مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (8) العدد (٢) 2024
Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (8) No. (٢) 2024

المعادلات التفاضلية الخطية الكسرية بأمثال متغيرة

أ.د.منير مخلوف*
أ.د.محمد عامر**
بشار ابو علي***

(تاريخ الإيداع ٦/٣/ ٢٠٢٤ – تاريخ النشر ١٠/٦/ ٢٠٢٤)

□ ملخّص □

في هذا البحث تم حل المعادلات التفاضلية الكسرية ذات المعاملات المتغيرة والمستمرة تقريباً في كل مكان باستخدام مؤثرات أتانغانا– باليانو التفاضلية التكاملية، وتم إيجاد الحل التقريبي لهذا النوع من المعادلات باستخدام طريقة أتانغانا– باليانو، ثم

مثل هذا الحل من خلال متسلسلة لانهائية قد تكون متقاربة (إذا كانت متباعدة يمكن استخدام طرائق قابلية الجمع المألوفة مثل سيزارو وآبل والطريقة المصفوفية بشكل عام) وهذا الحل وحيد ويتضمن مؤثرات أتانغانا– باليانو وتم إيجاد الحلول الدقيقة لمعادلة أتانغانا– باليانو التفاضلية العامة بأمثال متغيرة بالاعتماد على إيجاد الحلول التقريبية للمعادلة التفاضلية الكسرية بأمثال ثابتة.

الكلمات المفتاحية: المعادلات التفاضلية الكسرية ، مؤثرات أتانغانا– باليانو التفاضلية التكاملية، المعادلات التفاضلية الكسرية بأمثال متغيرة، متسلسلات الحل، الحلول النظامية، دالة ميتا غ–ليفلر.

*أستاذ دكتور، كلية العلوم، قسم الرياضيات، جامعة البعث، حمص، سورية
** أستاذ دكتور، كلية العلوم، قسم الرياضيات، جامعة البعث، حمص، سورية
***طالب ماجستير، كلية العلوم، قسم الرياضيات، جامعة البعث، حمص، سورية

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (8) العدد (٢) 2024

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (8) No. (٢) 2024

Fractional linear differential equations with variable coefficients

Dr. Munir Makhlouf*

Dr. Mohammad Amer**

Bashar Ali Abou Ali***

(Received 6/3/2024.Accepted 10/6/2024)

□ABSTRACT □

In this research، fractional differential equations with variable and continuous coefficients almost everywhere are solved using the Atangana-Baleanu differential integral operators.

The approximate solution to this type of equation was found using the Atangana-Baleanu method.

This solution was represented by an infinite series، which can be convergent (if it is divergent، known summability methods of series can be used by the Cesaro Abel method، and the matrix method in general). This solution is unique and involves Atangana-Baleanu operators

Exact solutions of the Atangana-Baleanu general differential equation with variable coefficients were found based on finding approximate solutions of the fractional differential equation with constant coefficients.

KEYWORDS: Fractional differential equations، Atangana–Baleanu fractional calculus، Differential equations with variable coefficients، Series solutions، Analytical solutions ، Mittag Leffler function.

* Professor, Department of Mathematics , Faculty of science , Al Baath University , Homs , Syria

**Professor, Department of Mathematics , Faculty of science , Al Baath University , Homs , Syria

*** Master student , Department of Mathematics , Faculty of science , Al Baath University , Homs , Syria

مقدمة:

إن حل المعادلات التفاضلية بشكل عام يلعب دوراً بارزاً في حل العديد من المسائل المعقدة في الرياضيات النظرية والتطبيقية على حدٍ سواء والفيزياء وميكانيك الكم وغيرها من العلوم الأخرى، لذا انصب الاهتمام على إيجاد واستخدام أفضل الطرائق للحصول على حل المعادلات التفاضلية بشكل عام والمعادلات التفاضلية الكسرية ذات المعاملات الثابتة والمتغيرة بشكل خاص مثل تحويل لابلاس و تحويل فورييه، والتي تفيد في الحصول على أفضل وأدق النتائج $[3,6]$.

كانت البداية في عام ١٩٧٠ حيث تم تطوير العديد من الطرائق في هذا الخصوص سواء في حساب التفاضل أو التكامل الكسري $[13,15,20]$ ودراسة المعادلات التفاضلية الكسرية $[5,11,16]$ وتطبيقاتها في مجالات العلوم بما فيها الأنظمة الديناميكية $[21]$، ميكانيك الكم $[4]$ ، التدفق اللزج $[12]$ والعديد من المفاهيم والعناوين في الفيزياء والهندسة $[8,22]$.

