مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٨) العدد (٣) ٢٠٢٤

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (8) No. (3) 2024

نظامية الجاذب لمعادلة شرودنغر غير الخطية المتخامدة

د.منال حسين*

علا باسط**

(تاريخ الإيداع ٢٢/٥/ ٢٠٢٤ – تاريخ النشر ٤/٨/ ٢٠٢٤)

□ ملخّص □

نقدم في هذا العمل معادلة شرودنغر التكعيبية غير الخطية و المتخامدة بضعف في فضاء أحادي البعد مع وجود تابع كموني محدود وله دعامة متراصة في $]-1,1[$. سنبرهن نظامية الجاذب الشامل لهذه المعادلة. أي سنبرهن أن الجاذب محدود ومتراص في $H^2(\mathbb{R})$.

الكلمات المفتاحية: معادلة شرودنغر غير الخطية، النظام الديناميكي، الجاذب الشامل.

* مدرس– قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة طرطوس.

** حاصلة على درجة الماجستير–قسم الرياضيات –كلية العلوم– جامعة طرطوس.

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٨) العدد (٣) ٢٠٢٤

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (8) No. (3) 2024

Numerical Study of Schrödinger Partial Differential Equation by Finite Difference Method

Dr. Manal Hussein*
Ola Basset **

(Received 22/5/2024.Accepted 4/8/2024)

□ABSTRACT □

In this work, We consider the weakly damped nonlinear cubic Schrödinger equation in one dimension space with a bounded potential function having compact support in $]-1,1[$..We prove the attractor regularity for this equation. That is, we will prove that the attractor is bounded and compact in $H^2(\mathbb{R})$.

Keywords: nonlinear Schrödinger equation, dynamical system, global attractor.

* Assistant Professor, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Tartous University.
** has a master's degree, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Tartous University.

مقدّمة:

تعدّ المعادلات التفاضلية الجزئية نماذج رياضية، تفسر الظواهر الفيزيائية المعقدة، التي تأتي من مسائل هندسية، كيمائية، فيزيائية، بيولوجية وميكانيكية ...، وتبرز هنا معادلة شرودنغر غير الخطية التي يرمز لها اختصاراً بـ NLS كأحد أهم هذه المعادلات إذ حيث تحتل هذه المعادلة أهمية خاصة في ميكانيك الكم حيث تُعد بمثابة قانون التحريك الثاني لنيوتن الذي يعتبر أساسياً في الفيزياء الكلاسيكية. وهي نموذج مقارب لانتشار الأمواج المائية [7,9,10] وظهرت في مجالات مختلفة في الفيزياء نذكر منها: فيزياء البلازما [24]، الحقل المغناطيسي [19,20]وتكاثف بوز آنشتاين [6] وغيرها.

ظهرت معادلة شرودنغر على يد العالم إرفين شرودنغر عام 1925 ونشرها عام 1926، وتعطى هذه المعادلة غير الخطية في الحالة المحافظة بالشكل:

$$u_t + iu_{xx} + iV(x)\,u + i|u|^2u = 0 \tag{1}$$

حيث $u = u(x,t)$ حيث t الزمن و$V(x)$ تابع كموني من $L^{\infty}(\mathbb{R})$ وله دعامة متراصة في $]-1,1[$.

أما في حالة التخامد تكون من الشكل:

$$u_t + iu_{xx} + iV(x)\,u + \alpha u + i|u|^2u = f(x) \tag{2}$$

حيث $f(x)$ قوة خارجية مستقلة عن t وتنتمي إلى $L^2(\mathbb{R})$ و$\alpha > 0$ معامل التخامد.

حازت هذه المعادلة على اهتمام العديد من الباحثين، إذ أثبت Ghidaglia في العام 1988 وجود جاذب شامل لهذه المعادلة بالنسبة للتبولوجيا الضعيفة في $H^1(\mathbb{R})$في [11]. ثم في العام ١٩٩٥ أثبت Wang أن هذا الجاذب الضعيف هو جاذب قوي في البحث [23]، وفي [12] أثبت Goubet عام ١٩٩٦ نظامية هذا الجاذب ولكن مع شروط حدية دورية، وأيضاً في عام ١٩٩٨ أثبت نظامية هذا الجاذب في $\mathbb{R}^2$ ، وفي البحث [3] أثبتت Akroune عام 1999 وجود جاذب شامل في $H^1(\mathbb{R})$، وفي العام 2009 أثبت Hussein وGoubet أن النظام Davey–Stewartson الذي هو تعميم لمعادلة شرودنغر يملك جاذب شامل في $H^1(\mathbb{R}^2)$ وكما أثبتوا نظاميته في $H^1(\mathbb{R}^2)$ في البحث[14]، وأيضاً في عام 2009 درسوا معادلة شرودنغر المقطعة بالنسبة للزمن باستخدام صيغة الاسترخاء (relaxation scheme) وبرهنوا وجود جاذب شامل للنظام الديناميكي الناتج في [13] وأيضاً في العام نفسه أثبت Molinet و Goubet في [15] أن تدفق معادلة شرودنغر غير الخطية المتخامدة بضعف يوفر نظام ديناميكي يملك جاذب شامل في $L^2(\mathbb{R})$، وفي عام 2014 درس Alounini وGoubet سلوك حلول معادلة شرودنغر غير المتخامدة مع حد كموني تربيعي في [4]، وفي عام 2016 أثبت Zhu في [25] وجود جاذب شامل لمعادلة شرودنغر مع وجود حد تكاملي غير محلي في$H^1(\mathbb{R})$ وفي العام نفسه درس Dabaa وGoubet في [8] سلوك حلول معادلة شرودنغر– بواسون في $\mathbb{R}^3$ وبرهن Kechiche في عام 2017 أن الجاذب الشامل هو مجموعة جزئية متراصة من $H^{\frac{3}{2}-\varepsilon}(-1,1)$ في [17]، وبرهن أيضاً في عام 2021 وجود جاذب شامل لمعادلة شرودنغر مع قياس ديراك في [18]، وفي العام نفسه برهن كل من Zahrouni وGoubet وجود الجاذب الشامل في $H^1(\mathbb{R}^N)$ في [16]. وفي عام ٢٠٢٢ درس كل من انجرو و Hussein و Basset سلوك حلول معادلة شرودنجر في $H^1(\mathbb{R})$ في [1]. وفي عام ٢٠٢٣ درست Hussein النظام الديناميكي المتخامد لمعادلة شرودنغر غير الناقصية في [2].

أهمّية البحث وأهدافه:

تأتي أهمية هذا البحث كوننا نتناول معادلة مهمة لها تطبيقات واسعة في مجالات مختلفة في الفيزياء بالإضافة لكونها غير خطية ومتخامدة. ويهدف هذا البحث إلى دراسة نظامية الجاذب الشامل الذي يعطي تنبؤ بسلوك النظام الديناميكي الذي تزوده معادلة شرودنغر غير الخطية.

طرائق البحث وموادّه:

يندرج هذا البحث تحت اختصاص الرياضيات التطبيقية وبشكل خاص في مجال المعادلات التفاضلية لذلك فإن التقنيات الرياضية المستخدمة هنا تعتمد بشكل أساسي على دراسة نظامية سلوك حلول المعادلة التفاضلية الجزئية من خلال مفاهيم التحليل الدالي.

النتائج والمناقشة:

مسألة مساعدة: ليكن u حل المعادلة (2) يكتب بالشكل $u(x)=\frac{1}{2\pi}\int \hat{u}_{\mathbb{R}}(\xi)e^{ix\xi}d\xi,$ حيث $\hat{u}$ تحويل فورييه لـِ $u.$

نعرف من أجل $|\xi|\le N$ $\quad y(x)=\frac{1}{2\pi}\int \hat{u}_{|\xi|\le N}(\xi)e^{ix\xi}d\xi\,,$

ونعرف من أجل $|\xi|\ge N$ $\quad z(x)=\frac{1}{2\pi}\int \hat{u}_{|\xi|\ge N}(\xi)e^{ix\xi}d\xi,$

ويكون التابع z حل للمعادلة الاتية:

$$z_t+\alpha z+iz_{xx}+iQ(V(x)(y+z))+iQ(|y+z|^2(y+z)=Qf, \qquad (3)$$

مع الشرط الابتدائي $z(0)=Qu_0=z_0$ حيث Q المسقط العمودي على $QH^1=\{z=\frac{1}{2\pi}\int \hat{u}_{|\xi|\ge N}(\xi)e^{ix\xi}d\xi \;\; ,z\in H^1(\mathbb{R})\}$ حيث $H^1(\mathbb{R})$ فضاء هلبرت

موضوعة ١: من أجل k من Z^* ومن أجل t موجبة، يكون التابع y محدود في كرة من $H^k(\mathbb{R})$.

