مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (8) العدد (1) 2024
Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (8) No. (1) 2024

بعض المؤثرات المهمة على زمرة هايزنبرغ و أبرز خصائص هذه المؤثرات

سهى سلامه *

(تاريخ الإيداع ١٦/١١/ ٢٠٢٣ – تاريخ النشر ١٣/٢/ ٢٠٢٤)

□ ملخّص □

نقدم في هذا البحث زمرة هايزنبرغ، و هي الزمرة الأكثر شهرة من زمر لي عديمة القوى، حيث سندرس زمرة هايزنبرغ الأولى و ننتقل منها إلى زمرة هايزنبرغ بشكل عام. نعرف على هذه الزمرة عدة مؤثرات مهمة، و هي مؤثر الانسحاب و مؤثر التمدد غير الإيزوتروبي و مؤثر لابلاس هايزنبرغ. حيث سنوضح اعتماداً على المفاهيم اللازمة بعض خصائص هذه المؤثرات.

الكلمات المفتاحية: زمرة هايزنبرغ، المؤثر تحت الناقصي، المؤثر فوق الناقصي، الانسحاب، التمدد غير الإيزوتروبي، مؤثر لابلاس هايزنبرغ.

* قائم أعمال باختصاص التحليل الرياضي– قسم الرياضيات ، كلية العلوم ، جامعة طرطوس

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (8) العدد (1) 2024
Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (8) No. (1) 2024

Some important operators of Heisenberg group, and most important properties of these operators

Soha salama*

(Received 16/11/2023.Accepted 13/2/2024)

□ABSTRACT □

In this work we introduce the Heisenberg group, which is the most famous group between the Lee groups. We study the first Heisenberg group, then we study the Heisenberg group in general.

We define on this group many important operators, which is translation operator, non_isotropic dilation and Heisenberg Laplacian. We discuss some properties of these operators.

Key words: Heisenberg group, subelliptic operator, hypoelliptic operator, translation, non_isotropic dilation, Heisenberg Laplacian.

*Academic assistant –of sports analysis, Department of Mathematics -, Faculty of Science, tartous University- Syria

مقدمة:

كانت بداية ظهور بنية زمر لي عندما لاحظ عالم الرياضيات Sophus Lie عام 1870 العلاقة الوثيقة بين هذا النوع من الزمر، وحلول بعض المعادلات التفاضليّة. و تبيّن أنّ مولّدات زمر لي المؤثرة على فضاءاتٍ مناسبة، لها الصيغة نفسها التي تتميز بها الدوال الخاصّة.

في عام 1964 قام Willard Miller بنشر دراسةٍ قصيرةٍ تحدّد هذا الاتصال بطريقةٍ واحدة. و في عام 1965 قام N. Ja. Vilenkin بنشر صيغته المختلفة إلى حدٍّ ما عن صيغة Miller، وقد نشرها باللغة الروسية آنذاك. في الوقت نفسه كان Eugene Wigner يُدرّس دورةً تدريبيةً حول هذا الموضوع في جامعة برينستون.

و من ثمّ كان عام 1968 هو عام البداية لهذا الموضوع، ففي هذه السنة نَشر Miller ما يقارب ثلاث وأربعين صفحةً على شكل كتابٍ كاملٍ. وتمّ نشر ملاحظات Wigner من قبل العالم Talman، وذلك بعد أخذ الموافقة من Wigner. كما تمّت ترجمة كتاب Vilenkin، ونشره باللغة الإنكليزية.

ومنذ ذلك الحين أصبح الاتصال بين زمر لي والدوال الخاصّة للفيزياء الرياضية معروفاً على مستوٍ متقدّم.

ومن الأمثلة عن زمر لي عديمة القوى نجد زمرة هايزنبرغ، وإنّ موضوع دراستنا في هذا البحث هو التحليل التوافقي على هذه الزمرة. [1,3,11]

تدخل زمرة هايزنبرغ في العديد من المجالات التطبيقيّة بما في ذلك الجوانب المختلفة لميكانيك الكم.

