مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٨) العدد (٥) ٢٠٢٤

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (8) No. (5) 2024

دراسة الاستقرار الأسي للمعادلة التفاضلية النبضية

أ.د. نبيل علي*

ضحى علي**

(تاريخ الإيداع ٢٠٢٤/٣/١٢ – تاريخ النشر ٢٠٢٤/١٢/٣)

□ ملخّص □

من خلال دراسة سلوك الأنظمة الديناميكية النبضية تظهر لنا دراسة في غاية الأهمية هي دراسة الاستقرار الأسي لحلول المعادلة التفاضلية النبضية. ندرس في هذا البحث استقرار المعادلة التفاضلية النبضية الخطية من المرتبة الأولى بوضع شروط معينة على المسألة ، كذلك ندرس الاستقرار الأسي للنظام النبضي اللاخطي بوضع شروط معينة على دالة النبضات وذلك بالاستفادة من متراجحات النظام النبضي ومفهوم الاستقرار الأسي.

الكلمات المفتاحية :

المعادلة التفاضلية النبضية – الاستقرار الأسي – المصفوفة الأحادية – القيم الذاتية .

* :أستاذ دكتور – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة طرطوس – طرطوس – سوريا.

**: طالبة دراسات عليا (ماجستير) – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة طرطوس – طرطوس – سوريا.

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٨) العدد (٥) ٢٠٢٤

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (8) No. (5) 2024

Studying of The Exponential Stability of Impulsive Differential Equation

Prof. Nabil Ali *
Doha Ali **

(Received 12/3/2024.Accepted 3/12/2024)

□ABSTRACT □

By studying the behavior of dynamic impulsive systems, a very important study appears to us, which is the study of the exponential stability of the solutions of the impulsive differential equation. In this research, we study the stability of the linear first-order impulsive differential equation by placing certain conditions on the problem. We also study the exponential stability of the non-linear impulsive system by placing certain conditions on the pulse function, taking advantage of the inequalities of the impulsive system and the concept of exponential stability .

Key words: Impulsive differential equation - exponential stability – monodromy matrix - eigenvalues

*: **Professor - Department of Mathematics - Faculty of Science - University of Tartous - Tartous - Syria.**
****: Postgraduate student (MA) - Department of Mathematics - Faculty of Science - University of Tartous - Tartous - Syria.**

مقدمة

في الفيزياء وفي التقنية والبيولوجيا، وفي مجالات أخرى من العلوم تشهد الأنظمة الديناميكية تغيرات مفاجئة في حالات النظام في لحظات معينة من الزمن، في الرياضيات الحديثة تسمى هذه العمليات بالمعادلات التفاضلية النبضية التي توفر إطاراً طبيعياً للنمذجة الرياضية لكثير من الأنظمة العلمية الهامة، الأمر الذي يجعل دراسة استقرارها موضوعاً في غاية الأهمية، حيث أن النبض غالباً مصدر تدهور أداء النظام أو عدم الاستقرار. بدأت الدراسة الرياضية للمعادلة التفاضلية النبضية مع الباحثان A.D. Myshkis و V.D. Milman [8] حيث وضعوا مفاهيم عامة حول المعادلة التفاضلية النبضية وقدموا نتائج حول استقرار حلولها. من أجل دراسة سلوك الأنظمة الديناميكية وفهمها أهم مانحتاجه هو دراسة الاستقرار، ففي عام ١٩٨٩ درس الباحثان N.V. Milev و D.D. Bainov استقرار النظام النبضي الخطي المتجانس من المرتبة الأولى [7]. وفي عام ٢٠١٤ درس الباحثان E. Yilmaz و M. Akhmet وجود واستقرار الحلول الدورية للمعادلة التفاضلية النبضية الخطية الدورية المتجانسة وغير المتجانسة من المرتبة الأولى [8,1]. في هذه المقالة، وبالاستفادة من الدراسات السابقة، يحضرنا دراسة مهمة لاستقرار المعادلة التفاضلية النبضية الخطية من المرتبة الأولى المتجانسة وغير المتجانسة بوضع شروط معينة على المسألة كذلك دراسة الاستقرار الأسي لنظام نبضي غير خطي بوجود شروط معينة على تابع النبضات.

تعطى المعادلة التفاضلية النبضية الخطية المتجانسة من المرتبة الأولى والدورية بدور T بالشكل التالي :

$$\begin{aligned} x'(t) &= A(t)x(t) \quad ; t \neq \tau_\kappa , t \in IR \\ \Delta x(t) &= A_k\, x(t) \quad ; t = \tau_\kappa , k \in Z \end{aligned} \qquad (1)$$

وتحقق الشروط التالية :

1) المصفوفة $A(t)$ تحقق أن : $A(t) \in PC(IR , IR^{n\times n})$ و $A(t+T) = A(t)\ ; T > 0$

2) $A_k \in IR^{n\times n} , |I + A_k| \neq 0\ ;\ \tau_\kappa < \tau_{\kappa+1}\ ;\ (\kappa \in Z)$

3) يوجد $q \in IN$ بحيث يحقق أن : $\tau_{\kappa+q} = \tau_\kappa + T$ و $A_{\kappa+q} = A_\kappa$

نفرض أن : $\tau_0 \leq 0 < \tau_1$

أهمية البحث وأهدافه:

تتميز الكثير من المسائل العلمية بوجود لحظات نبضية، وفي كثير من الحالات تهمل دراسة هذه التأثيرات النبضية عند حل المسائل، الأمر الذي يجعل دراسة المعادلة التفاضلية النبضية واستقرار حلولها موضوعاً في غاية الأهمية في الرياضيات المتطورة، ومن هنا تكمن أهمية هذا البحث من كونه يدرس المعادلة التفاضلية النبضية اللاخطية ويضع الشروط اللازمة لتحقيق استقرارها . نهدف في هذا البحث إلى دراسة المعادلة التفاضلية النبضية الخطية من المرتبة الأولى بوضع شروط معينة على المسألة. كذلك يهدف إلى وضع الشروط اللازمة لتحقيق الاستقرار الأسي للنظام النبضي اللاخطي بوجود شروط معينة على تابع النبضات .