برهان:

$$2\pi|y|_{H^k}^2=\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|^2)^k|\hat{y}(\xi)|^2d\xi=\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|^2)^k|\hat{u}(\xi)|^2\chi(|\xi|\le N)d\xi$$
$$\le(1+N^2)^{k-1}\int_{\mathbb{R}}|(1+|\xi|^2)\hat{u}(\xi)|^2\,d\xi\le 2\pi M_1^2(1+N^2)^{k-1}$$

حيث M_1 نصف قطر الكرة الماصة لـ u في $H^1(\mathbb{R})$. إذاً y محدود في كرة من $H^k(\mathbb{R})$ نصف قطرها $O(N^{k-1})$.

بما أن $H^k\subset C^\infty$ $\cap$ y و من C^∞ بالنسبة لـ x فإن نظامية u تعتمد على z. ليكن z تابع معرف من أجل $t\ge 0$ حل المعادلة (3) على $QH^1(\mathbb{R})$ مع الشرط الابتدائي $z(0)=Qu(0)$. من أجل N ثابتة ومن أجل المسارات u ومن أجل $y=Pu$ نعرف التابع Z بحيث يكون $Z:[0,\infty[\to QH^1$ ويحقق المعادلة الآتية:

$$\begin{cases} Z_t+iZ_{xx}+\alpha Z+iQ\big(V(x)(y+Z)\big)+iQ\big(|y+Z|^2(y+Z)\big)=Qf, \\ Z(0)=0 \end{cases} \qquad (4)$$

لنأخذ أولاً التمهيدية التالية التي تفيدنا في البرهان لاحقاً

تمهيدية ١: [22] ، من أجل Z من $QH^1(\mathbb{R})$ يحقق

$$|Z|_{L^2} \le \frac{1}{N}|Z|_{H^1}, \tag{5}$$
$$|Z|_{L^\infty} \le \frac{c}{\sqrt{N}}|Z|_{H^1}, \tag{6}$$
$$|Z|_{L^4} \le \frac{c}{N^{\frac{3}{4}}}|Z|_{H^1}, \tag{7}$$

موضوعة ٢: من أجل N كبيرة بما يكفي يوجد Z حل وحيد مستمر ومحدود في $QH^2(\mathbb{R})$ للمعادلة (4) ويوجد K غير متعلق بـ N بحيث يكون $|Z|_{H^1} + \frac{1}{N}|Z|_{H^1} \le K.$ (8)

برهان: سيتم البرهان على ثلاث خطوات

الخطوة الأولى: الحل محلي وقيمه في $H^2(\mathbb{R})$

ليكن $X = C_b([0,T], QH^2)$ مع النظيم $|Z|_X = \sup_{t\in[0,T]} |Z|_{QH^2} = \sup_{t\in[0,T]} |Z|_{H^2}$.

بما أن $Z \in QH^2(\mathbb{R})$ يكافئ $QZ = Z$ ، تكتب المعادلة (4) بالشكل

$$Z_t + (i\Delta + \alpha)Z = -iQ\big(V(x)(y+Z)\big) - iQ\big(|y+Z|^2(y+Z)\big) + Qf. \tag{9}$$

تكتب بالشكل التكاملي

$$Z(t) = \int_0^t e^{-i(t-s)A}F\big(Z(s)\big)ds = \int_0^t T(t-s)F\big(Z(s)\big)ds. \tag{10}$$

حيث $T(t)$ مؤثر ضاغط على $QH^2(\mathbb{R})$ يعرف $T(t) = e^{-itA}$ و $A = \Delta - i\alpha$ و $F(Z) = Qf - iQ(V(x)(y+Z) - iQ(|y+Z|^2(y+Z)$.

ليكن G تطبيق من X إلى X نعرف من أجل $G\big(Z(t)\big) = \int_0^t T(t-s)F\big(Z(s)\big)ds, t \in [0,T]$

تمهيدية ٢: من أجل t موجب، يكون $T(t)$ مؤثر ضاغط على $QH^2(\mathbb{R})$.

برهان:

$$|T(t)|_{QH^2} = |T(t)|_{H^2} = |e^{-iAt|}|_{H^2} = \left|e^{-i(\Delta - i\alpha)t}\right|_{H^2} = e^{-\alpha t}\left|e^{i\Delta t}\right|_{H^2}.$$

نفرض $U(t) = e^{i\Delta t}$ ولكن $|U(t)|_{H^2} = 1,$ أي يصبح لدينا $|T(t)|_{H^2} = e^{-\alpha t}|e^{i\Delta t}|_{H^2} \le 1.$

تمهيدية 3: التابع $Z \to Q(|y+Z|^2(y+Z))$ يحقق شرط ليبشتز على المجموعات المحدودة في $QH^2(\mathbb{R})$.

برهان: ليكن $Z, W \in QH^2(\mathbb{R})$ بحيث يكون $|Z|_{QH^2} \le C_0$ و $|W|_{QH^2} \le C_0$

$$\begin{aligned}|Q(|y+Z|^2(y+Z) - |y+W|^2(y+W))|_{H^2} &\le c(2|y|_{H^2}^2 + |Z|_{H^2}^2 + |W|_{H^2}^2)|Z-W|_{H^2} \\ &\le 2c((1+N^2)M_1^2 + C_0^2)|Z-W|_{QH^2}.\end{aligned}$$

تمهيدية ٤: التطبيق G معرف جيداً من X إلى X من أجل T صغيرة بما يكفي.

برهان: ليكن $3c_\alpha|Qf|_{L^2}^2 \le C_0$ حيث c_α ثابت متعلق بـ α وليكن $Z \in B(0, C_0) \subset X$ حيث $B(0, C_0)$ كرة مغلقة نصف قطرها C_0 في X.

$$\begin{aligned}G\big(Z(t)\big) = &\int_0^t T(t-s)Qf ds - i\int_0^t T(t-s)Q(|y+Z|^2(y+Z))ds \\ &- i\int_0^t T(t-s)Q\big(V(x)(y+Z)\big)ds.\end{aligned}$$

لنوجد نظيم G في $H^2(\mathbb{R})$. نكتب الحد $\int_0^t T(t-s)\ f(x)\ ds$ بالشكل

$$\int_0^t T(t-s)Qfds == \int_0^t [e^{-i(t-s)A}ds]Qf = -iA^{-1}\left(Id - e^{-itA}\right)Qf,$$

$A = \Delta - i\alpha$ مؤثر مستمر وقابل للعكس من $H^2(\mathbb{R})$ إلى $L^2(\mathbb{R})$ بحيث إنه من أجل $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$|A^{-1}Qf|_{H^2} \leq c_\alpha\, |Qf|_{L^2} \text{ و}$$

فإن $|\int_0^t T(t-s)Qfds|_{H^1} \leq |A^{-1}Qf|_{H^1} + |e^{-itA}\, A^{-1}Qf|_{H^1} \leq \mathrm{c}|A^{-1}f|_{H^2} \leq \frac{C_0}{3}$