سُمّيت هذه الزمرة عند علماء الرياضيات بزمرة هايزنبرغ، في حين أطلق عليها علماء الفيزياء اسم (زمرة وايل) Weyl group.

سنعرف في هذا البحث عدة مؤثرات مهمة على زمرة هايزنبرغ منها مؤثر الانسحاب و مؤثر التمدد غير الإيزوتروبي و مؤثر لابلاس هايزنبرغ.

هدف و أهمية البحث:

إن هدفنا في هذا البحث هو دراسة خصائص بعض المؤثرات المهمة على زمرة هايزنبرغ، حيث سندرس مؤثر الانسحاب اليساري على هذه الزمرة و نبين أن الحقول المتجهة المولدة لجبر هايزنبرغ لا متغيرة يسارياً، كما سندرس بعض خواص مؤثر لابلاس هايزنبرغ، و هو مؤثر تفاضلي معرف على زمرة هايزنبرغ كما أنه مقابل لمؤثر لابلاس في الحالة الإقليدي، وتأتي أهمية هذا البحث من أننا سندرس خصائص هذا المؤثر و نوضحها مقارنةً مع الحالة الناقصية لمؤثر لابلاس الإقليدي التي درست بدقة خلال العقود الماضية.

هذا وتعد زمرة هايزنبرغ الزمرة الأكثر شهرة في زمر لي عديمة القوى، و هي زمرة كارنوت غير تبديلية، ولها دور مهم في العديد من فروع الرياضيات مثل نظرية التمثيل و المعادلات التفاضلية الجزئية و ميكانيكا الكم، و إن سبب مساهمتها في مجموعة متنوعة من المجالات هو إمكانية إنشاء هذه الزمرة بطريقتين مختلفتين.

المناقشة:

1. مفاهيم أساسيّة:

تعريف 1.1: مؤثر لابلاس_ ديريخليه (the Dirichlet_ Laplacian): [7]

يُعد مؤثر لابلاس_ ديريخليه من المفاهيم الأساسية في الفيزياء الرياضية، و يظهر في عدة مجالات كالمعادلات التفاضلية و وصف الظواهر الفيزيائية المختلفة مثل انتشار الأمواج و حركة المواد السائلة، و الظواهر المتعلقة بميكانيكا الكم.

يُعرّف مؤثر لابلاس في الإحداثيات الديكارتية لأجل $n \in \mathbb{N}$ بأنه مجموع مؤثرات تفاضلية من المرتبة الثانية مُعطى بالشكل:

$$-\Delta := -\sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2 = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \tag{1.1}$$

و لأجل نطاق مفتوح محدود $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ فإن مؤثر لابلاس_ ديريخليه $-\Delta_\Omega$ هو مؤثر مترافق ذاتياً يرتبط مع الصيغة التربيعية نصف المحدودة (semi_ bounded quadratic form) :

$$a[u] := \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx = \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right|^2 dx \tag{1.2}$$

حيث مجموعة تعريفها هي فضاء جزئي من فضاء سوبوليف $H_0^1(\Omega)$، ويسمى المؤثر $-\Delta_\Omega$ بمؤثر لابلاس_ دير يخليه (Dirichlet_ Laplacian) في $L^2(\Omega)$، و ∇ هو التدرج.

ملاحظة 1.1: لأجل $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ يُعرف فضاء سوبوليف بالشكل:

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega); i = 1,2, \dots, n \right\}$$

و

$$H_0^1(\Omega) = \{ u \in H^1(\Omega) : u = 0 \ in \ \partial\Omega \}$$

تعريف 1.2: **المؤثر الناقصي (Elliptic operator)**: [10]

ليكن P مؤثراً تفاضلياً خطياً على $\mathbb{R}^n$ من المرتبة d بالشكل:

$$P = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n \le d} a_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1{}^{\alpha_1} \dots \partial x_n{}^{\alpha_n}}$$

حيث $a_\alpha \in \mathbb{C}$ و $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.