طرائق البحث وموارده:

يندرج هذا البحث تحت اختصاص الرياضيات التطبيقية وبشكل خاص في مجال المعادلات التفاضلية النبضية، لذلك فإن التقنيات المستخدمة في هذا البحث تعتمد بشكل أساسي على طرائق الدراسة التحليلية للمعادلة التفاضلية

النبضية وبالاستفادة من متراجحات المعادلة التفاضلية النبضية. سنقدم أولاً بعض التعاريف والمبرهنات الأساسية التي سنستخدمها لإثبات صحة المبرهنات الموجودة في هذا البحث .

1-تعاريف ومفاهيم أساسية :

1-1 تعريف المعادلة التفاضلية النبضية :[5]

لتكن لدينا المعادلة التالية :

$$x'(t) = f_c(t, x(t)) \quad ; \ (t, x(t)) \notin M \quad (2)$$

وهي معادلة تفاضلية

ولتكن لدينا المعادلة التالية :

$$\Delta x(t) = f_d(t, x(t)) \quad ; \ (t, x(t)) \in M \quad (3)$$

و هي معادلة غير مستمرة لحالات النظام الناتجة عن النبضات

بدمج المعادلتين (2) و (3) نحصل على النظام النبضي التالي :

$$\begin{cases} x'(t) = f_c(t, x(t)) & ; \ (t, x(t)) \notin M \\ \Delta x(t) = x(t^+) - x(t^-) = f_d(t, x(t)) & ; \ (t, x(t)) \in M \end{cases} \quad (4)$$

حيث $(t, x(t)) \in L \times \Omega$, $\Omega \subseteq IR^n$ مجموعة مفتوحة , $L \subseteq IR$

$f_d : L \times \Omega \to Q \ ; \ Q \subseteq IR^n \ , L \times \Omega \subseteq IR \times IR^n \ , f_c : L \times \Omega \to IR^n$

M : مجموعة تحدد متى تحدث النبضات

1-2 وجود ووحدانية حل المعادلة التفاضلية النبضية :[6]

لنعرف مسألة القيمة الابتدائية للنظام النبضي بالشكل التالي :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) & ; t \neq \tau_\kappa(x) \\ \Delta x = x(t_\kappa^+) - x(t_\kappa^-) = I_\kappa(x) & ; \ t = \tau_\kappa(x) \\ x(t_0^+) = x_0 & ; t_0 \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

حيث $\Omega \subset IR^n$ مجموعة مفتوحة , $D = IR^+ \times \Omega$, $\tau_\kappa \in C[\Omega, (0, \infty)] \ ; \forall \kappa = 1,2 \cdots$

$$f : D \to IR^n \ , \ I_\kappa : \Omega \to IR^n \ , \tau_0(x) = 0$$

$$\lim_{\kappa \to \infty} \tau_\kappa(x) = \infty \ ; \forall x \in \Omega \ , \ \tau_\kappa(x) < \tau_{\kappa+1}(x)$$

نقول عن التابع $x : (t_0, t_0 + a) \to IR^n$ حيث $a > 0 \ , t_0 \geq 0$

أنه حل للنظام (5) إذا تحقق ما يلي :

1) $(t, x(t)) \in D \quad ; \forall t \in [t_0, t_0 + a)$ و $x(t_0^+) = x_0$

2) $x(t)$ قابل للاشتقاق باستمرار و يحقق أن :

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad ; t \neq \tau_\kappa(x) \ , \ t \in [t_0, t_0 + a)$$

3) إذا كان $t \in [t_0, t_0 + a)$ و $t = \tau_\kappa(x)$ فإن

$$x(t^+) = x(t) + I_\kappa(x(t))$$

نفترض دوماً أن $x(t)$ مستمر من اليسار

و أن $s \neq \tau_j(x(s)) \ ; \ \forall j \ , \ t < s < \delta \ , \delta > 0$

مبرهنة 1-1:[6]

بفرض أن الشروط التالية محققة :

1 – الدالة $f: D \to IR^n$ مستمرة

2 – دالة النبضات $\tau_\kappa: \Omega \to (0, \infty)$ قابلة للاشتقاق

3 – إذا كان $t_1 = \tau_\kappa(x_1)$ من أجل $(t_1, x_1) \in D$ بحيث $\kappa \geq 1$

فإنه يوجد ثابت ما $\delta > 0$ بحيث يتحقق أن :

$$\frac{\partial \tau_\kappa(x)}{\partial x} f(t, x) \neq 1$$

من أجل $(t, x) \in D$ حيث $0 < t - t_1 < \delta$ و $|x - x_1| < \delta$

فإنه يوجد حل $x: [t_0 , t_0 + \alpha) \to IR^n$ للنظام (5) حيث α ثابت ما $\alpha > 0 ;$

2– دراسة استقرار المعادلة التفاضلية النبضية الخطية من المرتبة الأولى

تعريف 2- 1:[2]