أما بالنسبة للحد $\int_0^t T(t-s)Q(|y+Z|^2(y+Z))ds,$ فإنه بالاستفادة من الموضوعة 1 ومن كون T مؤثر ضاغط يكون لدينا

$$|\int_0^t T(t-s)Q(|y+Z|^2(y+Z))ds|_{H^2} \leq \int_0^t ||y+Z|^2(y+Z)ds|_{H^2}$$

$$\leq c\int_0^t (|y|_{H^2}^3 + |Z|_{H^2}^3)ds \ \leq ((M_1N)^3 + C_0^3)T$$

نختار T بحيث يكون $((M_1N)^3 + C_0^3)T \leq \frac{C_0}{3},$

وبالنسبة للحد $\int_0^t T(t-s)Q\big(V(x)(y+Z)\big)ds,$ ، فإنه بالاستفادة من كون $V(x)$ تابع من $L^\infty(\mathbb{R})$، يكون لدينا

$$|\int_0^t T(t-s)Q\big(V(x)(y+Z)\big)ds|_{H^2} \leq \int_0^t (|V(x)|_{L^\infty}|y+Z|_{H^2})ds$$

$$\leq \int_0^t C_1(|y|_{H^2} + |Z\,|_{H^2})ds \leq C_1(C_0 + M_1N)T$$

نختار T بحيث يكون $C_1(C_0 + M_1N)T \leq \frac{C_0}{3},$

فإنه أصبح لدينا $|G\big(Z(t)\big)|_X = \sup_{t\in[0,T]} |G\big(Z(t)\big)|_{QH^2} \leq C_0$ ، فإن G تطبيق من X إلى X.

تمهيدية ٥: من أجل T صغيرة بما يكفي كما عرفت سابقاً، يكون G مقلص على المجموعات المحدودة في X.

برهان: ليكن $Z, W \in B(0, C_0) \subset X$ بحيث يكون $|Z|_{QH^2} \leq C_0$ و $|W|_{QH^2} \leq C_0$ وبما أن $H^2(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$، فإنه بالاستفادة من التمهيدية ٢

$$|G(Z) - G(W)|_{QH^2} \leq \int_0^t |F\big(Z(s)\big) - F\big(W(s)\big)|_{QH^2}ds$$

بالاستفادة من التمهيدية ١ ومن كون $V(x)$ تابع من $L^\infty(\mathbb{R})$، يصبح لدينا

$$|F(Z) - F(W)|_{QH^2} \leq C_1|Z-W|_{QH^2} + 2c((1+N^2)M_1 + C_0^2)|Z-W|_{QH^2}$$

$$\leq \Big(C_1 + 2c\big((1+N^2)M_1^2 + C_0^2\big)\Big)\,|Z-W|_{QH^2},$$

فيصبح لدينا $|G(Z) - G(W)|_{QH^2} \leq \Big(C_1 + 2c\big((1+N^2)M_1^2 + C_0^2\big)\Big)T|Z - W|_{QH^2},$

نختار T بحيث يكون $(C_1 + 2c((1+N^2)M_1^2 + C_0^2))T \leq \frac{1}{2} < 1.$ فيكون G يحقق شرط ليبشتز على X بثابت أصغر من الواحد، أي أن G مقلص على المجموعات المحدودة في X وبحسب مبرهنة

النقطة الثابتة يوجد Z بحيث $G(Z) = Z$ حيث Z حل وحيد للمعادلة (4) على $[0, T]$. وبذلك، تم إنجاز الخطوة الأولى.

الخطوة الثانية: لا انفجار في $H^1(\mathbb{R})$ بالنسبة لـ Z لإنجاز هذه الخطوة نثبت الموضوعة التالية

موضوعة ٣: تملك المعادلة (4) حل وحيد Z بحيث أن $Z \in C_b([0, \infty[, QH^1)$ من أجل N كبيرة بما يكفي أي من أجل $N \geq N_0$ حيث N_0 متعلق بـ $|f|_{L^2}$.

بالإضافة إلى ذلك يوجد K مستقل عن N بحيث يكون $|Z|_{H^1} \leq K$ من أجل كل t موجب.

برهان: نفرض $Z \in C_b([0, T[, QH^1)$ حيث T الزمن الأعظمي لـ Z عندها

$$T = \infty \quad \text{أو} \quad T < \infty \text{ و } |Z(t)|_{H^1} \to \infty$$

نضرب المعادلة (٤) بـ $(-\bar{Z}_t - \alpha \bar{Z})$، ثم نكامل ونأخذ الجزء التخيلي، فنحصل على

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} q(Z) + \alpha\, q(Z) \leq W(Z), \tag{11}$$

حيث

$$q(Z) = |Z_x|_{L^2}^2 - C_1 \int |y + Z|^2 - \frac{1}{2}\int |y + Z|^4 + 2\,\mathrm{Im} \int f\bar{Z}\, dx$$

$$\begin{aligned} W(Z) = \frac{\alpha}{2}\int |y + Z|^4\, dx + \alpha\, Im \int f\bar{Z}\, dx - C_1\, Re \int (y + Z)\overline{y_t}\, dx \\ - C_1 \alpha Re \int (y + Z)\bar{y}\, dx - Re \int \overline{y_t}\, |y + Z|^2 (y + Z)\, \mathrm{dx} \\ - \alpha\, Re \int \bar{y}\, |y + Z|^2\, (y + Z) dx. \end{aligned} \tag{12}$$

تمهيدية ٦: من أجل Z في $QH^1(\mathbb{R})$ يوجد K متعلق بـ M_1 و f و α وإنه من أجل N كبيرة بما يكفي يكون

$$q(Z) \geq \frac{1}{2}|Z|_{H^1}^2 - \frac{c}{N^3}|Z|_{H^1}^4 - K.$$

برهان: بالاعتماد على التمهيدية ١ ومن كون $V(x)$ تابع من $L^\infty(\mathbb{R})$، يصبح لدينا

$$\begin{aligned} q(Z) &\geq |Z|_{L^2}^2 - C_1|y|_{L^2}^2 - C_1|Z|_{L^2}^2 - \frac{c}{2}|y|_{L^4}^4 - \frac{c}{2}|Z|_{L^4}^4 - \frac{1}{2\alpha}|f|_{L^2}^2 - 2\alpha|Z|_{L^2}^2 \\ &\geq |Z|_{H^1}^2 - C_1|y|_{L^2}^2 - \frac{C_1}{N^2}|Z|_{H^1}^2 - \frac{c}{2}|y|_{L^4}^4 - \frac{c}{N^3}|Z|_{H^1}^4 - \frac{1}{2\alpha}|f|_{L^2}^2 - \frac{2\alpha}{N^2}|Z|_{H^1}^2. \end{aligned}$$

بفرض $N \geq N_0$ بحيث يكون $\frac{1}{2} \leq \left(\frac{C_1}{{N_0}^2} + \frac{2\alpha}{{N_0}^2}\right) \leq \left(\frac{C_1}{N^2} + \frac{2\alpha}{N^2}\right)$ فإن

$$|Z|_{H^1}^2 - \left(C_1 + \frac{2\alpha}{N^2}\right)|Z|_{H^1}^2 \geq \frac{1}{2}|Z|_{H^1}^2.$$

بما أن $H^1 \subset L^4$ وأن u من المجموعة المحدودة الماصة

$$\begin{aligned} |y|_{L^4} &\leq c|y|_{H^1} \leq c|u|_{H^1} \leq cM_1, \\ |y|_{L^2} &\leq c|y|_{H^1} \leq c|u|_{H^1} \leq cM_1. \end{aligned} \tag{13}$$

أخيراً، بالاعتماد على (٧) نحصل على

$$q(Z) \geq \frac{1}{2}|Z|_{H^1}^2 - \frac{c}{N^3}|Z|_{H^1}^4 - K. \tag{14}$$

تمهيدية ٧: يوجد K_1 و K_2 متعلقان بـ α و $|f|_{L^2}$ ومستقلان عن $N \geq N_0$ بحيث يكون

$$\frac{d}{dt} q(Z) + \alpha q(Z) \leq K_1 + \frac{K_2}{N^{\frac{1}{2}}}|Z|_{H^1}^4$$