نعلم أن تحويل فورييه لدالة يُعطى بالشكل:

$$\hat{u}(\xi) := \int e^{-ix\xi} u(x) \, dx \ ; x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^n$$

و بأخذ: $V = \frac{\partial u}{\partial x_j}$

يكون: $\hat{V}(\xi) = i \, \xi_j \, \hat{u}(\xi)$

وهنا اعتمدنا على العلاقة:

$$\int D^\alpha f \, e^{-ikx} dx = \int f \, \overline{D^\alpha e^{ikx}} dx$$

و الآن لأجل المؤثر P بمعاملات ثابتة نجد أن:

$$V = P u \Rightarrow \hat{V}(\xi) = \sigma(\xi) \, \hat{u}(\xi)$$

حيث

$$\sigma(\xi) := \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n \le d} a_\alpha \, (i \, \xi_1)^{\alpha_1} \dots (i \, \xi_n)^{\alpha_n}$$

و تُدعى رمزاً لـ P (symbol of P)، و يعرف الرمز الرئيس لـ P (The principal symbol) بالشكل:

$$\sigma_\circ(\xi) := i^d \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=d} a_\alpha\, (\xi_1)^{\alpha_1} \dots (\xi_n)^{\alpha_n}$$

حيث d هي مرتبة المؤثر التفاضلي كما ذكرنا أعلاه، عندئذٍ إذا كان P مؤثراً تفاضلياً بمعاملات ثابتة على $\mathbb{R}^n$ فإننا نقول إنه ناقصي إذا تحقق:

$$\sigma_\circ(\xi) \neq 0 \quad ; \forall \xi \neq 0$$

و تكون $\sigma_\circ(\xi)$ هي الرمز الرئيس لـ P.

تعريف 1.3: المؤثر التفاضلي فوق الناقصي (hypoelliptic): [6]

ليكن P مؤثراً تفاضلياً خطياً على $\mathbb{R}^n$ عندئذٍ يقال إنه مؤثر فوق ناقصي إذا كانت أية مجموعة مفتوحة $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ تحقق العلاقة: $Pu \in C^\infty(\Omega)$ فيجب أن يكون: $u \in C^\infty(\Omega)$.

تعريف 1.4: المؤثر تحت الناقصي (subelliptic): [4]

لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ، و P مؤثر تفاضلي من المرتبة الثانية و تناظري (symmetric) في $C_0^\infty(\Omega)$، عندئذٍ لأجل $0 < \varepsilon < 1$ فإننا ندعو المؤثر التفاضلي P بأنه تحت ناقصي من المرتبة ε عند $x \in \Omega$ إذا وُجد جوار K لـ x، و ثابت $C_K > 0$ بحيث تتحقق لأجل كل $u \in C_o^\infty(K)$ العلاقة:

$$\|u\|_\varepsilon^2 \leq C_K\, (|\langle Pu, u\rangle| + \|u\|_0^2) \tag{1.3}$$

حيث:

$$\|u\|_\varepsilon := \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^\varepsilon |F\,u\,(\xi)|^2\, d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.4}$$

يرمز إلى نظيم سوبوليف (sobolev norm) من المرتبة ε، و $F\,u$ هو تحويل فورييه لـ u، و $\langle .,. \rangle$ هو الجداء الداخلي في $L^2(\Omega)$.

أي أنه يقال عن المؤثر التفاضلي إنه تحت ناقصي إذا كان نظيم سوبوليف بمرتبة كسرية له محدود محلياً من الأعلى بنظيم سوبوليف آخر يتعلق بالمؤثر التفاضلي المُعطى و بشروط حدود ديريخليه.

2. زمرة هايزنبرغ:

تعريف 2.1: جبر لي (Lie Algebra): [11]

ليكن V فضاءً متجهياً فوق حقل $\mathbb{K}$، وليكن $[\ ,\ ]: V \times V \to V$ جداء ثنائي الخطيّة يحقق لأجل كل $X, Y, Z \in V$ الخواص الآتية:

1. $[X, Y] = -[Y, X]$
2. $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (متطابقة جاكوبي)

ندعو الثنائية $\mathfrak{g} := (V, [\ ,\ ])$ جبر لي، والجداء $[\ ,\ ]$ ندعوه جداء لي للجبر g(مبادل لي).