فضاء الدوال $PC(D, F)$:

هو فضاء الدوال $\Psi: D \longrightarrow F$ حيث $D \subset IR , F \subset IR^{n\times m} , m, n \in IN$

المستمرة من أجل $t \in D$; $t \neq \tau_\kappa$ و المستمرة من اليسار مع نقاط انقطاع

من النوع الأول من أجل $t = \tau_\kappa \in D$

تعريف 2–2: [2]

فضاء الدوال $PC^l(D, F)$:

هو فضاء الدوال $\Phi: D \longrightarrow F$ حيث $D \subset IR , F \subset IR^{n\times m} , m, n, l \in IN$

التي تحقق أن :

$$\frac{d^l \Phi}{dt^l} \in PC(D, F)$$

تعريف2–3:[9]

نقول أن الحل الصفري للنظام النبضي (1) مستقر إذا تحقق ما يلي :

$$\forall \varepsilon > 0 \ , t_0 \in R^+ \qquad \exists \delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$$

حيث

$$\| x_0 \| < \delta \Longrightarrow \| x(t) \| < \varepsilon \qquad ; t \geq t_0$$

تعريف2–4:[9]

نقول أن الحل الصفري للنظام النبضي (1) مستقر أسياً إذا تحقق ما يلي :

من أجل أي قيمة ابتدائية x_0 توجد ثوابت $\alpha > 0 , M \geq 1$ بحيث يتحقق أن :

$$\| x(t, t_0, x_0) \| \leq M \| x_0 \| e^{-\alpha(t-t_0)} \qquad ; t \geq t_0$$

مبرهنة 2– 1: [3]

للنظام النبضي (1) حل غير صفري دوري بدور kT إذا وفقط تحقق أن

القوة k لأحد القيم الذاتية للمصفوفة الأحادية M لهذا النظام تساوي 1

حيث المصفوفة الأحادية M تعطى بالعلاقة التالية :

$$M = X(T^{+})$$

$X(t)$: مصفوفة الحلول الأساسية للنظام النبضي (1)

مبرهنة 2-2:[3]

حلول النظام النبضي (1) :

1) مستقرة إذا كانت القيم الذاتية للمصفوفة الأحادية M لهذا النظام أصغر أو تساوي الواحد

1) مستقرة أسياً إذا كانت القيم الذاتية للمصفوفة الأحادية M لهذا النظام أصغر تماماً الواحد

1) غير مستقرة إذا وجدت قيمة ذاتية واحدة على الأقل للمصفوفة الأحادية M لهذا النظام أكبر تماماً من الواحد

مبرهنة 2-3:[3]

إن حل النظام النبضي التالي :

$$\begin{aligned} &x'(t) = A(t)x(t) + g(t)x(t) \qquad ; t \neq \tau_\kappa , t \in IR \\ &\Delta x(t) = A_k\, x(t) + h_k \qquad ; t = \tau_\kappa \,, k \in Z , h_k \in IR \\ &x(t_0^{+}) = x_0 \end{aligned} \qquad (6)$$

حيث

المصفوفة $A(t)$ تحقق أن : $A(t), g(t) \in PC(IR, IR^{n\times n})$ و $A(t+T) = A(t) \;\; ; T > 0$

$$A_k \in IR^{n\times n} \;\; , |I + A_k| \neq 0 \quad ; \;\tau_\kappa < \tau_{\kappa+1} \;\; , (\kappa \in Z)$$

يوجد $q \in IN$ بحيث يحقق أن : $\tau_{\kappa+q} = \tau_\kappa + T$ و $A_{\kappa+q} = A_\kappa$

يعطى بالعلاقة التالية :

$$x(t) = X(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t,s)\, g(s)x(s,x_0)ds + \sum_{t_0<t_k<t} X(t,t_k)h_k \qquad ; t > t_0$$

حيث $X(t,s) = X(t)X^{-1}(s)$

$X(t)$: مصفوفة الحلول الأساسية للنظام النبضي (1)

مبرهنة 2-4:[2]

بفرض أن المتراجحة التالية محققة :

$$u(t) \le c + \int_{t_0}^{t} b(s)u(s)ds + \sum_{t_0\le\tau_k<t} B_k\, u(\tau_k)$$

حيث $u(t) \in PC(IR, IR)$, $b(t) \in PC(IR, IR^{+})$, $B_k \ge 0$, $c, k \in IN$ ثوابت

بالتالي

$$u(t) \le c \prod_{t_0\le\tau_k<t} (1 + B_k)\, e^{\int_{t_0}^{t} b(s)ds} \;\; ; t \ge t_0$$

مبرهنة 2-5:[2]

ليكن لدينا النظام النبضي التالي :

$$\begin{aligned} x'(t) &= A(t)x(t) + g(t)x(t) && ; t \neq \tau_\kappa \ , t \in IR \\ \Delta x(t) &= A_k\, x(t) + h_k x(t) && ; t = \tau_\kappa \ , k \in Z \, , h_k \in IR \\ x(t_0^+) &= x_0 \end{aligned} \qquad (7)$$

حيث

المصفوفة $A(t)$ تحقق أن : $A(t)\, , g(t) \in PC(IR\, , IR^{n\times n})$ و $T > 0\ ; A(t+T) = A(t)$

$A_k \in IR^{n\times n}\, , |I + A_k| \neq 0\ ,\ \ |I + A_k + h_k| \neq 0\ ;\ \tau_\kappa < \tau_{\kappa+1}\ ;\ (\kappa \in Z)$