برهان: لدينا $W(Z)$ كما عرفناه في العلاقة (12)، سندرس كل حد من حدوده، بالنسبة للحد الأول

$$\frac{\alpha}{2}\int |y+Z|^4\,dx \le \frac{c\alpha}{2}\left(|y|_{L^4}^4+|Z|_{L^4}^4\right) \le \frac{c\alpha}{2}\left(c{M_1}^4+\frac{c}{N^3}|Z|_{H^1}^4\right) \le K+\frac{K}{N^{\frac{1}{2}}}|Z|_{H^1}^4,$$

وبالنسبة للحد الثاني في $W(Z)$ يكون لدينا

$$\alpha\,\mathrm{Im}\int f\bar{Z}\,dx \le \alpha\,|f|_{L^2}|Z|_{L^2} \le \frac{K}{N}|Z|_{H^1} \le K+\frac{K}{N^3}|Z|_{H^1}^4 \le K+\frac{K}{N^{\frac{1}{2}}}|Z|_{H^1}^4.$$

الآن بالنسبة للحد $C_1\,Re\int(y+Z)\overline{y_t}\,dx.$ لدينا u من المجموعة المحدودة الماصة من أجل t موجب يكون u_t محدودة في $H^{-1}(\mathbb{R})$ عند نفس الزمن t أي $|u_t|_{H^{-1}} \le M'$ ولدينا $y_t = Pu_t$. أي أصبح لدينا

$$|y_t|_{H^{-1}} \le |u_t|_{H^{-1}} \le M'$$

$$C_1\,Re\int(y+Z)\overline{y_t}\,dx \le c|y_t|_{H^{-1}}|y+Z|_{H^1} \le cM'(|y|_{H^1}+|Z|_{H^1}) \le K+\frac{K}{N^{\frac{1}{2}}}|Z|_{H^1}^4.$$

لدينا أيضاً بالنسبة للحد $Re\int \overline{y_t}\,|y+Z|^2(y+Z)\,dx,$ يصبح لدينا

$$Re\int \overline{y_t}\,|y+Z|^2(y+Z)dx \le |y_t|_{H^{-1}}\left||y+Z|^2(y+Z)\right|_{H^1} \le cM'\;|y+Z|_{L^\infty}^2|y+Z|_{H^1},$$

وبالاستفادة من (6) نجد

$$\begin{aligned}Re\int \overline{y_t}\,|y+Z|^2(y+Z)dx &\le c\,M'\,2\left(|y|_{L^\infty}^2+|Z|_{L^\infty}^2\right)(|y|_{H^1}+|Z|_{H^1})\\ &\le c\left(|y|_{H^1}^2+\frac{1}{N}|Z|_{H^1}^2\right)(|y|_{H^1}+|Z|_{H^1})\\ &\le \frac{c}{N}|Z|_{H^1}^3+\frac{cM_1}{N}|Z|_{H^1}^2+K_1 \le K+\frac{K}{N^{\frac{1}{2}}}|Z|_{H^1}^4.\end{aligned}$$

الآن بالنسبة للحد $C_1\,Re\int(y+Z)\bar{y}\,dx$ يكون لدينا

$$C_1\,Re\int(y+Z)\bar{y}\,dx \le c|y|_{L^\infty}|y+Z|_{H^1} \le c|y|_{L^\infty}(|y|_{H^1}+|Z|_{H^1}) \le K+\frac{K}{N^{\frac{1}{2}}}|Z|_{H^1}^4,,$$

وبالنسبة للحد الأخير في $W(Z)$، بالاستفادة من (7) يكون لدينا

$$\mathrm{Re}\left(\int \bar{y}\,|y+Z|^2(y+Z)\right)dx \le |y|_{L^4}\,|y+Z|_{L^4}^3 \le |y|_{L^4}\,(|y|_{L^4}^3+|Z|_{L^4}^3) \le K+\frac{K}{N^{\frac{1}{2}}}|Z|_{H^1}^4,$$

فإن العلاقة (11) تصبح بالشكل

$$\frac{d}{dt}q(Z)+\alpha q(Z) \le K_1+\frac{K_2}{N^{\frac{1}{2}}}|Z|_{H^1}^4.$$

بالاستفادة من التمهيديتين السابقتين نجد

$$q(Z(t)) \le q\big(Z(0)\big)e^{-\alpha t}+\frac{K_2}{N^{\frac{1}{2}}}\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\,|Z(s)|_{H^1}^4 ds+K_2,$$

ولكن من أجل $Z(0)=0$ و $y(0)$ محدود في H^1

$$|q(0)| = \left|\frac{1}{2}\int |y(0)|^4dx\right| \le \frac{1}{2}|y(0)|_{L^4}^4 \le K,$$

وبالاعتماد على (١٤) يكون لدينا $2q(Z)+K+c\frac{1}{N^3}|Z|_{H^1}^4 \ge |Z|_{H^1}^2,$

فإنه يكون لدينا $\sup_{[0,t]}|Z(s)|_{H^1}^2 \le \frac{K_1}{N^3}|Z(t)|_{H^1}^4+\frac{K_2}{N^{\frac{1}{2}}}\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\,|Z(s)|_{H^1}^4 ds+K_3$

وبوضع $w(t)=\sup_{[0,t]}|Z(s)|_{H^1}^2$ يصبح لدينا

$$w(t)\le \frac{K_1}{N^3}w(t)^2+\frac{K_2}{N^{\frac{1}{2}}}\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\,w(t)^2ds+K_3\le K_1+\frac{K_2}{N^{\frac{1}{2}}}w(t)^2$$

لنأخذ التابع $F(w)=w(t)-K_1-\frac{K_2}{N^{\frac{1}{2}}}w(t)^2$ حيث $x\in\mathbb{R}^+$، نلاحظ أنه أياً كانت w، فإن $F(w)\le 0$.

بفرض N_0 يحقق $\frac{4K_1K_2}{N_0^{\frac{1}{2}}}<1$ ، عندئذٍ مهما يكن $N\ge N_0$ يكون $\frac{4K_1K_2}{N^{\frac{1}{2}}}<1$، ولدينا $F(2K_2)>0$، لنفرض إنه يوجد $t>0$ بحيث $0<2K_2\le w(t)$. من كون w مستمر و $w(0)=0$، فإنه يوجد $t_0>0$ بحيث يحقق $w(t_0)=2K_2$ (حسب مبرهنة القيمة الوسطى) ولكن $F(w(t_0))=F(2K_2)>0$ وهذا تناقض مع كون $F(w)\ge 0$ إذاً $w(t)\le 2K_2$ أي أن $|Z|_{H^1}^2\le 2K_2$، إذاً لا يوجد انفجار في H^1. وبذلك تم إنجاز الخطوة الثانية.

الخطوة الثالثة: إنشاء حل شامل قيمه في $QH^2(\mathbb{R})$ (لا انفجار في $H^2(\mathbb{R})$)

سنثبت أن Z محدود بـ KN في H^2 حيث K كما عُرِّف سابقاً في التمهيدية ٦، وهذا يعني لا انفجار Z في H^2 وعند برهان ذلك يكون قد تم برهان الموضوعة ٢. ليكن $v=y+Z$ و $Z_x=w$، حيث v محدود بثابت، نشتق طرفي المعادلة (9) بالنسبة للمتحول $x\in\mathbb{R}$، فنجد

$$\begin{aligned}w_t+\alpha w+iw_{xx}+iQV'(x)v+iQV(x)w+Q[2iRe(\bar v w)v+i|v|^2w]\\=Q[f_x-2iRe(\bar v y_x)v-i|v|^2y_x-iV(x)y_x].\end{aligned}$$

نضرب طرفي هذه المعادلة بـ $-\overline{w}_t-\alpha\overline{w}$، ثم نكامل ونأخذ الجزء التخيلي، وبالاستفادة من كون $V(x)$ تابع من $L^\infty(\mathbb{R})$ فنحصل على

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}q(w)+\alpha q(w)\le W(w),$$

حيث

$$q(w)=|w_x|_{L^2}^2-C_1|w|_{L^2}^2-2C_1\int w\,v\,dx-\int|v|^2\,|w|^2dx-2Re\int(\bar v\,w)^2\,dx+2Re\int G\overline{w}\,dx$$

$$\begin{aligned}W(w)=\alpha Re\int G\overline{w}\,dx+Re\int G_t\overline{w}dx-C_1\int w\,v_tdx+C_1\alpha\int wv\,dx\\-\int Re(\bar v v_t)|w|^2dx-2\int Re(\overline{v_t}w)Re(\bar v w)dx,\end{aligned}$$