في النصف الثاني من ٢٠١٠ راهن بعض الباحثين على استخدام مؤثرات جديدة في الحساب الكسري تكون أحياناً أفضل من المؤثرات الكلاسيكية لريمان–ليوفيل وكابوتو $[3,9,10]$، وهذا يتضمن مؤثرات بنوى غير فردية، وهذه المؤثرات التي أطلق عليها اسم نماذج أتانغانا–باليانو جذبت اهتماماً هائلاً منذ إيجادها عام ٢٠١٦، إذ تم تعريف مؤثرات أتانغانا–باليانو كنواة لدالة ميتاغ–ليفلر، وهي دالة هامة جداً في التفاضل والتكامل الكسري $[7]$.

بالتالي تم استخدام طرائق في التحليل الرياضي لإيجاد حل المعادلات التي تحوي مؤثرات أتانغانا–باليانو، بما في ذلك طرائق عددية متنوعة $[16,19]$، وطرائق تحليلية (مبرهنة باناخ أو مبرهنة النقطة الثابتة) $[17,18]$، وطرائق تحويلات لابلاس وفورييه وغيرها $[13]$، ولكن في هذا البحث تم التركيز على إيجاد حل المعادلات التفاضلية الكسرية من نوع كابوتو و أتانغانا–باليانو وبأمثال متغيرة مستمرة حيث قمنا باتباع نهج جديد في التقريب لحل هذه المعادلات بصيغة متسلسلة لانهائية.

أهمية البحث وأهدافه:

في هذا البحث ينصب الاهتمام على إيجاد الحلول التقريبية للمعادلات التفاضلية الكسرية ذات المعاملات المتغيرة باستخدام مؤثرات أتانغانا–باليانو ونواة ميتاغ–ليفلر.

طرائق البحث ومواده:

يقع ضمن اختصاص الرياضيات البحتة (النظرية) وبشكل خاص ضمن التحليل الرياضي ، لذلك فإن الطرائق المتبعة تعتمد بشكل أساسي على بعض النظريات الأساسية في التحليل الرياضي .

بعض المفاهيم الأساسية

تعريف ١ $[11]$:

لتكن $\alpha > 0$ و f دالة قابلة للمكاملة على $[a,b]$، يعرف تكامل ريمان–ليوفيل الكسري من اليسار بالصيغة الآتية :

$$^{RL}I_{a+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-u)^{\alpha-1} f(u)du, \quad a < t \le b \quad (1.1)$$

إن المؤثر التكاملي يحقق الخاصة الآتية :

$$^{RL}I_{a+}^{\alpha}\ {}^{RL}I_{a+}^{\beta} f(t) = {}^{RL}I_{a+}^{\alpha+\beta} f(t) \qquad \forall \alpha, \beta > 0$$

f دالة قابلة للمكاملة.

تعريف ٢ $[10]$:

إن الدالة : $E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad z, \beta, \alpha \in \mathbb{C}, \ \operatorname{Re}\alpha > 0$

تسمى دالة أغاروال أو دالة ميتاغ–ليفلر بمتغيرين

حيث أن هذه المتسلسلة متقاربة محلياً بشكل منتظم من أجل كل $\operatorname{Re}\alpha > 0, \quad z \in \mathbb{C}$

ومن أجل $\beta = 1$ تؤول هذه الدالة إلى دالة ميتاغ ليفلر بمتغير واحد وتعطى بالصيغة :

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad z, \alpha \in \mathbb{C}, \ \operatorname{Re}\alpha > 0$$

تعريف ٣ $[15]$:

الفضاء $AC[a,b]$ هو فضاء كل الدوال المستمرة مطلقاً على $[a,b]$ أي :

$AC[a,b] = \{ f : [a,b] \to \mathbb{C} ; f$ مستمرة مطلقاً على $[a,b]$ $\}$

تعريف ٤ $[14]$:

إن المشتق الكسري ABC يعرف بالشكل :

$$^{ABC}D_{a+}^{\alpha} f(t) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t f'(u) E_{\alpha}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}(t-u)^{\alpha} \right) du, \qquad (1.2)$$

حيث $0 < \alpha < 1, a < t < b, f \in AC[a,b]$ و $B(\alpha)$ عدد حقيقي موجب ويحقق الشرط $B(0) = B(1) = 1$

E_{α} دالة ميتاغ ليفلر بمتغير واحد.