يوجد $q \in IN$ بحيث يحقق أن : $\tau_{\kappa+q} = \tau_\kappa + T$ و $A_{\kappa+q} = A_\kappa$

إذا تحققت المتراجحة التالية :

$$|X(t,s)| \leq K e^{\alpha(t-s)} \quad ; \text{ثوابت } \alpha\, , K \geq 1$$

حيث $X(t,s) = X(t)X^{-1}(s)$

$X(t)$: مصفوفة الحلول الأساسية للنظام النبضي (1)

فإن المتراجحة التالية محققة :

$$|Y(t,s)| \leq K e^{\alpha(t-s)} \prod_{s \leq \tau_k < t} (1 + K|h_k|)\, e^{\int_s^t K|g(\tau)|d\tau} \qquad ; t\, , s \in IR\, , t \geq s$$

حيث $Y(t,s) = Y(t)Y^{-1}(s)$

$Y(t)$: مصفوفة الحلول الأساسية للنظام النبضي (7)

مبرهنة 2-6:

إذا كان حل النظام النبضي (1) مستقر أسياً فإن حل النظام النبضي (6) مستقر

حيث

$$\int_{t_0}^{\infty} \| g(t) \| \, dt < \infty \qquad (8)$$

البرهان :

بما أن النظام النبضي (1) مستقر أسياً فحسب تعريف الاستقرار الأسي نجد أن :

$$|X(t,s)| \leq K e^{-\alpha(t-s)} \quad ; \text{ثوابت } \alpha > 0\, , K \geq 1 \ , s \leq t < \infty \quad (9)$$

حيث $X(t,s) = X(t)X^{-1}(s)$

$X(t)$: مصفوفة الحلول الأساسية للنظام النبضي (1)

و حسب المبرهنة $(2-3)$ حل النظام النبضي (6) يعطى بالعلاقة التالية :

$$x(t,x_0) = X(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t,s)\, g(s)x(s,x_0)ds + \sum_{t_0 < t_k < t} X(t,t_k)h_k \quad ; t > t_0$$

بالتالي

$$x(t\, , x_0) - x(t\, , y_0) = X(t\, , t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t\, , s)\, g(s)x(s\, , x_0)ds + \sum_{t_0 < t_k < t} X(t\, , t_k)\, h_k$$

$$-X(t\,,t_0)y_0-\int_{t_0}^{t}X(t\,,s)\,g(s)x(s\,,y_0)ds-\sum_{t_0<t_k<t}X(t\,,t_k)\,h_k$$

و بالتالي حسب العلاقة (9) نجد أن

$$\| x(t\,,x_0)-x(t\,,y_0)\| \le Ke^{-\alpha(t-s)}\| x_0-y_0\| +$$
$$\int_{t_0}^{t}Ke^{-\alpha(t-s)}\| g(s)\| \| x(s,x_0)-x(s,y_0)\| ds$$

$$\Rightarrow \| x(t,x_0)-x(t,y_0)\| \| \le L\| x_0-y_0\| +\int_{t_0}^{t}L\| g(s)\| \| x(s,x_0)-x(s,y_0)\| ds$$

و بالتالي حسب المبرهنة $(2-4)$ نجد أن

$$\| x(t,x_0)-x(t,y_0)\| \le L\| x_0-y_0\| \, e^{L\int_{t_0}^{t}\| g(s)\| ds}\qquad ;L>0$$

وبالاستفادة من الشرط (8) نجد أن

$$\| x(t,x_0)-x(t,y_0)\| \le M\| x_0-y_0\| \;\; ;M=L\,e^{L\int_{t_0}^{t}\| g(s)\| ds}$$

بوضع $\delta=\dfrac{\varepsilon}{M}$ نجد أن

$$\| x_0-y_0\| <\delta \;\Rightarrow \| x(t,x_0)-x(t,y_0)\| <\varepsilon$$

ومنه النظام النبضي (6) مستقر

مبرهنة 2-7:

إذا كان حل النظام (1) مستقر أسياً فإن حل النظام النبضي (7) مستقر أسياً

حيث

$$\int_{t_0}^{\infty}\| g(t)\| dt<\infty \quad ,\prod_{\tau_k>t_0}h_k<\infty \qquad (10)$$

البرهان:

نفرض أن حل النظام النبضي (1) مستقر أسياً بالتالي حسب تعريف الاستقرار الأسي نجد أن :

$$|X(t,s)|\le Ke^{-\alpha(t-s)}\qquad ;\ \text{ثوابت}\ \alpha>0\,,K\ge 1\ \ ,s\le t<\infty$$

حيث $X(t,s)=X(t)X^{-1}(s)$

$X(t)$: مصفوفة الحلول الأساسية للنظام النبضي (1)

بالتالي حسب المبرهنة $(2-5)$ نستنتج أن

$$|Y(t,s)|\le Ke^{-\alpha(t-s)}\prod_{s\le\tau_k<t}(1+K|h_k|)\,e^{\int_s^t K|g(\tau)|d\tau}$$

حيث $Y(t,s)=Y(t)Y^{-1}(s)$

$Y(t)$: مصفوفة الحلول الأساسية للنظام النبضي (7)

وبالاستفادة من الشرط (10) نجد أن

$$|Y(t,s)|\le KCe^{-\alpha(t-s)}\qquad ;C=\prod_{s\le\tau_k<t}(1+K|h_k|)\,e^{\int_s^t K|g(\tau)|d\tau}$$

$$\Rightarrow |Y(t,s)|\le Le^{-\alpha(t-s)}\qquad ;L=KC>0$$

إذاً حسب تعريف الاستقرار الأسي نستنتج أن حل النظام النبضي (7) مستقر أسياً

مبرهنة 2-8:[4]

