعة بالنّسبة لتابع الانتقال، يُعطى الحلّ العام لهذه المعادلة بالشّكل التّالي:

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}.\sin\frac{m.\pi.x}{a}.\sin\frac{n.\pi.y}{b} \qquad (5)$$

حيث: (a) هو طول العنصر و (b) عرضه.

(m) و (n) هو عدد أنصاف الأمواج في الاتجاه الطّولي والعرضي للبلاطة على التّرتيب الشّكل (1).

(C_{mn}) ثوابت عدديّة.



الشّكل (1): أنصاف أمواج التّحنيب

لإيجاد قيمة حمل التّحنيب الحرج، نقوم بتعويض قيمة الحلّ العام ـ بعد إجراء الاشتقاق، وأخذ الشّروط الطّرفيّة بعين الاعتبار ـ في المعادلة التّفاضليّة، نحصل على العلاقة التّالية:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[D.\pi^4.\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2-N_x.\pi^2.\frac{m^2}{a^2}\right].w_{mn}.\sin\frac{m.\pi.x}{a}.\sin\frac{n.\pi.y}{b}=0 \quad (6)$$

حلّ المعادلة الأخيرة يقتضي أن يكون ما ضمن القوسين مساوٍ للصّفر بالتّالي:

$$D.\pi^4.\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2-N_x.\pi^2.\frac{m^2}{a^2}=0 \quad (7)$$

بالتّالي تصبح حمولة التّحنيب بالشّكل العام:

$$q_x=N_x=\frac{D.\pi^2}{b^2}\left(\frac{m.b}{a}+\frac{n^2.a}{m.b}\right)^2 \quad (8)$$

حيث: (q_x): قيمة الحمولة الّتي تسبّب التحنيب.

يأخذ المقدار (q_x) قيماً مختلفة بحسب قيم المتغيّرات $(n=1,2,3,\dots)$ و $(m=1,2,3,\dots)$، إلّا أنّ قيمة حمل التّحنيب الحرج هي الّتي توافق أصغر قيمة للمقدار (q_x) أي:

$$q_{x,cr}=\min(q_x)$$

وهذا يتحقّق عندما يكون عدد أنصاف الموجة في الاتجاه القصير $(n=1)$، وهي الحالة الموافقة للنّمط الأساسي، بالتّالي تُصبح العلاقة السّابقة بالشّكل التّالي:

$$q_{x,cr}=\min(q_x)=\frac{D.\pi^2}{b^2}\left(\frac{m.b}{a}+\frac{a}{m.b}\right)^2=k.\frac{D.\pi^2}{b^2} \quad (9)$$

حيث: $k=\left(\frac{m.b}{a}+\frac{a}{m.b}\right)^2$: هو معامل التّحنيب، وهو تابع للمتغيّر (m).

بالتّالي تتغيّر قيمة معامل التّحنيب حسب أبعاد العنصر المدروس، وحسب القيمة (m).

نلاحظ من العلاقة (9) أنّ قيمة حمل التّحنيب الحرج تتعلّق بعدّة عوامل: أبعاد العنصر (الطّول، العرض، السّماكة)، والخواص الهندسيّة لمادة العنصر (معامل يونغ، معامل بواسون)، والشّروط الطرفيّة للعنصر:

- في حال الطّرف الموثوق يكون:

$$\left.\begin{aligned}(w(x,y))_{y=0}&=0\\\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0}&=0\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

- في حالة الطّرف المستند استناد بسيط يكون:

$$\left.\begin{aligned}(w(x,y))_{y=0}&=0\\\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\vartheta.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{y=0}&=0\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

2. الدراسة التّحليليّة:

يتمّ كتابة الخوارزميّة البرمجيّة اللّازمة لإيجاد حمل التّحنيب الحرج في إطار تطبيق طريقة العناصر المنتهية، وذلك بتعويض قيم مصفوفات الصّلابة (الخطّيّة والهندسيّة اللّاخطّيّة) للعنصر المدروس في العلاقة التّالية [15]:

$$[[K_o]-\lambda_i.[K_\sigma]].\{\psi_i\}=\{0\} \quad (12)$$

حيث: $[K_o]$: مصفوفة الصّلابة الخطّيّة للعنصر المدروس.

$[K_\sigma]$: مصفوفة الصّلابة الهندسيّة للعنصر المدروس.

(λ_i): شعاع الحمولات.