حيث $G=-C_1y_x-i|v|^2y_x-2iRe(\bar v y_x)v+Qf_x.$

تمهيدية ٨: من أجل N_0 متعلقة بـ α ومن أجل K متعلقة بـ M_1 و α و f فإنه من أجل كل $N\ge N_0$ يوجد $Z\in QH^2(\mathbb{R})$ بحيث يكون

$$q(w)\ge\frac{1}{2}|w|_{H^1}^2-K.$$

برهان: بالاستفادة من التمهيدية ١ يكون

$$-\int 2Re(\bar v\,w)^2dx\le|vw|_{L^2}^2\le|v|_{L^4}^2|w|_{L^4}^2\le\frac{K}{N^{\frac{3}{2}}}|w|_{H^1}^2\le\frac{K}{N}|w|_{H^1}^2, \qquad (15)$$

بالطريقة نفسها نحصل على $\int|v|^2\,|w|^2dx\le\frac{K}{N}|w|_{H^1}^2,$

وأيضاً يكون لدينا $-2C_1\int wvdx\le\frac{K}{N}|w|_{H^1}^2,$

وأن $c|w|_{L^2}^2\le\frac{K}{N}|w|_{H^1}^2,$

بالإضافة إلى أن $-C_1\int y_x\,\overline{w}dx\le C_1|y_x|_{L^2}|w|_{L^2}\le\frac{K}{N}|w|_{H^1}^2,$

وأن $-Re\int |v|^2 y_x \bar{w} dx \le |w|_{L^2}|y_x|v|^2|_{L^2} \le |y_x|_{L^4}|w|_{L^2}|v|_{L^4}^2 \le \frac{K}{N^{\frac{1}{2}}}|w|_{H^1} \le \frac{K_1}{N}|w|_{H^1}^2 + K.$

بالطريقة نفسها نجد $Re\int 2vRe(\bar{v}y_x)\bar{w}dx \le \frac{K}{N}|w|_{H^1}^2,$

بالإضافة $Re\int Qf_x\bar{w}dx = -Re\int Qf\partial_x\bar{w} \le c|Qf|_{L^2}|w_x|_{L^2} \le K|w|_{H^1} \le \frac{1}{8}|w|_{H^1}^2 + K.$

إذاً نحصل على

$$Re\int G\bar{w}\,dx \le \left(\frac{K_1}{N} + \frac{1}{8} - \frac{1}{N}\right)|w|_{H^1}^2 + K, \tag{16}$$

ومنه يصبح لدينا $q(w) \ge |w|_{H^1}^2 - \left(\frac{K_1}{N} + \frac{1}{8} - \frac{1}{N}\right)|w|_{H^1}^2 - K.$

نفرض N_0 بحيث يتحقق $\frac{K_1}{N_0} + \frac{1}{8} - \frac{1}{N_0} < \frac{1}{2}$ ، فنجد أن $q(w) \ge \frac{1}{2}|w|_{H^1}^2 - K.$

تمهيدية ٩: من أجل كل N_0 متعلقة بـ α و K متعلقة بـ M_1 و f و α فإنه من أجل $N \ge N_0$ يوجد $Z \in QH^2(\mathbb{R})$ حل للمعادلة (4) بحيث

$$\left|\int G_t\bar{w}\,dx\right| \le \frac{5\alpha}{28}|w|_{H^1}^2 + KN^2, \tag{17}$$

$$\left|\int 2Re(w\bar{v})\bar{w}v_t dx\right| \le \frac{\alpha}{28}|w|_{H^1}^2 + KN^2, \tag{18}$$

$$\left|\int Re(\bar{v}v_t)|w|^2 dx\right| \le \frac{\alpha}{28}|w|_{H^1}^2 + KN^2, \tag{19}$$

برهان:

$$G_t = -C_1 y_{xt} - y_{xt}|v|^2 - 2y_x\bar{v}v_t - 2Re(\bar{v}y_x)v_t - 2Re(v_t y_x)v - 2Re(vy_{xt})v$$

لدينا $|y_{xt}|_{H^{-1}} \le cN|y_t|_{H^{-1}} \le KN,$

فإنه بالنسبة للحد

$$|\int |v|^2 y_{xt} w dx| \le |y_{xt}|_{H^{-1}}||v|^2 w|_{H^1} \le c|y_{xt}|_{H^{-1}}\left(|v|_{H^1}^2 |w|_{L^\infty} + |v|_{L^\infty}^2|w|_{H^1}\right)$$
$$\le KN|w|_{H^1} \le \frac{\alpha}{28}|w|_{H^1}^2 + KN^2.$$

ومن جهة أخرى

$$\left|\int y_x 2\bar{v}v_t w\right| = 2|\int y_x\bar{v}v_t w| \le |v_t|_{H^{-1}}|(y_x\bar{w})\bar{v}|_{H^1}$$
$$\le c|v_t|_{H^{-1}}(|y_x\bar{w}|_{H^1}|\bar{v}|_{L^\infty} + |y_x\bar{w}|_{L^\infty}|\bar{v}|_{H^1}),$$

وباستخدام متراجحة Agmon [21] نجد أن

$$\le c|v_t|_{H^{-1}}|v|_{H^1}(|y_x\bar{w}|_{H^1} + |y_x\bar{w}|_{L^2}^{\frac{1}{2}}|y_x\bar{w}|_{H^1}^{\frac{1}{2}})$$
$$\le c(|y_x|_{L^\infty}|w|_{H^1} + |y_x|_{H^1}|w|_{L^\infty} + |y_x|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}}|w|_{L^2}^{\frac{1}{2}}(|y_x|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}}|w|_{H^1}^{\frac{1}{2}} + |y_x|_{H^1}^{\frac{1}{2}}|w|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}}).$$

وبالاستفادة من الموضوعة ١ نحصل على $|y_x|_{L^\infty} \le |y_x|_{L^2}^{\frac{1}{2}}|y_x|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \le KN^{\frac{1}{2}}$

$$|\int y_x\bar{w}(2\bar{v}v_t)| \le K(N^{\frac{1}{2}}|w|_{H^1} + N|w|_{L^\infty} + N^{\frac{1}{4}}|w|_{L^2}^{\frac{1}{2}}(N^{\frac{1}{4}}|w|_{H^1}^{\frac{1}{2}} + N^{\frac{1}{2}}|w|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}}))$$

والآن باستخدام التمهيدية ١ يكون

$$|\int y_x\bar{w}(2\bar{v}v_t)| \le K(N^{\frac{1}{2}}|w|_{H^1} + N^{-\frac{1}{4}}|w|_{H^1}^{\frac{1}{2}}N^{\frac{1}{4}}|w|_{H^1}^{\frac{1}{2}}) \le \frac{\alpha}{28}|w|_{H^1}^2 + KN.$$

وبالطريقة نفسها يكون لدينا

$$|\int 2Re(\bar{v}y_x)v_t\bar{w}| \le \frac{\alpha}{28}|w|_{H^1}^2 + KN,$$

ومنه يصبح لدينا

$$\left|\int G_t\bar{w}dx\right| \le \frac{5\alpha}{28}|w|_{H^1}^2 + KN^2.$$

ويكون أيضاً لدينا

$$|\int 2Re(w\bar{v})\bar{w}v_t dx| \le \frac{\alpha}{28}|w|_{H^1}^2 + K,$$

$$|\int Re(\bar{v}v_t)|w|^2dx| \le \frac{\alpha}{28}|w|_{H^1}^2 + K.$$

وبذلك يكون انتهى برهان التمهيدية ٩.