من الأمثلة عن جبر لي نذكر:

- $\mathbb{R}^n$ مع جداء لي $[.,.] = 0$.
- فضاء المتجهات على منطوٍ M و رمزه (Vec(M)) مع جداء لي:

$$[X, Y] = XY - YX$$

حيث X, Y هي حقول متجهة.

تعريف 2.2: زمرة لي(Lie Group): [11]

زمرة لي عبارة عن منطوٍ أملس G مُزوّد بالتطبيقَين الأملسَين الآتيين:

$$F: G \to G$$
$$x \mapsto x^{-1}$$

و

$$U: G \times G \to G$$
$$(x, y) \mapsto xy$$

ويحقق هذا المنطوي لأجل كل $x, y, z \in G$ الخواص الآتية:

.i $x(yz) = (xy)z$

.ii $\exists e \in G: ex = xe = x$

.iii $xx^{-1} = x^{-1}x = e$

تعريف 2.3: [11]

يقال عن الحقل المتجهي X إنه حقل متجهي لا متغير يساريا على زمرة لي G إذا تحققت العلاقة:

$$(dL_g)X(p) = X\left(L_g(p)\right)$$

حيث:

$$L_g: G \to G$$
$$h \mapsto gh$$

و d هو رمز للتفاضل.

تعريف 2.4: جبر لي الموافق لزمرة لي : [11]

ليكن T_1G فضاءً مماسياً عند عنصر الوحدة لزمرة لي G، يعرف جبر لي الموافق لزمرة لي G، و الذي نرمز له بالرمز Lie(G) من خلال جداء لي الأتي:

$$[v_1, v_2] = \left[X_{v_1}, X_{v_2}\right]_1$$

حيث: $X_v(g) = \left(dL_g\right)_1(v)$

تعريف 2.5: جبر كارنوت Carnot algebra: [8]

ليكن $\mathfrak{g}$ جبر لي، عندئذ ندعو $\mathfrak{g}$ بأنه جبر كارنوت إذا أمكن كتابة $\mathfrak{g}$ كمجموع مباشر أي:

$$g = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_s$$

حيث $[V_1, V_j] = V_{j+1} \;\; ; j = 1, \dots, s-1$ و $[V_1, V_s] = 0$.

تعريف 2.6: زمرة كارنوت Carnot group: [8]

هي زمرة لي المترابطة ببساطة G (Simply connected Lie group) بحيث إن جبر لي الموافق لهذه الزمرة و المولد بالحقول المتجهة المماسية اللامتغيرة يسارياً في عنصر الوحدة $LIVF(G)$ هو جبر كارنوت.

تعريف 2.7: جبر هايزنبرغ (Heisenberg Algebra): [11]

ليكن الفضاء المتجهي $\mathbb{R}^{2n+1}$ و ليكن تمثيل كل عنصر من هذا الفضاء بالشكل:

$$(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, t) := (x, y, t)$$

عندئذٍ نجد أنّ $\mathbb{R}^{2n+1}$ هو جبر لي بالنسبة لجداء لي المعرّف على النحو الآتي:

$$[(x, y, t), (u, v, s)] = (0, 0, xv - yu)$$

حيث $t, s \in \mathbb{R} \;\;,\;\; u, v, x, y \in \mathbb{R}^n$

يُدعى هذا الجبر بجبر هايزنبرغ، ويُرمز له بالرمز $\mathfrak{h}_n$.