$\{\psi_i\}$ أنماط التّحنيب.

بإيجاد معيّن أمثال الشّعاع $\{\psi_i\}$ في العلاقة (12):

$$|[K_o] - \lambda_i.[K_\sigma]| = \{0\} \quad (13)$$

نحصل على شعاع الحمولة:

$$\{\lambda_i\} = \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{Bmatrix} \quad (14)$$

حيث يوافق حمل التّحنيب الحرج أصغر قيمة من شعاع الحمولة أي يكون:

$$q_{cr} = \lambda_{min}$$

بتعويض قيم العلاقة (14) في العلاقة (12) نحصل على قيم الشّعاع $\{\psi_i\}$ الّذي يمثّل أنماط التّحنيب:

$$\{\psi_i\} = \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{Bmatrix} \quad (15)$$

يتم إيجاد مصفوفات الصّلابة للعنصر $[K_o]$ و $[K_\sigma]$ انطلاقاً من الشّكل التّزايدي لمبدأ الانتقالات الوهميّة الّذي يأخذ الشّكل التّالي [17]:

$$\left[\int_V [\delta(\Delta\varepsilon_{ij}).C^{ijkl}.\varepsilon^0_{kl}].dV + \int_V [\delta(\Delta\varepsilon_{ij}).C^{ijkl}.\Delta\varepsilon_{kl}].dV\right] - \left[\int_V [\tilde{f}_i.\delta(\Delta u_i)].dV - \int_{S_\sigma} [\tilde{T}_i.\delta(\Delta u_i)].dS\right] = 0 \quad (16)$$

يمثّل الحدّ الأوّل من العلاقة (16) قيمة مصفوفة الصّلابة الخطّيّة للبلاطة $[K_o]$ والّتي تأخذ القيمة التّالية [18]:

$$[K_o] = \int_V [\delta(\Delta\varepsilon_{ij}).C_{ijkl}.\Delta\varepsilon^0_{kl}].dV = \int_{-h/2}^{h/2}\int_A \delta\Delta\varepsilon_{ij}.C_{ijkl}.\Delta\varepsilon^0_{kl}.dA\,.dz$$

$$[K_o] = h.\int_A \delta\Delta \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ w_{,x}.w_{,y} \end{Bmatrix}.\frac{E.h^3}{12.(1-\vartheta^2)}.\begin{bmatrix} 1 & \vartheta & 0 \\ \vartheta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\vartheta}{2} \end{bmatrix}.\Delta \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ w_{,x}.w_{,y} \end{Bmatrix}.dA \quad (17)$$

$$[K_o] = h.\int_A \delta\Delta(\acute{N}_{,ij}.\overline{w}).C_{ijkl}.\Delta(\acute{N}_{,kl}.\overline{w}).dA$$

باستبدال المقدار $(\Delta\overline{w})$ بالمقدار $(\overline{w})$ باعتباره يمثّل تزايداً صغيراً في الانتقال، مع اعتبار أنّ المقدار (w) يمثّل تابع الانتقال (الّسهم) الخاصّ بمسألة البلاطات الرّقيقة والّذي يُعطى على شكل كثير حدود وفق الآتي:

(18)

$$w(x,y) = c_0 + c_1.x + c_2.y + c_3.x^2 + c_4.x.y + c_5.y^2 + c_6.x^3 + c_7.x^2.y + c_8.x.y^2 + c_9.y^3 + c_{10}.x^3.y + c_{11}.x.y^3 + c_{12}.x^2.y^2 + c_{13}.x^4.y + c_{14}.x.y^4 + c_{15}.x^3.y^3$$

بالتّالي يصبح لدينا:

$$[K_o] = h.\left[\delta\overline{w}.\left\{\int_A \acute{N}_{,ij}.C_{ijkl}.\acute{N}_{,kl}.dA\right\}.\overline{w}\right] \quad (19)$$