إذا كانت الدالة $f: I \times \Omega \longrightarrow IR^n$ حيث $\Omega \subseteq IR^n$ مجموعة مفتوحة , $I \subseteq IR$

قابلة للاشتقاق باستمرار على مجال تعريفها فإن للنظام التالي :

$$x'' = f(t,x)$$
$$x(t_0) = x_0$$

حل وحيد

مبرهنة 2-9:

إذا كانت $Z(t)$ مصفوفة أساسية للنظام التالي :

$$x''(t) = A(t)x \quad (11)$$

حيث $A(t)x$ قابلة للاشتقاق باستمرار على مجال تعريفها

فإنه يوجد مصفوفة ثابتة قابلة للقلب C بحيث يتحقق أن : $Z(t+T) = Z(t)C$

البرهان :

بفرض $Z(t)$ مصفوفة أساسية للنظام (11)

فإن $L(t) = Z(t+T)$ هي أيضاً مصفوفة أساسية للنظام (11) لأن

$$L''(t) = X''(t+T) = A(t+T)\,Z(t+T) = A(t)L(t)$$

لنعرف المصفوفة $C(t)$ بالشكل التالي : $C(t) = Z^{-1}(t)L(t) \ ;\forall t$

$$\Longrightarrow L(t) = Z(t)C(t) \quad (12)$$

نضع $C_0 = C(t_0)$ بالتالي

$L_1(t) = Z(t)C_0 \quad (13)$ هي مصفوفة أساسية للنظام (11) لأن

$$L_1''(t) = (Z(t)C_0)'' = A(t)\,Z(t)C_0 = A(t)L_1(t)$$

بالتالي من العلاقتين (12) و (13) نحصل على مصفوفتين أساسيتين $L(t)$

و$L_1(t)$ بحيث يتحقق أن : $L_1(t_0) = L(t_0)$

فحسب وحدانية الحل العلاقتان (7) و (8) متساويتان

بالتالي

$C_0 = C(t) \quad ; \quad \forall t$ أي أن المصفوفة C مصفوفة ثابتة

بالتالي يوجد مصفوفة ثابتة قابلة للقلب C بحيث أن $Z(t+T) = Z(t)C$

مبرهنة 2 – 10:

إذا كانت $Z_1(t)$ مصفوفة أساسية للنظام النبضي التالي :

$$\begin{aligned}
x''(t) &= A(t)x(t) && ;t \neq \tau_\kappa \\
\Delta x'(t) &= c_\kappa x'(t) && ;t = \tau_\kappa\ ,c_\kappa \in IR \qquad (14)\\
\Delta x(t) &= c_\kappa x(t) && ;t = \tau_\kappa
\end{aligned}$$

حيث

$$x(t) \in \Omega \subseteq IR^n\ ,t \in IR$$

المصفوفة $A(t)$ تحقق أن : $A(t) \in PC(IR, IR^n)$ و $T > 0$; $A(t+T) = A(t)$

$$\tau_\kappa < \tau_{\kappa+1} \; ; \; (\kappa \in Z)$$

يوجد $q \in IN$ بحيث $\tau_{\kappa+q} = \tau_\kappa + T$ و $c_{\kappa+q} = c_\kappa$

فإنه يوجد مصفوفة M_1 ثابتة قابلة للقلب وحيدة بحيث أن :

$$Z_1(t+T) = Z_1(t)M_1 \quad ; t \in IR$$

البرهان :

بفرض أن $Z_1(t)$ مصفوفة أساسية للنظام النبضي (14)

بالتالي المصفوفة $H(t) = Z_1(t+T)$ هي أيضاً مصفوفة أساسية لهذا النظام لأن :

$$H''(t) = Z_1''(t+T) = A(t+T)Z_1(t+T) = A(t)H(t) \quad ; t \neq \tau_\kappa$$

$$\Delta H(\tau_\kappa) = \Delta Z_1(\tau_\kappa + T) = \Delta Z_1(\tau_{\kappa+q}) = c_{\kappa+q}Z_1(\tau_{\kappa+q})$$
$$= c_\kappa Z_1(\tau_\kappa + T) = c_\kappa H(\tau_\kappa)$$

$$\Delta H'(\tau_\kappa) = \Delta Z_1'(\tau_\kappa + T) = \Delta Z_1'(\tau_{\kappa+q}) = c_{\kappa+q}Z_1(\tau_{\kappa+q})$$
$$= c_\kappa Z_1(\tau_\kappa + T) = c_\kappa H(\tau_\kappa)$$

بالتالي بتطبيق نفس الخطوات السابقة في المبرهنة $(2-10)$ نجد أنه

يوجد مصفوفة $M_1 \in IR^{n\times n}$ ثابتة قابلة للقلب وحيدة بحيث أن :

$$Z_1(t+T) = Z_1(t)M_1 \quad ; t \in IR \quad (15)$$

ملاحظة 2-1:

في المساواة التالية : $Z_1(t+T) = Z_1(t)M_1$ نسمي المصفوفة M_1

مصفوفة أحادية أو مصفوفة التغاير الأحادي

لتكن $Z_2(t)$ مصفوفة أساسية أخرى للنظام (14) ولتكن M_2 مصفوفة أحادية تحقق أن :

$$Z_2(t+T) = Z_2(t)M_2$$
$$Z_2(t+T) = Z_1(t+T)\,S \quad ; \det S \neq 0$$
$$\Rightarrow \; Z_1(t+T)\,S = Z_2(t)M_2 = Z_1(t)\,SM_2 \quad (16)$$

بمقارنة العلاقتين (15) و (16) نستنتج أن :

$$Z_1(t)\,SM_2S^{-1} = Z_1(t)M_1 \Rightarrow M_1 = SM_2S^{-1}$$

إذاً كل المصفوفات أحادية التغاير للنظام النبضي (14) متشابهة بالتالي لها نفس القيم الذاتية .