بالاستفادة من (١٦)، (١٧)، (١٨)، (١٩) يكون $W(w) \le \frac{K_1}{N}\left|w|_{H^1}^2 + \frac{\alpha}{4}\right|w|_{H^1}^2 + KN^2,$

وباختيار N_0 بحيث يكون $\frac{K_1}{N_0} + \frac{\alpha}{4} \le \frac{\alpha}{2}$، يصبح لدينا

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}q(w) + \alpha q(w) \le \frac{\alpha}{2}|w|_{H^1}^2 + KN^2.$$

بالاستفادة من التمهيدية ٨ وبالمكاملة نجد أن $|w|_{H^1}^2 \le 2q(w) + K \le KN^2$. وبذلك يكون قد اكتمل برهان الموضوعة ٢.

مقارنة بين z و Z من أجل زمن كبير بقدر كافٍ

موضوعة ٤: يوجد K, N_0 تتعلق بمعطيات المعادلة α و $|f|_{L^2}$ بحيث إذا كان $Z = Qu$ في المجموعة المحدودة الماصة من أجل $t \ge 0$ ومن أجل أي $N \ge N_0$ وإذا كان Z حل للمسألة (٤) فإن من أجل كل $t \ge 0$ يكون

$$|Z - z|_{H^1} \le K\, exp(-\alpha t)$$

برهان: ليكن $v = y + Z$ و $\chi = v - u = Z - z$ فإن χ يكون حل للمعادلة الآتية:

$$\chi_t + \alpha\chi + i\chi_{xx} = -iQ[(V(x) + |u|^2 + |v|^2)\chi + uv\bar{\chi}] \qquad (20)$$

نضرب طرفي العلاقة (20) بـ $-\overline{\chi_t} - \alpha\bar{\chi}$، ثم نكامل ونأخذ الجزء التخيلي، وبالاستفادة من كون $V(x)$ تابع من $L^\infty(\mathbb{R})$ نحصل على

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}q(\chi) + \alpha q(\chi) \le W(\chi),$$

حيث

$$q(\chi) = |\chi_x|_{L^2}^2 - C_1|\chi|_{L^2}^2 - \int(|u|^2 + |v|^2)|\chi|^2 - Re\int uv\overline{\chi^2}$$

$$W(\chi) = -\frac{1}{2}\int(|u|^2 + |v|^2)_t|\chi|^2 - \frac{Re}{2}\int(uv)_t\,\overline{\chi^2}.$$

لنأخذ بعض التمهيديات التي تفيدنا في برهان الموضوعة ٤.

تمهيدية ١٠: من أجل χ حل للمعادلة (20)، فإنه يكون لدينا $q(\chi) \ge \frac{1}{2}|\chi|_{H^1}^2$.

برهان: بتطبيق التمهيدية ١ على χ نحصل على

$$\begin{aligned} q(\chi) &= |\chi_x|_{L^2}^2 - C_1|\chi|_{L^2}^2 - \int(|u|^2 + |v|^2)|\chi|^2dx - Re\int uv\overline{\chi^2}dx \\ &\ge |\chi|_{H^1}^2 - C_1|\chi|_{H^1}^2 - c|u|_{L^4}^2|\chi|_{L^4}^2 - c|v|_{L^4}^2|\chi|_{L^4}^2 - c|u|_{L^4}|v|_{L^4}|\chi|_{L^4}^2 \\ &\ge (1 - C_1)|\chi|_{H^1}^2 - \frac{K_1}{N^{\frac{3}{2}}}|\chi|_{H^1}^2. \end{aligned}$$

لنأخذ N_0 بحيث يكون $1-C_1-\frac{K_1}{N^{\frac{3}{2}}} \geq 1-C_1-\frac{K_1}{N_0^{\frac{3}{2}}} \geq \frac{1}{2}.$ إذاً من أجل $N \geq N_0$ يكون

حصلنا على المطلوب.

تمهيدية ١١: من أجل χ حل للمعادلة (20)، فإن $W(\chi) \leq \frac{K}{\sqrt{N}}|\chi|_{H^1}^2,$ حيث K مُعرف كما في الموضوعة ٤.

برهان: بالاستفادة من التمهيدية ١ ومن أجل $u,v \in H^1$ و $u_t,v_t \in H^{-1}$ نحصل على

$$\begin{aligned} W(\chi) &\leq c|v_t|_{H^{-1}}(|\chi|_{L^\infty}|\chi v|_{H^1}+|\chi|_{H^1}|\chi v|_{L^\infty}+|u|_{L^\infty}|\chi^2|_{H^1}+|u|_{H^1}|\chi^2|_{L^\infty}) \\ &\quad + c|u_t|_{H^{-1}}(|\chi^2|_{L^\infty}|v|_{H^1}+|\chi^2|_{H^1}|v|_{L^\infty}+|\chi|_{L^\infty}|u\chi|_{H^1}+|\chi|_{H^1}|u\chi|_{L^\infty}) \\ &\leq c|v_t|_{H^{-1}}|\chi|_{L^\infty}(|\chi|_{L^\infty}|v|_{H^1}+|\chi|_{H^1}|v|_{L^\infty}+|u|_{L^\infty}|\chi|_{H^1}+|u|_{H^1}|\chi|_{L^\infty}) \\ &\quad + c|u_t|_{H^{-1}}|\chi|_{L^\infty}(|\chi|_{L^\infty}|v|_{H^1}+|\chi|_{H^1}|v|_{L^\infty}+|\chi|_{L^\infty}|u|_{H^1}+|\chi|_{L^\infty}|u|_{H^1}) \\ &\leq \frac{K}{\sqrt{N}}|\chi|_{H^1}^2. \end{aligned}$$

الآن لنكمل برهان الموضوعة ٤ ، أصبح لدينا $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}q(\chi)+\left(\alpha-\frac{2K_1}{\sqrt{N}}\right)q(\chi) \leq 0,$

لنأخذ قيمة ابتدائية N_0 بحيث يكون $\frac{2K_1}{\sqrt{N}} \leq \frac{2K_1}{\sqrt{N_0}} \leq \frac{\alpha}{2},$

أي أنه من أجل $N \geq N_0$ يكون لدينا $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}q(\chi)+\frac{\alpha}{2}q(\chi) \leq 0,$ فإن $q(\chi(t)) \leq q(\chi(0))e^{-\alpha t},$

وبما أن

$$\chi(0)=-z_0=-Qu_0.$$

و

$$q(-z_0)=|(z_0)_x|_{L^2}^2-|z_0|^2\int(|u|^2+|v|^2)dx-Re\int uv\overline{z_0^2}dx \ \leq K=K(\alpha,f),$$

فإن

$$|\chi|_{H^1}^2 \leq Ke^{-\alpha t}.$$

فإنه من أجل $t \to \infty$ يكون $\chi \to 0$. فيكون برهان الموضوعة ٤ انتهى.

يمكننا الآن الاستفادة من كل ما سبق في إثبات المبرهنة التالية

مبرهنة ١: الجاذب $\mathcal{A}$ محدود ومتراص في $H^2(\mathbb{R})$.

برهان: سيتم البرهان في خطوتين. سنبدأ بنظامية $\mathcal{A}$ ثم التراص في $H^2(\mathbb{R})$.

ليكن $u_0 \in \mathcal{A}$، فإن المسارات $u(t)=S(t)u_0$ تبقى في المجموعة المحدودة الماصة وبوضع $t_0=-m$ حيث m عدد كبير جداً، فإنه من أجل $t \geq -m$ يكون $Z(t)=Z^m(t)$ حل للمعادلة الآتية

$$Z_t^m+\alpha Z^m+iZ_{xx}^m+iQ\big(V(x)(y+Z^m)\big)+iQ\big(|y+Z^m|(y+Z^m)\big)=Qf, \ \ Z^m(-m)=0$$

وبالاستفادة من الموضوعتين ٢ و ٤ يكون Z^m حل شامل على المجال $]-m,+\infty[$، بالإضافة

$$|Z^m|_{H^2}^2 \leq K(\alpha,f)N,$$

$$|Z^m(t)-z(t)|_{H^1} \leq K(\alpha,f)e^{-\alpha(t+m)}.$$

وبملاحظة أن $Z_m=Z^m(0)$، فإن $|Z_m|_{H^2}^2 \leq K(\alpha,f)N,$

$$|Z_m-z_0|_{H^1} \leq K(\alpha,f)e^{-\alpha m}.$$

وبما أن Z_m متتالية محدودة من فضاء هلبرت $H^2(\mathbb{R})$، فإنه يمكننا استخراج متتالية جزئية متقاربة بضعف نحو Z_0 في $H^2(\mathbb{R})$ وبقوة نحو z_0 في $H^1(\mathbb{R})$، وبما أن النهاية وحيدة إذاً يمكننا أن نكتب

$$Z_0=z_0 \Rightarrow z_0=Qu_0 \in H^2(\mathbb{R}).$$

وبما أن $y_0 \in H^2(\mathbb{R})$، فإن $u_0 \in H^2(\mathbb{R})$، بالتالي $\mathcal{A} \subset H^2(\mathbb{R})$. لنبين الآن أن $\mathcal{A}$ محدود في $H^2(\mathbb{R})$.