تعريف 2.8: تمثيل جبر هايزنبرغ: [11]

بأخذ التطبيق $M: \mathfrak{h}_n \to M_{n+2}(\mathbb{R})$ المُعطى بالصيغة:

$$M(x,y,t) = \begin{pmatrix} 0 & y_1 \cdots y_n & t \\ 0 & 0 \cdots 0 & x_1 \\ \vdots & \vdots \ddots \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots 0 & x_n \\ 0 & 0 \cdots 0 & 0 \end{pmatrix}$$

نجد أنّ هذا التطبيق يأخذ عنصراً من جبر هايزنبرغ المُعطى بالصيغة:

$(x,y,t) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, t)$

ويعطي مصفوفة من القياس $(n+2)^2$.

يتم الحصول على زمرة هايزنبرغ بأخذ الأس لجبر هايزنبرغ $\mathfrak{h}_n$ ، ونرمز لهذه الزمرة بالرمز $\mathbb{H}^n$.

تعريف 2.9: زمرة هايزنبرغ الأولى $(n=1)$: [11]

إن جبر هايزنبرغ الموافق عندما $n = 1$ هو:

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; x,y,z \in \mathbb{R} \right\}$$

بأخذ الأس لهذا الجبر $\exp: \mathfrak{h} \to \mathbb{H}$ نحصل على:

$$exp\begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{xy}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & z + \frac{1}{2}xy \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

و هي عناصر الزمرة $\mathbb{H}$ ، وبالتالي يمكننا أن نكتب:

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

لإيجاد قانون التشكيل لهذه الزمرة نحسب:

$$exp\begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . exp\begin{pmatrix} 0 & \acute{x} & \acute{z} \\ 0 & 0 & \acute{y} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x + \acute{x} & z + \acute{z} + x\acute{y} + \frac{1}{2}(xy + \acute{x}\acute{y}) \\ 0 & 1 & y + \acute{y} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= exp\begin{pmatrix} 0 & x + \acute{x} & z + \acute{z} + \frac{1}{2}(x\acute{y} - \acute{x}y) \\ 0 & 0 & y + \acute{y} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

وبالتالي فإن قانون تشكيل الزمرة $\mathbb{H}$ هو:

$$(x,y,z).(\acute{x},\acute{y},\acute{z}) = \left(x + \acute{x}, y + \acute{y}, z + \acute{z} + \frac{1}{2}(x\acute{y} - \acute{x}y) \right) \quad (1.5)$$

ويكون:

$$\mathbb{H} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z).(\acute{x},\acute{y},\acute{z}) = \left(x + \acute{x}, y + \acute{y}, z + \acute{z} + \frac{1}{2}(x\acute{y} - \acute{x}y) \right) \right\} \quad (1.6)$$

تعريف 2.10: الحقول المُتجهة المولِّدة لجبر هايزنبرغ $\mathfrak{h}$: [11]

إن جبر هايزنبرغ $\mathfrak{h}$ يُوَلَّد بثلاثة حقول متجهة X, Y, Z لا متغيرة يسارياً تشكل قاعدة لهذا الجبر، و تُعطى بالشكل:

$$\begin{aligned} X &= \partial_x - \frac{y}{2}\,\partial_z \\ Y &= \partial_y + \frac{x}{2}\,\partial_z \\ Z &= \partial_z \end{aligned} \qquad (1.7)$$

و تكون علاقة التبادل الوحيدة غير التافهة هي:

$$[X, Y] = Z$$

حيث:

$$[X, Y] = XY - YX = \frac{1}{2}\,\partial_z + \frac{1}{2}\,\partial_z = \partial_z = Z$$

بينما:

$$[X, Z] = [Y, Z] = 0$$

تعريف 2.11: مؤثر الانسحاب اليساري: [11]

هو التطبيق:

$$L_g(p) : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$$
$$L_g(p) = g.p$$

حيث $g \in \mathbb{H}$.

تعريف 2.12: الحقل المتجهي اللامتغير يسارياً: [10]

يُدعى الحقل المُتجهي $X : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ بأنه لا متغير يسارياً (left invariant) إذا حقق لأجل كل $p, g \in \mathbb{H}$ العلاقة:

$$\left(dL_g\right) X(p) = X\left(L_g(p)\right) \qquad (1.8)$$

حيث L_g هو مؤثر الانسحاب اليساري.