ملاحظة 2-2:

بما أن C مصفوفة ثابتة في العلاقة : $Z_1(t+T) = Z_1(t)C$ بالتالي

$$C = C(0) = Z_1^{-1}(0)H(0) = Z_1^{-1}(0)\; Z_1(T)$$

إذا افترضنا أن $Z_1(0) = I$ بالتالي $C = Z_1(T)$

$$\Longrightarrow \; Z_1(t+T) = Z_1(t)C = Z_1(t)\; Z_1(T)$$

ملاحظة 2-3:

لحساب القيم الذاتية للمصفوفة M_1 في العلاقة (15) نختار مصفوفة أساسية كيفية

للنظام النبضي (14) ثم نحسب القيم الذاتية للمصفوفة التالية :

$$M_1 = Z_1(t_0 + T)\; Z_1^{-1}(t_0) \quad ; t_0 \in IR$$

حالة خاصة :

إذا افترضنا $Z_1(0^+) = I$ بالتالي $M_1 = Z_1(T^+)$

مبرهنة 2- 11 :

من أجل أي قيمة ذاتية ρ للمصفوفة الأحادية للنظام (14) يوجد حل غير بديهي لهذا النظام $x = \varphi(t)$ بحيث :

$$\varphi(t+T) = \rho\varphi(t) \qquad (17)$$

بالعكس إذا وجد لأجل أي حل غير بديهي $x = \varphi(t)$ عدد ما ρ بحيث تتحقق العلاقة

(17) فإن ρ قيمة ذاتية للمصفوفة الأحادية للنظام (14)

البرهان :

ليكن $\varphi(t)$ حل للنظام (14) بحيث $\varphi(0)$ شعاع ذاتي لمصفوفة التغاير الأحادي M_1

مرافق للقيمة الذاتية ρ أي

$$Z_1(T)\varphi(0) = \rho\varphi(0)$$

بالتالي

$$\varphi(t+T) = Z_1(t+T)\varphi(0) = Z_1(t)\ Z_1(T)\varphi(0) = Z_1(t)\rho\varphi(0) = \rho\varphi(t)$$

بالتالي العلاقة (17) محققة

بفرض العلاقة (17) محققة من أجل حل غير بديهي $\varphi(t)$

بالتالي

$$\varphi(t+T) = Z_1(t+T)\varphi(0) = Z_1(t)\ Z_1(T)\varphi(0) = \rho\varphi(t) = \rho\ Z_1(t)\varphi(0)$$
$$\Rightarrow \big(Z_1(T) - \rho I\big)\varphi(0) = 0$$

بالتالي ρ قيمة ذاتية للمصفوفة الأحادية للنظام النبضي (14)

مبرهنة 2- 12:

النظام النبضي (14) يملك حل غير بديهي دوري بدور κT إذا و فقط

القوة κ على الأقل لأحد القيم الذاتية للمصفوفة الأحادية للنظام النبضي(14) تساوي 1

البرهان :

بفرض ρ قيمة ذاتية للمصفوفة الأحادية للنظام النبضي (14)

باستخدام المبرهنة $(2-12)$ فإنه يوجد حل للنظام النبضي (14) بحيث

$$\varphi(t+\kappa T) = \varphi(t)\ \big(\varphi(T)\big)^{\kappa} = \rho^{\kappa}\varphi(t)$$

بالتالي إذا كان $\rho^{\kappa} = 1$ فإن

$\varphi(t)$ هو حل دوري للنظام (14) بدور κT

بالعكس إذا كان النظام النبضي (14) يملك حل دوري $\varphi(t)$ بدور κT أي

$$\varphi(t+\kappa T) = \varphi(t)$$
$$\Rightarrow\ \varphi(t+\kappa T) = Z_1(t+\kappa T)\ \varphi(0) = Z_1(t)\ \varphi(0) = \varphi(t)$$
$$\Rightarrow (\ Z_1(\kappa T) - I)\ \varphi(0) = 0$$

بما أن $Z_1(\kappa T) = \left(Z_1(T)\right)^{\kappa}$ بالتالي

$\varphi(0)$ شعاع ذاتي للمصفوفة $\left(Z_1(T)\right)^{\kappa}$

القيم الذاتية للمصفوفة $\left(Z_1(T)\right)^{\kappa}$ هي $\left(\rho_j\right)^{\kappa}$ حيث ρ_j قيمة ذاتية للمصفوفة الأحادية للنظام (14) لأن

$$Z_1(T)x = \rho_j x$$

أي العلاقة صحيحة من أجل $\kappa = 1$

نفرض صحة العلاقة من أجل $\kappa = n$ لنثبت صحتها من أجل $\kappa = n + 1$

$$\left(Z_1(T)\right)^{n+1}x = Z_1(T)\left(Z_1(T)\right)^{n}x = Z_1(T)\left(\rho_j\right)^{n}x = \left(\rho_j\right)^{n} Z_1(T)x$$

$$= \left(\rho_j\right)^{n}\rho_j x = \left(\rho_j\right)^{n+1}x$$

بالتالي حسب مبدأ الاستقراء الرياضي نستنتج أن العلاقة صحيحة مهما يكن $\kappa \geq 1$

$$\Rightarrow \quad Z_1(\kappa T)\,\varphi(0) = \left(\rho_j\right)^{\kappa}\varphi(0) \quad ; \quad j = \overline{1, n}$$