حيث $(\acute{N})$ هي مصفوفة توابع الشّكل الّتي تأخذ الشّكل التّالي:

$$(\acute{N})^T = \begin{bmatrix} \frac{-((a-x).(b-y).(b^2.x^2)+a.b^2.x+a^2.y^2+a^2.b.y-2.a^2.b^2)}{8.a^2.b^2} \\ \frac{((a-x).(b+y).(b-y)^2)}{8.a.b^2} \\ \frac{-((a+x).(b-y).(a-x)^2)}{8.a^2.b} \\ \frac{-((a+x).(b-y).(b^2.y)-a.b^2.x+a^2.y^2+a^2.b.y-2.a^2.b^2)}{8.a^2.b^2} \\ \frac{((a+x).(b+y).(b-y)^2)}{8.a.b^2} \\ \frac{((a-x).(b-y).(a+x)^2)}{8.a^2.b} \\ \frac{-((a+x).(b+y).(-b^2.x^2)+a.b^2.x-a^2.y^2+a^2.b.y-2.a^2.b^2)}{8.a^2.b^2} \\ \frac{-((a+x).(b-y).(b+y)^2)}{8.a.b^2} \\ \frac{((a-x).(b+y).(a+x)^2)}{8.a^2.b} \\ \frac{-((a-x).(b+y).(b^2.x^2)+a.b^2.x+a^2.y^2-a^2.b.y-2.a^2.b^2)}{8.a^2.b^2} \\ \frac{-((a-x).(b-y).(b+y)^2)}{8.a.b^2} \\ \frac{-((a+x).(b+y).(a-x)^2)}{8.a^2.b} \end{bmatrix}^T \quad (20)$$

$(2a, 2b)$ أبعاد العنصر المنتهي وفق المحورين (x, y) على التّرتيب.

أمّا الحدّ الثّاني من مبدأ الانتقالات الوهميّة فيمثّل مصفوفة الصّلابة الهندسيّة للبلاطة الرّقيقة $[K_\sigma]$، والّتي تمثّل العمل النّاتج عن القوى الغشائيّة المتشكّلة ضمن البلاطة، والّتي تأخذ الشّكل التّالي [18]:

$$[K_\sigma] = \int_V \sigma_{ij}.\delta\Delta u_{ij}.dV = \int_V \delta\Delta u_{k,i}.\sigma_{ij}.\Delta u_{k,j}.dV = \int_{-h/2}^{h/2}\int_A \delta\Delta u_{k,i}.\sigma_{ij}.\Delta u_{k,j}.dA.dz$$

$$= h.\int_A \delta\Delta\begin{Bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y}\end{Bmatrix}.\left(\frac{E.h}{1-\vartheta^2}.\begin{bmatrix} 1 & \vartheta & 0 \\ \vartheta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\vartheta}{2}\end{bmatrix}.\Delta\begin{Bmatrix} \frac{1}{2}.(w_{,x})^2 \\ \frac{1}{2}.(w_{,y})^2 \\ w_{,x}.w_{,y}\end{Bmatrix}\right).\Delta\begin{Bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y}\end{Bmatrix}.dA$$

$$[K_\sigma] = h.\left[\delta\overline{w}.\left\{\int_A \acute{N}_{,i}.S_{ij}.\acute{N}_{,j}.dA\right\}.\overline{w}\right] \quad (21)$$

حيث تمثّل المصفوفة (S_{ij}) القوى الغشائيّة ضمن المستوي وهي تحدّد من العلاقة:

(22)

$$S_{ij} = \begin{Bmatrix} S_x \\ S_{xy} \\ S_{yx} \\ S_y \end{Bmatrix} = \frac{E.h}{(1-\vartheta^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vartheta \\ 0 & (1-\vartheta)/2 & (1-\vartheta)/2 & 0 \\ 0 & (1-\vartheta)/2 & (1-\vartheta)/2 & 0 \\ \vartheta & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}.\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\ \frac{1}{2}.\frac{\partial w}{\partial x}.\frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{1}{2}.\frac{\partial w}{\partial y}.\frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{1}{2}.\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \end{Bmatrix}$$

بينما يمثّل الحدّان الثّالث والرّابع من العلاقة (16) عمل القوى الخارجيّة (الحجميّة والسّطحيّة)، والّتي قيمتها معدومة في النّماذج المدروسة.