مبرهنة2.1:

الحقل المُتجهي $X : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ لا متغير يسارياً (left invariant) أي أنه لأجل كل $p, g \in \mathbb{H}$ تتحقق العلاقة:

$$\left(dL_g\right) X(p) = X\left(L_g(p)\right) \qquad (1.9)$$

حيث التطبيق $L_g(p) : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ يُعطى بالشكل: $L_g(p) = g.p$ و هو مؤثر الانسحاب اليساري.

الإثبات:

لأجل $g = (s, t, u), p = (x, y, z) \in \mathbb{H}$ لنثبت أن:

$$\left(d\, L_{(s,t,u)}(x, y, z)\right) X(x, y, z) = X\big((s, t, u).(x, y, z)\big) \qquad (1.10)$$

حيث

$$L_{(s,t,u)}(x, y, z) = (s, t, u).(x, y, z) = \left(s + x, t + y, u + z + \frac{1}{2}(sy - tx)\right)$$

و مشتقه هو:

$$d\,L_g(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}t & \frac{1}{2}s & 1 \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

لنبين أن الحقل المتجهي X المُوَلِد لجبر هايزنبرغ لا متغير يسارياً، يكفي أن نثبت تحقق العلاقة (1.5).

لنضع:

$$f(x,y,z) := L_{(s,t,u)}(x,y,z) = \left(s+x, t+y, u+z+\frac{1}{2}(sy-tx)\right)$$

$$\Rightarrow\ df(x,y,z)\,X(x,y,z) = \left(1,0,-\frac{t}{2}-\frac{y}{2}\right)$$

$$= \partial_x + \left(-\frac{t}{2}-\frac{y}{2}\right)\partial_z$$

و لنحسب:

$$X\left(d\,L_{(s,t,u)}(x,y,z)\right) = X\big(df(x,y,z)\big)$$

$$= \left(1,0,-\frac{t+y}{2}\right)$$

¤

و كذلك يكون:

$$df\,Y(x,y,z) = \left(0,1,-\frac{s+x}{2}\right) = Y\big(\,df(x,y,z)\big)$$

تعريف 2.13: زمرة هايزنبرغ $\mathbb{H}^n$: $[\mathbf{11}]$

بشكل عام يكون:

$$\mathbb{H}^n = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{2n+1} : (x,y,z).(\acute{x},\acute{y},\acute{z}) = \left(x+\acute{x}, y+\acute{y}, z+\acute{z}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i\acute{y}_i - \acute{x}_i y_i\right)\right\}$$

وتكون الحقول المُتجهة اللامتغيرة يسارياً و الموَلِدة لجبر هايزنبرغ $\mathfrak{h}_n$ بالشكل:

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{1}{2}\, y_j \frac{\partial}{\partial_z}\ ; j = 1, \dots, n$$

$$Y_j = \frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{1}{2}\, x_j \frac{\partial}{\partial_z}\ ; j = 1, \dots, n$$

$$Z = \frac{\partial}{\partial_z}$$

تعريف 2.13: التمدّد غير الإيزوتروبي على زمرة هايزنبرغ (Non_isotropic dilation): $[2]$

يُعرَّف التمدّد غير الإيزوتروبي على زمرة هايزنبرغ بالشكل:

$$\delta_\lambda : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$$
$$(x,y,z) \mapsto (\lambda x, \lambda y, \lambda^2 z) \quad ; \lambda > 0$$

مبرهنة2.2: $[\mathbf{10}]$

لتكن $\lambda > 0$ و $p, q \in \mathbb{H}$ ،عندئذٍ فإن العلاقات الآتية محققة:

1. $\delta_\lambda(p.q) = \delta_\lambda(p).\delta_\lambda(q)$
2. $(\delta_\lambda)^{-1} = \delta_{\frac{1}{\lambda}}$
3. $\delta_\lambda \circ \delta_\mu = \delta_{\lambda\mu}$

الإثبات:

بفرض $p = (p_1, p_2, p_3)$ و $q = (q_1, q_2, q_3)$ عندئذٍ:

أولاً:

$$\delta_\lambda(p.q) = \delta_\lambda\left(p_1+q_1, p_2+q_2, p_3+q_3+\frac{1}{2}(p_1q_2-q_1p_2)\right)$$
$$= \left(\lambda(p_1+q_1), \lambda(p_2+q_2), \lambda^2\left(p_3+q_3+\frac{1}{2}(p_1q_2-q_1p_2)\right)\right)$$
$$= (\lambda p_1, \lambda p_2, \lambda^2 p_3).(\lambda q_1, \lambda q_2, \lambda^2 q_3) = \delta_\lambda(p).\delta_\lambda(q)$$

ثانياً:

لنثبت أن: $\delta_\lambda.\delta_{\frac{1}{\lambda}} = I$

$$\left(\delta_\lambda.\delta_{\frac{1}{\lambda}}\right)(p) = \delta_\lambda\left(\delta_{\frac{1}{\lambda}}(p)\right) = \delta_\lambda\left(\frac{1}{\lambda}p_1, \frac{1}{\lambda}p_2, \frac{1}{\lambda^2}p_3\right) = (p_1, p_2, p_3)$$

و بالتالي فإن: $\left(\delta_\lambda.\delta_{\frac{1}{\lambda}}\right)(p) = I(p)$

ثالثاً:

$$(\delta_\lambda \circ \delta_\mu)(p) = \delta_\lambda\left(\delta_\mu(p)\right) = (\lambda\mu p_1, \lambda\mu p_2, (\lambda\mu)^2 p_3) = (\delta_{\lambda\mu})(p)$$

¤

تعريف 2.15: مؤثر لابلاس هايزنبرغ (The Heisenberg Laplacian): [2]

إن مؤثر لابلاس هايزنبرغ مشابه لمؤثر لابلاس في الحالة الإقليدية ويُعرّف على زمرة هايزنبرغ $\mathbb{H}$ بالشكل:

$$-\Delta_{\mathbb{H}} := -X^2 - Y^2 \qquad (1.12)$$

و على زمرة هايزنبرغ بشكل عام:

$$-\Delta_{\mathbb{H}^n} := -\sum_{i=1}^{n}\left({X_i}^2 + {Y_i}^2\right)$$

وهو مؤثر لا متغير تحت الانسحابات، و متجانس من الدرجة 2، و يُدعى أيضاً مؤثر Kohn_ Laplacian.

تعريف 2.16: فضاءات سوبوليف على زمرة هايزنبرغ: [5]

تُعرّف فضاءات سوبوليف (Sobolev spaces) على زمرة هايزنبرغ (في هذا السياق تُعرف أيضاً بفضاءات Folland_Stein) على النحو الآتي:

نرمز بـ $W^{1,2}(\Omega)$ (أو $H^1(\Omega)$) للفضاء المُكوّن من الدوال $u \in L_2(\Omega)$ بحيث إن مشتقاتها الجزئية Yu و Xu تنتمي إلى $L_2(\Omega)$، و يكون هذا الفضاء مُزوّد بالنظيم:

$$\|u\|_{W^{1,2}} = (\|Xu\|^2 + \|Yu\|^2 + \|u\|^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (1.13)$$

و يُعرف الفضاء $W_0^{1,2}(\Omega)$ على أنه غلاقة (لصاقة) $C_0^\infty(\Omega)$ في $W^{1,2}(\Omega)$.