بالتالي

$$\varphi(t+\kappa T) = Z_1(t)\, Z_1(\kappa T)\varphi(0) = Z_1(t)\left(\rho_j\right)^{\kappa}\varphi(0) = \left(\rho_j\right)^{\kappa}\varphi(t) \qquad (18)$$

لكن $\quad \varphi(t+\kappa T) = \varphi(t) \qquad (19)$

بمقارنة العلاقتين (18) و (19) نجد أن

$$\left(\rho_j\right)^{\kappa} = 1$$

مثال 2-1:

لندرس وجود الحلول الدورية للنظام النبضي الدوري بدور $T = \pi$ التالي :

$$x''(t) = Ax(t) \qquad ; t \neq \tau_\kappa \; ; \; t \in IR$$

$$\Delta x'(t) = 3x'(t) \qquad ; t = \tau_\kappa$$

$$\Delta x(t) = 3x(t) \qquad ; t = \tau_\kappa$$

حيث $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$

الحل :

لإيجاد المصفوفة الأساسية للنظام التالي : $\quad x''(t) = Ax(t)$

نخفضه إلى نظام من المرتبة الأولى وذلك بفرض :

$$y_1(t) = x_1(t)\,, y_2(t) = x'_1(t)\,, y_3(t) = x_2(t)\,, y_4(t) = x'_2(t)$$

بالتالي يصبح النظام بالشكل التالي : $\quad y' = By$

حيث $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

نوجد القيم الذاتية للمصفوفة B و المتجهات الذاتية المرافقة لها

$$|B - \lambda I| = 0 \qquad ; \text{ I : مصفوفة الواحدة}$$

$$\lambda_1 = 1 \;\; , \lambda_2 = -1 \;\; , \lambda_3 = \sqrt{2} \;\; , \lambda_4 = -\sqrt{2}$$

$$v_1=\begin{pmatrix}0.7071\\0.7071\\0\\0\end{pmatrix}\quad ,v_2=\begin{pmatrix}-0.7071\\0.7071\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$v_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0.5774\\0.8165\end{pmatrix}\quad ,v_4=\begin{pmatrix}0\\0\\-0.5774\\0.8165\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad Z_1(t)=(\,v_1e^{\lambda_1 t},v_2e^{\lambda_2 t},v_3e^{\lambda_3 t},v_4e^{\lambda_4 t})$$

$$M_1=Z_1(T^+)=(I+c_\kappa)Z_1(T)=Z_1(T)+3Z_1(T)=4Z_1(T)$$

$$=\begin{pmatrix}2.8284e^{T} & -2.8284e^{-T} & 0 & 0\\ 2.8284e^{T} & 2.8284\,e^{-T} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2.3096e^{\sqrt{2}\,T} & -\,2.3096\,e^{-\sqrt{2}\,T}\\ 0 & 0 & 3.266\,e^{\sqrt{2}\,T} & 3.266\,e^{-\sqrt{2}\,T}\end{pmatrix}$$

نوجد القيم الذاتية μ_j للمصفوفة التالية : $M_1\,;T=\pi$

$$\mu_1=65.34\ ,\ \ \mu_2=0.2204\,,\ \ \mu_3=1996.32\ \ ,\ \ \mu_4=0.0824$$

نلاحظ أن القيم الذاتية للمصفوفة الأحادية M_1 مختلفة عن الواحد

بالتالي حسب المبرهنة $(2-12)$ نستنتج أنه لا يوجد لهذا النظام النبضي حل دوري بدور T

3-دراسة الاستقرار الأسي للنظام النبضي اللاخطي

ليكن لدينا النظام النبضي اللاخطي التالي :

$$\begin{aligned}&x'(t)=f(t,x) && ;t\neq t_\kappa\\ &\Delta x(t)=x(t_i^+)-x(t_i^-)=I_\kappa\big(t,x(t)\big) && ;t=t_\kappa\,;\kappa\in IN\qquad (20)\\ &x(t_0)=x_0\end{aligned}$$

توطئة 3-1:[2]

بفرض لدينا $r(t)\in PC^1(IR^+,IR)$ بحيث تتحقق المتراجحة التالية :

$$\begin{aligned}&r'(t)\le a(t)r(t) && ;\ \ t\neq\tau_\kappa\\ &r(\tau_\kappa{}^+)\le a_\kappa r(\tau_\kappa)\end{aligned}$$

حيث $\kappa\in IN$, $a_\kappa\ge 0$ ثوابت , $a(t)\in PC(IR^+,IR)$, $\tau_\kappa\in IR^+$, $t\in IR^+$

بالتالي المتراجحة التالية محققة :

$$r(t)\le r(t_0)\prod_{t_0\le\tau_\kappa<t}a_\kappa\,e^{\int_{t_0}^{t}a(s)ds}\qquad ;\ t\ge t_0\ge 0$$

مبرهنة 3-1:

ليكن لدينا النظام النبضي اللاخطي (20) عندئذٍ إذا تحققت الشروط التالية :

1) يوجد تابع $v(t)\in PC^1(IR^+,IR)$ بحيث أن : $v'(t)\le a(t)v(t)\quad ;\ t\neq\tau_\kappa$