بوضع $N = N_0$ وبما أن $Z^m(0) = Z_m$ محدود في $H^2(\mathbb{R})$ فإن $Z_m \rightharpoonup z_0$

و $|z_0|_{H^2}^2 \leq \liminf |Z_m|_{H^2}^2 \leq K(\alpha, f, N_0) = K(\alpha, f)$

ومنه z_0 محدود في $H^2(\mathbb{R})$ وأن u_0 محدود في $H^2(\mathbb{R})$، بالتالي $\mathcal{A}$ محدود في $H^2(\mathbb{R})$. يعني أن $\mathcal{A}$ نظامية.

الآن من أجل برهان أن $\mathcal{A}$ متراص نستخدم طريقة Ball المذكورة في [5]. ليكن u حل المعادلة (٢)، نشتق طرفي هذه المعادلة بالنسبة للمتحول x فنحصل على

$$u_{xt} + \alpha u_x + i u_{xxx} + iV'(x)u + iV(x)u_x + i|u|^2 u_x + 2iRe(u_x\bar{u})u = f_x. \quad (21)$$

نضرب طرفي المعادلة (٢١) بـ $-\bar{u}_{tx} - \alpha\bar{u}_x$، نكامل ونأخذ الجزء التخيلي، فنحصل على

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_{xx}|_{L^2}^2 + \alpha|u_{xx}|_{L^2}^2$$
$$= Re\int V'(x)u\bar{u}_{tx}dx + \alpha\, Re\int V'(x)u\bar{u}_x dx + Re\int V(x)u_x\bar{u}_{tx}dx$$
$$+ \alpha\, Re\int V(x)u_x\bar{u}_x dx$$
$$+Re\int |u|^2\, u_x\bar{u}_{tx} + \alpha\, Re\int |u|^2\, |u_x|^2 + 2\int Re(u_x\bar{u})\, u\bar{u}_{tx} + 2\alpha\, Re\int (u_x\bar{u})\,(u\bar{u}_x)$$
$$- Im\int f_x\,\bar{u}_{tx} - \alpha Im\int f_x\,\bar{u}_x,$$

وبما أن $V(x)$ تابع محدود، فإن

$$Re\int V'(x)u\bar{u}_{tx} \leq |V'(x)|_{L^\infty}\int u\bar{u}_{tx} \leq C_1\int u_x\bar{u}_t$$
$$\alpha\, Re\int V'(x)u\bar{u}_x \leq \alpha|V'(x)|_{L^\infty}\int u\bar{u}_x \leq \alpha\, C_1\int u\bar{u}_x$$
$$Re\int V(x)u_x\bar{u}_{tx} \leq |V(x)|_{L^\infty}\int u\bar{u}_{tx} \leq C_1\int u_x\bar{u}_t$$
$$\alpha\, Re\int V(x)u_x\bar{u}_x \leq \alpha|V(x)|_{L^\infty}\int u_x\bar{u}_x \leq \alpha C_1|u_x|_{L^2}^2,$$

يمكننا أن نكتبها بالشكل

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}q(u) + \alpha\, q(u) \leq W(u),$$

حيث

$$q(u) = |u_{xx}|_{L^2}^2 - C_1|u_x|_{L^2}^2 + G(u)$$
$$G(u) = \int Re(\bar{u}\, u_x)u\bar{u}_x - \int |u|^2|u_x|^2 - 2Im\int f\bar{u}_{xx}$$
$$W(u) = -\alpha Im\int f\bar{u}_{xx} - 2\int Re(u_x\bar{u})Re(u_x\bar{u}_t) - \int Re(u\bar{u}_t)|u_x|^2 + C_1\int u_x\bar{u}_t$$
$$+ \alpha\, C_1\int u\bar{u}_x\,, (22)$$

بالمكاملة نحصل على

$$q(u) \leq q(u_0)e^{-2\alpha t} + \int e^{-2\alpha(t-s)}W(u)ds\,,$$

من أجل $u(t) = S(t)u_0$

$$|(S(t)u_0)_{xx}|_{L^2}^2 - C_1|(S(t)u_0)_x|_{L^2}^2 + G(S(t)u_0)$$

$$\leq \left(|u_{0xx}|_{L^2}^2 - C_1|u_{0x}|_{L^2}^2 + G(u_0)\right)e^{-2\alpha t} + \int_0^t e^{-2\alpha(t-s)}W(S(s)u_0)ds. \quad (23)$$

ليكن x_j متتالية قيمها في $\mathcal{A}$ المحدود في $H^2(\mathbb{R})$، فإنه يوجد متتالية جزئية تتقارب بضعف نحو ρ في $H^2(\mathbb{R})$ وبقوة في $H^1(\mathbb{R})$ ولدينا الجاذب $\mathcal{A}$ هو مجموعة غير خالية متراصة في $H^1(\mathbb{R})$. ولنبرهن أن $\lim sup_{j\to+\infty}|\Delta x_j|_{L^2} \leq |\Delta\rho|_{L^2}$ ، ليكن $u_0 = S(-t)x_j$ من أجل t موجب وباستبدال u_0 بما يساويه في المعادلة (23)

$$\limsup_{j\to\infty}(|(x_j)_{xx}|_{L^2}^2 - C_1|(x_j)_x|_{L^2}^2 + G(x_j))$$
$$\leq \limsup_{j\to\infty}(\,|(S(-t)x_j)_{xx}|_{L^2}^2 - C_1|(S(-t)x_j)_x|_{L^2}^2 + G\big(S(-t)x_j\big))e^{-2\alpha t}$$
$$+ \limsup_{j\to\infty}\int_0^t e^{-2\alpha(t-s)}W\big(S(s-T)x_j\big)ds. \quad (24)$$

تمهيدية ١٢: إن $W\big(S(s-t)x_j\big)$ يتقارب نحو $W(S(s-t)\rho)$ في $\mathbb{R}$ وإن $G\big(S(s-t)x_j\big)$ يتقارب نحو $G(S(s-t)\rho)$ في $\mathbb{R}$.