مبرهنة 2.3: مبرهنة هورماندر (Hörmander theorem):[6]

ليكن P مؤثراً تفاضليّاً معطى بالصيغة: $P = \sum_{j=1}^{r} X_j^2 + X_0 + c$

حيث $X_0, \dots, X_r$ هي مؤثرات تفاضلية متجانسة من المرتبة الأولى في المجموعة المفتوحة $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ والمعاملات c تنتمي إلى $C^\infty(\Omega)$، ولنفرض أنّه من بين المؤثرات:

$$X_{j_1}, [X_{j_1}, X_{j_2}], \left[X_{j_1}, [X_{j_2}, X_{j_3}]\right], \dots, \left[X_{j_1}, \left[X_{j_2}, [X_{j_3}, \dots, X_{j_k}]\right]\right] \quad ; j_i = 0,1, \dots, r$$

يوجد n منها مستقلة خطياً في أي نقطة من Ω، عندئذٍ فإنّ P فوق ناقصي، و حيث $\left[X_{j_1}, X_{j_2}\right]$ هو جداء لي لجبر لي المولد بهذه الحقول المتجهة.

نتيجة 2.1:

حسب مبرهنة هورماندر نجد أن $\Delta_{\mathbb{H}}-$ هو مؤثر تفاضلي فوق ناقصي من المرتبة الثانية، و ذلك لأن الحقول المُتجهة $X, Y, [X, Y]$ تشكل قاعدة في أي نقطة في $\mathbb{H}$، و هذا ما يختلف عن حالة مؤثر لابلاس ديريخليه في الحالة الإقليدية.

مبرهنة 2.4: [9], [4]

لأجل أي $x \in \mathbb{H}$ يوجد جوار $K \subset \mathbb{H}$ لـ x ، و ثابت $c_K > 0$ بحيث تتحقق لأجل كل $u \in C_0^\infty(K)$ العلاقة:

$$\|u\|_{\frac{1}{2}}^2 \leq c_K \int_K (|Xu(x)|^2 + |Yu(x)|^2 + |u(x)|^2)\, dx \qquad (1.14)$$

حيث يرمز النظيم في الطرف الأيسر إلى نظيم سوبوليف من المرتبة $\frac{1}{2}$.

نتيجة 2.2:

من المبرهنة الأخيرة نجد أن مؤثر لابلاس هايزنبرغ هو مؤثر تحت ناقصي أيضاً و ذلك واضح حسب تعريف المؤثر تحت الناقصي.

التوصيات:

يمكن الوصول إلى العديد من المتباينات الشهيرة المعروفة على مؤثر لابلاس العادي باستخدام مؤثر لابلاس هايزنبرغ.

المراجع

1. Celebi, R., Hendricks, K. and Jordan, M.: *The Heisenberg group and uncertainty principle in Mathematical physics. Research program under the supervision of Dr.* Hadi Salamasian, university of Ottawa, (2015).

2. Egwe, M. E. (2012). On Some Properties of the Heisenberg Laplacian. *Advances in Pure Mathematics*, *2*(5), 354-357.

3. Fischer, V. and Ruzhansky, M.*: Quantization on nilpotent Lie groups*. Progress in Mathematics, (2015).

4. Folland, G. B. (1973). A fundamental solution for a sub_elliptic operator. *Bulletin of the American Mathematical Society*, *79*(2), 373-376.

5. Frank, R. L., & Laptev, A. (2010). Inequalities between Dirichlet and Neumann eigenvalues on the Heisenberg group. *International mathematics research notices*, *2010*(15), 2889-2902.

6. Hörmander, L. (1967). Hypoelliptic second order differential equations. *Acta Mathematica*, *119*, 147-171.

7. Kovařík, H., & Weidl, T. (2015). Improved Berezin—Li—Yau inequalities with magnetic field. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, *145*(1), 145-160.

8. Le Donne, E. (2015). A metric characterization of Carnot groups. *Proceedings of the American Mathematical Society*, *143*(2), 845-849.

9. Nezza, E., Palatucci, G., & Valdinoci, E. (2012). Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces. *Bulletin des sciences mathématiques*, *136*(5), 521-573.

10. Ruszkowski, B. (2017*). Spectral and Hardy inequalities for the Heisenberg Laplacian.* Faculty of Mathematics and Physics, University of Stuttgart.

11. Thangavelu, S.: Harmonic analysis on the Heisenberg group. *Progress in Mathematics 159,* Birkhäuser, Boston, MA, (1998).