حيث $a(t)$ تابع محدود أي : $|a(t)|\le M$

2) $|x(t)|\le v(t)e^{-2M(t-t_0)}$

حيث أن $x(t)$ هو حل النظام (20)

3) $|x_0| = v_0$

4) $\prod_{t_0 \le \tau_\kappa < t} a_\kappa < \infty \; , a_\kappa > 0 \; ; \qquad v(\tau_\kappa^{\;+}) \le a_\kappa v(\tau_\kappa)$

فإن الحل الصفري لهذا النظام مستقر أسياً

البرهان :

من الشرطين (1) و (4) و باستخدام التوطئة $(3-1)$ نجد أن :

$$v(t) \le v_0 \prod_{t_0 \le \tau_\kappa < t} a_\kappa \, e^{\int_{t_0}^{t} M ds}$$

$$v(t) \le v_0 \prod_{t_0 \le \tau_\kappa < t} a_\kappa \, e^{M(t-t_0)}$$

باستخدام الشرط (3) نجد أن :

$$v(t) \le |x_0| C e^{M(t-t_0)} \qquad ; C = \prod_{t_0 \le \tau_\kappa < t} a_\kappa \;\; , C > 0 \quad (21)$$

نضرب طرفي العلاقة (21) بالمقدار $e^{-2M(t-t_0)}$ نجد أن :

$$v(t)\, e^{-2M(t-t_0)} \le |x_0| \, C e^{-M(t-t_0)}$$

و باستخدام الشرط (2) نجد أن :

$$|x| \le v(t)\, e^{-2M(t-t_0)} \le |x_0| C e^{-M(t-t_0)}$$

إذاً حسب تعريف الاستقرار الأسي نجد أن الحل الصفري للنظام (20) مستقر أسياً

مثال3−1:

لندرس الاستقرار الأسي للنظام النبضي اللاخطي التالي :

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{b(t)}{1+x(t)^2} x(t) && ; t \ne t_\kappa \\ x(t_\kappa^+) &= (1+c_\kappa)\, x(t_\kappa^-) && ; t = t_\kappa \; , \prod_{t_0 \le \tau_\kappa < t} (1+c_\kappa) < \infty \qquad (22) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

الحل:

نفرض أن :

$$v(t) = |x| e^{2M(t-t_0)} \qquad ; M \le \frac{-1}{x}$$

$$v'(t) = \frac{x}{|x|} e^{2M(t-t_0)} + 2\, M e^{2M(t-t_0)} |x|$$

$$= \left(\frac{x}{|x|^2} + 2\, M\right) e^{2M(t-t_0)} |x| = \left(\frac{1}{x} + 2\, M\right) v(t) \le M v(t)$$

بالتالي الشرط (1) من المبرهنة $(3-1)$ محقق

ولدينا من تعريف $v(t)$ الشرط (2) من المبرهنة $(3-1)$ محقق

$$v_0 = e^{2M(t-t_0)} |x_0| = |x_0| . 1 = |x_0|$$

أي الشرط (3) محقق بقي علينا إثبات الشرط (4)

$$v(t_\kappa^+) = |(1+c_\kappa)x|e^{2M(t_\kappa - t_0)} = |(1+c_\kappa)||x|e^{2M(t_\kappa - t_0)}$$
$$= |(1+c_\kappa)||x|e^{2M(t_\kappa - t_0)} = |(1+c_\kappa)|\, v(t_\kappa)$$

بالتالي الشرط (4) محقق فحسب المبرهنة $(3-1)$

نستنتج أن الحل الصفري للنظام النبضي اللاخطي (22) مستقر أسياً .

النتائج والتوصيات :

مما سبق توصلنا من هذا البحث إلى دراسة استقرار المعادلة التفاضلية النبضية من المرتبة الأولى بوضع شروط معينة للمسألة . وكذلك درسنا الاستقرار الأسي للمعادلة التفاضلية النبضية غير الخطية بوجود شروط معينة على تابع النبضات .

نوصي بدراسة استقرار الحلول الدورية للنظام النبضي الخطي الدوري المتجانس من المرتبة الثانية ، كما نوصي بدراسة الاستقرار الأسي للأنظمة النبضية اللاخطية وذلك بإضافة شروط جديدة مطورة على تابع النبضات

المراجع

[1]- Akhmet, M., & Yılmaz, E. (2014). *Neural networks with discontinuous/impact activations*. New York: Springer

[2]- Bainov, D. D., & Simeonov, P. (1995). *Impulsive differential equations: asymptotic properties of the solutions (Vol. 28)*. World Scientific.

[3]- Bainov, D., & Simeonov, P. (2017*). Impulsive differential equations: periodic solutions and applications*. Routledge.

[4]- Hu, J., & Li, W. P. (2005). Theory of ordinary differential equations. *Existence, Uniqueness and Stability. Publications of Department of Mathematics. The Hong Kong University of Science and Technology*.

[5]- Li, X., & Song, S. (2022). *Impulsive Systems with Delays*. Springer Singapore.

[6]- Lakshmikantham, V., & Simeonov, P. S. (1989). *Theory of impulsive differential equations* (Vol. 6). World scientific

[7]- Milev, N. V., and D. D. Bainov. *"Stability of linear impulsive differential equations."* *International journal of systems science* 21.11 (1990): 2217-22

[8]-*Milman, V.D., Myshkis, A.D.: On the stability of motion in the presence of impulses. Sib. Math. J. 1, 233–237 (1960)*

[9]- Stamova, I., & Stamov, G. T. (2016*). Applied impulsive mathematical models (Vol. 31*8). Cham, Switzerland: Springer.