3- النّتائج والمناقشة:

سنقوم بدراسة تأثير تغيُّر السّماكة على قيمة حمل التّحنيب الحرج $(q_{cr} = \lambda_{min})$ للبلاطات الرّقيقة الّتي تخضع لحمولات مؤثّرة ضمن مستويها، حيث سيتمّ دراسة بلاطة رقيقة مستطيلة الشّكل مستندة استناداً بسيطاً من أطرافها الأربعة (SSSS)، وفق البارامترات التّالية:

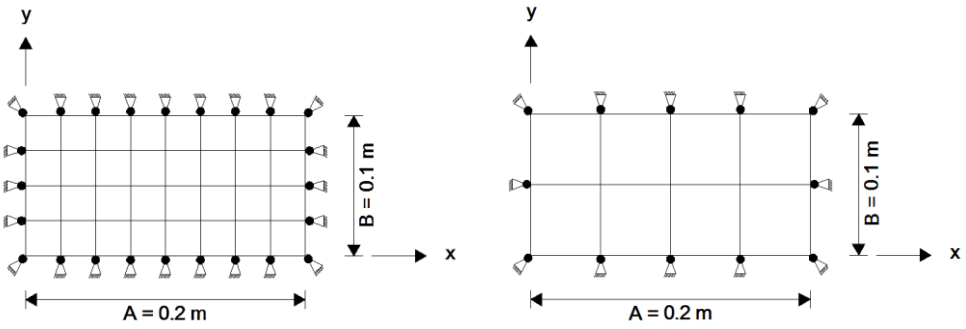
- أبعاد البلاطة: $(A = 0.2\ m)\ ,(B = 0.1\ m)$.
- معامل يونغ: $(E = 200\ Gpa)$.
- معامل بواسون: $(\vartheta = 0.3)$.
- سماكة البلاطة: متغيّرة وفق القيم التّالية:

$(t = \langle 0.0002\ ;\ 0.0004\ ;\ 0.0006\ ;\ 0.0008\ ;\ \mathbf{0.001}\ ;\ 0.0012\ ;\ 0.0014\ ;\ 0.0016\ ;\ 0.0018\ ;\ 0.002 \rangle\ m)$.

- شروط الاستناد: استناد بسيط من الأطراف الأربعة $(SSSS)$ الشّكل (2).
- سيتم تقسيم البلاطة إلى عناصر منتهية مربّعة الشّكل، أبعادها تختلف باختلاف عدد هذه العناصر المنتهية، قمنا بدراسة تأثير تغيُّر السّماكة على نموذجين حسب عدد العناصر:

❖ النّموذج الأوّل (8 عناصر): $(4 * 2)$، وأبعاد العنصر المنتهي $(2a = 2b = 0.05\ m)$.

❖ النّموذج الثّاني (32 عنصر): $(8 * 4)$، وأبعاد العنصر المنتهي $(2a = 2b = 0.025\ m)$.



الشّكل (2–a): الشّكل السّتاتيكي للنّموذج الأوّل **الشّكل (2–b): الشّكل السّتاتيكي للنّموذج الثّاني**

الشّكل (2): الشّكل السّتاتيكي للعنصر ذو شروط الاستناد (SSSS)

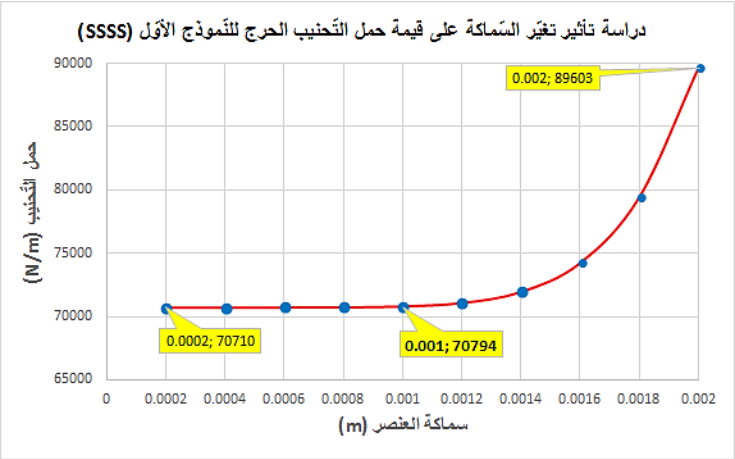
1. النّموذج الأوّل: البلاطة مقسّمة إلى (8) عناصر منتهية:

يُبيِّن الجدول (2) نتائج تطبيق الخوارزميّة البرمجيّة لإيجاد قيم حمل التّحنيب الحرج للنّموذج المدروس بحسب تغيُّر السّماكة:

الجدول (2): قيم حمل التّحنيب الحرج للنّموذج الأوّل (SSSS) بحسب تغيُّر السّماكة

بلاطة مستطيلة الشّكل ذات شروط استناد (SSSS)		
السّماكة (t) (m)	النّموذج الأوّل	
	حمل التّحنيب الحرج (q_{cr}) (N/m)	نسبة التّزايد (%)
0.0002	70710	0
0.0004	70710	0.00283
0.0006	70712	0.01838
0.0008	70725	0.09756
0.0010	70794	0.38845
0.0012	71069	1.21713
0.0014	71934	3.17374
0.0016	74217	6.97818
0.0018	79396	12.85581
0.0020	89603	-

يُبيِّن الشّكل (3) أنّ مقدار التّزايد في قيمة حمل التّحنيب الحرج للنّموذج الأوّل وفق الخوارزميّة البرمجيّة المُستخدمة كان طفيفاً عندما ازدادت قيمة السّماكة حتّى بلغت القيمة $(t = 0.001\ m)$، في حين أصبح هذا التّزايد كبيراً وملحوظاً مع زيادة قيمة السّماكة حتّى القيمة $(t = 0.002\ m)$:



الشّكل (3): دراسة تأثير تغيُّر السّماكة على قيمة حمل التّحنيب الحرج للنّموذج الأول (SSSS)

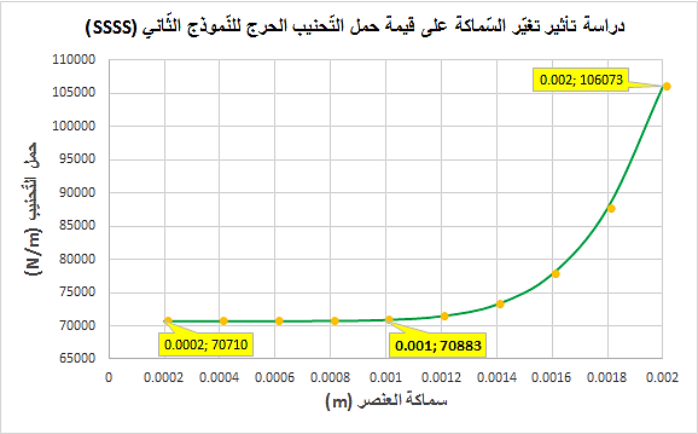
2. النّموذج الثّاني: البلاطة مقسّمة إلى (32) عنصر منتهٍ:

يُبيِّن الجدول (3) نتائج تطبيق الخوارزميّة البرمجيّة
لإيجاد قيم حمل التّحنيب الحرج للنّموذج المدروس بحسب تغيُّر السّماكة:

الجدول (3): قيم حمل التّحنيب الحرج للنّموذج الثّاني (SSSS) بحسب تغيُّر السّماكة

بلاطة مستطيلة الشّكل ذات شروط استناد (SSSS)		
السّماكة (t) (m)	النّموذج الثّاني	
	حمل التّحنيب الحرج (q_{cr}) (N/m)	نسبة التّزايد (%)
0.0002	70710	0
0.0004	70710	0.00566
0.0006	70714	0.03535
0.0008	70739	0.20356
0.0010	70883	0.7985
0.0012	71449	2.47030
0.0014	73214	6.22832
0.0016	77774	12.76133
0.0018	87699	20.95121
0.0020	106073	-

يُبيِّن الشّكل (4) أنّ مقدار التّزايد في قيمة حمل التّحنيب الحرج للنّموذج الثّاني وفق الخوارزميّة البرمجيّة المُستخدمة كان طفيفاً عندما ازدادت قيمة السّماكة حتّى بلغت القيمة $(t = 0.001\ m)$، في حين أصبح هذا التّزايد كبيراً وملحوظاً مع زيادة قيمة السّماكة حتّى القيمة $(t = 0.002\ m)$:



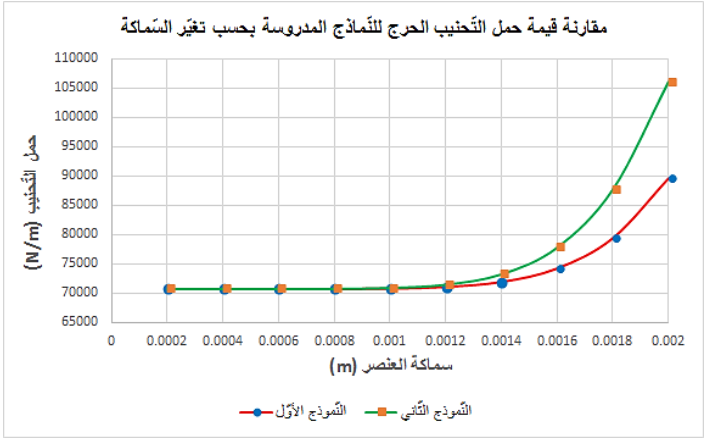
الشّكل (4): دراسة تأثير تغيُّر السّماكة على قيمة حمل التّحنيب الحرج للنّموذج الثّاني (SSSS)