برهان: المسارات $u^j(s) = S(s-t)x_j$ في الجاذب هي محدودة وغير خالية في $H^2(\mathbb{R})$ ومتراصة في $H^1(\mathbb{R})$، وأن x_j تتقارب من ρ بضعف في $H^2(\mathbb{R})$ وبقوة في $H^1(\mathbb{R})$ فإن $S(s-t)x_j$ تتقارب من $S(s-t)\rho$ بضعف في $H^2(\mathbb{R})$ وبقوة في $H^1(\mathbb{R})$، وبما أن $S(s-t)$ مستمر على $H^1(\mathbb{R})$ والنهاية وحيدة في $H^2(\mathbb{R})$، فإن

$$\alpha\int f\bar{u}_{xx}^j \to \alpha\int f\,\overline{\Delta S(s-t)\rho},$$

وبالنسبة للحد الثاني من W المُعرف سابقاً في (22)

المتتالية u_t^j تتقارب بضعف نحو $(S(s-t)\rho)_t$ في $L^2(\mathbb{R})$ و $u^j(s) = S(s-t)x_j$ تتقارب نحو $S(s-t)\rho$ بضعف في $H^2(\mathbb{R})$ وبقوة في $H^1(\mathbb{R})$.

$$2\int Re\big(u_x^j\bar{u}^j\big)Re\big(u_x^j\bar{u}_t^j\big) \to 2\int Re\,S(s-t)\rho_x\overline{S(s-t)\rho}\;\overline{S(s-t)\rho_x}\;(S(s-t)\rho_t)$$
$$W\big(S(s-t)x_j\big) \to W(S(s-t)\rho).$$

الآن لنكمل برهان المبرهنة ١، بوضع $S(-t)\rho = u_0$ وباستبداله في (23) نجد

$$|\rho_{xx}|_{L^2}^2 - C_1|\rho_x|_{L^2}^2 + G(\rho) \leq$$
$$\left(|(S(-t)\rho)_{xx}|_{L^2}^2 - C_1|(S(-t)\rho)_x|_{L^2}^2 + G(S(-t)\rho)\right)e^{-2\alpha t} + \int_0^t e^{-2\alpha(t-s)}W(S(-t)\rho)ds,$$

فإن

$$\int_0^t e^{-2\alpha(t-s)}W(S(-t)\rho)ds \geq |\rho_{xx}|_{L^2}^2 - C_1|\rho_x|_{L^2}^2 + G(\rho) - (|(S(-t)\rho)_{xx}|_{L^2}^2 -$$
$$C_1|(S(-t)\rho)_x|_{L^2}^2 + G(S(-t)\rho))e^{-2\alpha t}.$$

وبأخذ النهاية في (24) بالاستفادة من التمهيدية ١٢ نحصل على

$$\limsup_{j\to\infty}(|(x_j)_{xx}|_{L^2}^2 - C_1|(x_j)_x|_{L^2}^2 + G(x_j)) = \limsup_{j\to\infty}(|(x_j)_{xx}|_{L^2}^2 - C_1|(x_j)_x|_{L^2}^2) + G(\rho)$$
$$\leq \limsup_{j\to\infty}(\,|(S(-t)x_j)_{xx}|_{L^2}^2 - C_1|(S(-t)x_j)_x|_{L^2}^2 + G\big(S(-t)x_j\big))e^{-2\alpha t}|\rho_{xx}|_{L^2}^2 -$$
$$C_1|\rho_x|_{L^2}^2 + G(\rho) - (|(S(-t)\rho)_{xx}|_{L^2}^2 - C_1|(S(-t)\rho)_x|_{L^2}^2 + G(S(-t)\rho))e^{-2\alpha t}.$$

لدينا $|(S(-t)x_j)_{xx}|_{L^2}^2$ و $|(S(-t)x_j)_x|_{L^2}^2$ و $G(S(-t)x_j)$ متتاليات محدودة، لأن المسارات $S(s)x_j$
من أجل كل $s \in \mathbb{R}$ موجودة في الجاذب. إذاً من أجل t تسعى نحو اللانهاية يكون
$$\limsup_{j\to+\infty} |x_j|_{H^2} \le |\rho|_{H^2},$$
فإن $\mathcal{A}$ متراص في $H^2(\mathbb{R})$.

الاستنتاجات والتوصيات:

• استنتجنا أن معادلة شرودنغر تملك جاذب شامل محدود ومتراص في $H^2(\mathbb{R})$ أي استنتجنا نظامية الجاذب الذي يعطي تنبؤ بسلوك النظام الديناميكي الذي تزوده هذه المعادلة، ونوصي بدراسة وجود ونظامية الجاذب الشامل لهذه المعادلة في فضاء ثنائي البعد. دراسة أبعاد الجاذب لمعادلة شرودنغر غير الخطية المتخامدة في كل من الفضاءين أحادي البعد وثنائي البعد.

المراجع:

[1] انجرو، حسين، باسط (٢٠٢٢) *الجاذب الشامل لمعادلة شرودنجر في* $\mathrm{H}^1(R)$. مجلة طرطوس. ٦(٣).

[2] حسين، منال. (٢٠٢٣). *نظام ديناميكي متخامد لمعادلة شرودنغر غير الناقصية*. مجلة طرطوس. ٧(٣).

[3]. Akroune, N. (1999). Regularity of the attractor for a weakly damped nonlinear Schrödinger equation on R. *Applied Mathematics Letters*, *12*(3), 45-48.

[4]. Alouini, B., & Goubet, O. (2014). Regularity of the attractor for a Bose-Einstein equation in a two dimensional unbounded domain. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-B*, *19*(3), 651-677.

[5]. Ball,J. M. (2004).*Global attractors for damped semilinear wave equations*. Discete & Continuous Dynamical Systems, 10(1&2), 31.

[6]. Bradley, C. C., Sackett, C. A., & Hulet, R. G. (1997). Bose-Einstein condensation of lithium: Observation of limited condensate number. *Physical Review Letters*, *78*(6), 985.

[7]. Colin, T., Dias, F., & Ghidaglia, J. M. (1995). On rotational effects in the modulations of weakly nonlinear water waves over finite depth. *EUROPEAN JOURNAL OF MECHANICS SERIES B FLUIDS*, *14*, 775-794..

[8]. Dabaa, A., & Goubet, O. (2016). Long time behavior of solutions to a Schrödinger-Poisson system in R^3. *Communications on Pure & Applied Analysis*, *15*(5), 1743.

[9]. Davey, A., & Stewartson, K. (1974). On three-dimensional packets of surface waves. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, *338*(1613), 101-110

[10]. Djordjevic, V. D., & Redekopp, L. G. (1977). On two-dimensional packets of capillary-gravity waves. *Journal of Fluid Mechanics*, *79*(4), 703-714.

[11]. Ghidaglia, J. M. (1988, July). Finite dimensional behavior for weakly damped driven Schrödinger equations. In *Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis* (Vol. 5, No. 4, pp. 365-405). Elsevier Masson.

[12]. Goubet, O. (1996). *Regularity of the attractor for a weakly damped nonlinear Schrodinger equation.* Applicable Analysis, 60(1-2), 99-19

[13]. Goubet, O., & Hussein, M. (2009). Dynamical properties for a relaxation scheme applied to a weakly damped non local nonlinear Schrodinger equation. *Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta*, *17*, 71-82.

[14]. Goubet, O., & Hussein, M. (2009). Global attractor for the Davey-Stewartson system on $\mathbb R^ 2$. *Communications on Pure & Applied Analysis*, *8*(5), 1555-1575.

[15]. Goubet, O., & Molinet, L. (2009). Global attractor for weakly damped nonlinear Schrödinger equations in L2 (R). *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, *71*(1-2), 317-320.

[16]. Goubet, O., & Zahrouni, E. (2021). Global attractor for damped forced nonlinear logarithmic Schrödinger equations. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-S*, *14*(8), 2933

[17]. Kechiche, W. (2017). Regularity of the global attractor for a nonlinear Schrödinger equation with a point defect. *Communications on Pure & Applied Analysis*, *16*(4), 1233.

[18]. Kechiche, W. (2021). Global attractor for a nonlinear Schrödinger equation with a nonlinearity concentrated in one point. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-S*, *14*(8), 3027.

[19]. Leblond, H. (1996). Electromagnetic waves in ferrites: from linear absorption to the nonlinear Schrödinger equation. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 29(15), 4623

[20]. Leblond, H. (1999). Electromagnetic waves in ferromagnets: a Davey-Stewartson-type model. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 32(45), 7907.

[21]. Temam, R. (1988**),** *Infinite-Dimsional Dynamical System in Mechanics and Physic, Spring*, New York.

[22]. Verhulst, F. (1990). *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer Puplisher.

[23]. Wang, X. (1995). *An energy equation for the weakly damped driven nonlinear Schrödinger equations and its application to their attractors*. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 88(3-4), 167-175.

[24]. Zakharov, V. E., Musher, S. L., & Rubenchik, A. M. (1985). Hamiltonian approach to the description of non-linear plasma phenomena. *Physics reports*, *129*(5), 285-366.

[25]. Zhu, C. (2016). Global Attractor of nonlocal nonlinear Schrodinger equation on R. *Advances in Analysis*, 1(1).