يُبيِّن الجدول (4) مقارنة بين قيم حمل التّحنيب الحرج للنّموذجين المدروسين بحسب تغيُّر السّماكة:

الجدول (4): مقارنة قيم حمل التّحنيب الحرج للنّماذج المدروسة بحسب تغيُّر السّماكة

بلاطة مستطيلة الشّكل ذات شروط استناد (SSSS)			
السّماكة (t) (m)	حمل التّحنيب الحرج (q_{cr}) (N/m)		
	النّموذج الأوّل	النّموذج الثّاني	نسبة الاختلاف (%)
0.0002	70710	70710	0
0.0004	70710	70710	0
0.0006	70712	70714	0.0028
0.0008	70725	70739	0.0198
0.0010	70794	70883	0.1257
0.0012	71069	71449	0.5347
0.0014	71934	73214	1.7794
0.0016	74217	77774	4.7927
0.0018	79396	87699	10.4577
0.0020	89603	106073	18.3811

يُبيّن الشّكل (5) مقارنة قيم حمل التّحنيب الحرج للنّماذج المدروسة بحسب تغيُّر السّماكة، حيثُ نُلاحظ أنّ قيم حمل التّحنيب الحرج للنّموذجين المدروسين تكاد تكون متطابقة من أجل قيم صغيرة للسّماكة حتى القيمة $(t = 0.001\ m)$، ليُصبح بعد ذلك التّباين ملحوظاً في قيم حمل التحنيب الحرج من أجل قيم أكبر للسّماكة حتى القيمة $(t = 0.002\ m)$:



الشّكل (5): مقارنة قيمة حمل التّحنيب الحرج للنّماذج المدروسة بحسب تغيُّر السّماكة

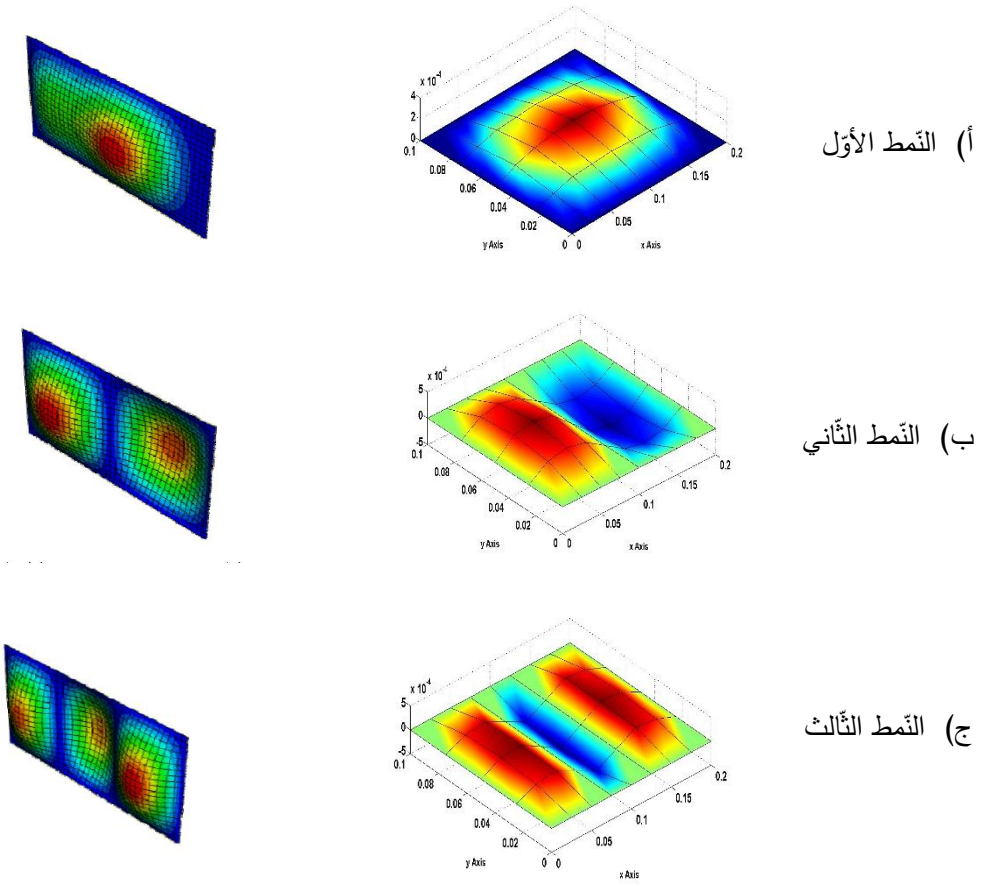
يُبيِّن الجدول (5) قيم حمل التّحنيب الحرج لبلاطة ذات شروط استناد (SSSS)، من أجل سماكة البلاطة $(t = 0.001\ m)$، والّتي أعطاها المرجع [19] باستخدام الماتلاب:

الجدول (5): قيم حمل التّحنيب الحرج للبلاطة ذات شروط الاستناد (SSSS) وفق المرجع [19]

بلاطة مستطيلة الشّكل ذات شروط استناد (SSSS)	
الحمل الحرج (q_{cr}) (N/m)	عدد العناصر
70794	النّموذج الأوّل (8 عناصر)
70883	النّموذج الثّاني (32 عنصر)
72304	الحلّ التّحليلي [16]

عند مقارنة النّتائج الّتي حصلنا عليها مع النّتائج الواردة في المرجع [19]، نجد أنّ تحليل النّموذج الثّاني أعطى قيماً أقرب إلى الحلّ التّحليلي من تحليل النّموذج الأوّل، بالتّالي نلاحظ من الشّكل (5) أنّ الخوارزميّة البرمجيّة المُستخدمة أعطت انسجاماً واضحاً في نتائج تحليل النّموذجين المدروسين، حيث أنّ جميع قيم حمل التّحنيب الحرج للنّموذج الثّاني كانت أكبر من قيم حمل التّحنيب الحرج للنّموج الأوّل، وذلك من أجل قيم مختلفة للسّماكة.

يُبيِّن الشّكل (6) أشكال أنماط التّحنيب للنّموذج الثّاني ذي شروط الاستناد (SSSS)، الّتي حصلنا عليها بتطبيق الخوارزميّة البرمجيّة باستخدام الماتلاب، تُبيِّن هذه الأشكال التقارب الكبير مع نتائج الحلّ التّحليلي الواردة في المرجع [16] باستخدام برنامج (ABAQUS):



(a–6)أنماط التّحنيب وفق الخوارزميّة البرمجيّة **(b–6)أنماط التّحنيب وفق المرجع [16]**

الشّكل (6): مقارنة أشكال أنماط التّحنيب للعنصر ذو شروط الاستناد (SSSS)

الاستنتاجات والتّوصيات:

- **الاستنتاجات:**

1- بلغت نسبة التّزايد في قيمة حمل التّحنيب الحرج **للنّموذج الأوّل** قيماً كبيرة (26.57%) عندما زادت قيمة السّماكة عن القيمة $(t = 0.001\ m)$، في حين كانت نسبة التّزايد ـ من أجل قيم للسّماكة أصغر من هذه القيمة ـ صغيرة جدّاً بلغت المعدّل (0.12%).

2- بلغت نسبة التّزايد في قيمة حمل التّحنيب الحرج **للنّموذج الثّاني** قيماً كبيرة (49.65%) عندما زادت قيمة السّماكة عن القيمة $(t = 0.001\ m)$، في حين كانت نسبة التّزايد ـ من أجل قيم للسّماكة أصغر من هذه القيمة ـ صغيرة جدّاً بلغت المعدّل (0.25%).

3- بيّنت الدّراسة أنّه مع زيادة عدد العناصر المنتهية للعنصر المدروس تزداد دقّة الحلّ مقارنةً مع النّماذج المحلّلة باستخدام برامج تحليليّة أخرى، كما أنّ مقدار التّزايد في قيمة حمل التّحنيب الحرج يزداد بشكلٍ ملحوظ عندما تتجاوز سماكة العنصر قيماً معيّنة.

التّوصيات:

1- نوصي بدراسة تأثير تغيُّر السّماكة على قيمة حمل التّحنيب الحرج لعناصر أخرى، ذات عدد عناصر أكبر، وشروط استناد مختلفة، وبارامترات مختلفة.

2- نوصي بدراسة عناصر خاضعة لتأثير أحمال مركّبة (أحمال ضمن مستويها وأحمال عمودية على مستويها).

المراجع:

[1] **VENTSEL, E. AND KRAUTHAMMER, TH.**, "*Thin plate and shells theory, Analysis, and Applications.*", Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 2001.

[2] **NAVIER, L.**, "*Memoire sur les lois du mouvement des fluids.*" Mem. Acad. Sci. Inst. France 6, 389-440, 1822.

[3] **SAINT VENANT.** "*Discussion in theorie de l'elasticite des corps solides.*" Clebsch, Paris, 1883.

[4] **BRYAN, G. K.**, "On the stability of a plane plate under thrusts in its own plane with application on the 'buckling' of the sides of a ship.", Proc. London Math. Soc., 1891.

[5] **TIMOSHENKO, S.** "*Applied Elasticity.*", D Van Nostrand Co., Inc., New York, 1925.

[6] **TIMOSHENKO, S. P. AND GERE, J. M.**, "*Theory of Elastic Stability.*", Mc-Graw-Hill, New York, 1961.

[7] **BULSON, P. S.**, "*The Stability of Flat Plate.*", Chatto and Windus, Longdon, U.K., 1970.

[8] **BATDORF, S. B. AND STEIN, M.**, "*Critical combinations of shear and direct stress for simply supported rectangular flat plates.*" NACA TN. 1223, 1947.

[9] **WANG, C. M.; XIANG, Y. AND CHAKRABARTY, J.**, "*Elastic/plastic buckling of thick plates.*", Int. J. Solids and Structures, Vol. 38, 8617-8640, 2001.

[10] **WANG, C. M.; CHEN, Y. AND XIANG, Y.**, "Exact buckling solutions for simply supported, rectangular plates under intermediate and end uniaxial loads." Proceedings of the 2nd International Conference on Structural Stability and Dynamics, edited by C.M. Wang, G.R. Liu and K.K. Ang, World Scientific, Singapore, 424-429, 16-18 December 2002.

[11] **BRIDGET, F. J.; JEROME, C. C. AND VOSSELLER, A. B.**, "*Some New Experiments on Buckling of thin-Wall construction*". Trans.A.S.ME.vol.56 ,PP.569-578, no 8 Aug. 1934.

[12] **SHERIF, F. N.**, "*MATLAB FEM Code - From Elasticity to Plasticity.",* Norwegian Un., June, 2012.

[13] **VON KARMAN, T.**, "*Fesigkeitsprobleme in Maschinenbau*.", Encycl de Math Wiss, Vol. 4, pp. 348-351, 1910.

[14] **CARAFOLI, E.**, "*Buckling of Flat Thin Plates under Combined Loading*". Incas Bulletin, Volume 7, Issue 1, pp. 83 – 96, 2015.

[15] **DATCHANAMOURTYA, B. AND BLANDFORD, G.**, "*Nonlinear Buckling Analysis of Piezothermoelastic Composite Plates.",* Lexington, KY: University of Kentucky, 2008.

[16] **POULADKHAN, A. R.**, "*Numerical Study of Buckling of Thin Plate.*", International Conference on Sustainable Design and Construction Engineering, Vol. 78, Issue: 1, Pp. 152 – 157, 2011.

[17] **أبو دياب، سليمان،** "*طرق الطاقة في ميكانيك الإنشاءات الخطي، طرق العناصر المنتهية (الستاتيك)*."، دار الحصاد، دار الكلمة، دمشق، 1998.

[18] **حسن، إبراهيم،** "*التّحليل اللّاخطّي الهندسي للبلاطات الرّقيقة باستخدام طريقة العناصر المنتهية المعدّلة*."، دراسة أُعدّت لنيل درجة الماجستير، جامعة تشرين، اللّاذقيّة، 2018.

[19] **ديب، صفوان،** "*التّحليل اللّاخطّي الهندسي للشّرائح المستوية باستخدام طريقة العناصر المنتهية المعدّلة*."، دراسة أُعدّت لنيل درجة الماجستير، جامعة تشرين، اللّاذقيّة، 2021.

* * * * *

* * *

*