تعريف ٥ $[5]$:

يعرف مشتق ABR بالشكل :

$$^{ABR}_{\ \ b}D_t^{\alpha}(f(t)) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \frac{d}{dt} \int_b^t f(x) E_{\alpha}\left[-\alpha \frac{(t-x)^{\alpha}}{1-\alpha} \right] dx$$

وذلك لكل $f \in L^1[a,b]$ و $b > a$, $\alpha \in [0,1]$ ، E_{α} دالة ميتاغ ليفلر بمتغير واحد، وهذا المشتق ذو نواة غير محلية.

خواص $[5]$:

١. $$L\left\{ {}^{ABR}_{\ \ 0}D_t^{\alpha}(f(t)) \right\}(p) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \frac{p^{\alpha} L\{f(t)\}(p)}{p^{\alpha} + \frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

2. $$L\left\{ {}^{ABC}_{\ \ 0}D_t^{\alpha}(f(t)) \right\}(p) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \frac{p^{\alpha} L\{f(t)\}(p) - p^{\alpha-1} f(0)}{p^{\alpha} + \frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

مبرهنة ١ $[5]$:

لتكن $f\in L^1\left[a,b\right]$ و $\alpha\in\left[0,1\right],b>a$ عندئذٍ :

$$ {}_{0}^{ABC}D_t^{\alpha}(f(t))={}_{0}^{ABR}D_t^{\alpha}(f(t))+H(t) \qquad (*)$$

الإثبات : بتطبيق تحويل لابلاس على طرفي العلاقة $(*)$ نحصل على :

$$L\left\{{}_{0}^{ABC}D_t^{\alpha}(f(t))\right\}(p)=\frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\frac{p^{\alpha}L\left\{f(t)\right\}(p)}{p^{\alpha}+\frac{\alpha}{1-\alpha}}-\frac{p^{\alpha-1}f(0)}{p^{\alpha}+\frac{\alpha}{1-\alpha}}\frac{B(\alpha)}{1-\alpha}$$

ثم باستخدام الخاصية ١ يكون :

$$L\left\{{}_{0}^{ABC}D_t^{\alpha}(f(t))\right\}(p)=L\left\{{}_{0}^{ABR}D_t^{\alpha}(f(t))\right\}(p)-\frac{p^{\alpha-1}f(0)}{p^{\alpha}+\frac{\alpha}{1-\alpha}}\frac{B(\alpha)}{1-\alpha}$$

بتطبيق تحويل لابلاس العكسي نحصل على :

$${}_{0}^{ABC}D_t^{\alpha}(f(t))={}_{0}^{ABR}D_t^{\alpha}(f(t))-\frac{B(\alpha)}{1-\alpha}f(0)E_{\alpha}(-\frac{\alpha}{1-\alpha}t^{\alpha})$$

أي أن مشتق ABC مشابه لمشتق ABR ولكن بدون الحد الذي يتضمن قيمة ابتدائية $f(a)$ مضروبة بدالة ميتاغ–ليفلر.

تمهيدية ١ $\left[1\right]$:

إن مشتق أتانغانا–باليانو ABC يعطى بالصيغة :

$${}^{ABC}D_{a+}^{\alpha}f(t)=\frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\left(f(t)-f(a).E_{\alpha}(\frac{-\alpha}{1-\alpha}(t-a)^{\alpha})-\frac{\alpha}{1-\alpha}\int_a^t(t-u)^{\alpha-1}f(u)E_{\alpha,\alpha}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}(t-u)^{\alpha}\right)du\right) \qquad (1.3)$$

وذلك لكل $f\in AC\left[a,b\right]$ والطرف الأيمن معرف من أجل كل $f\in L^1\left[a,b\right]$ ، و $B(\alpha)$ عدد حقيقي موجب ويحقق الشرط $B(0)=B(1)=1$ ، E_{α} دالة ميتاغ ليفلر بمتغير واحد (كما هو مذكور في التعريف ٢)، وبالتالي الصيغة (1.3) يمكن أن تستخدم كتعريف لمشتق ABC من أجل كل f من $L^1\left[a,b\right]$

الإثبات :

يبدأ الإثبات من التكامل بالتجزئة للعلاقة (1.2) الطرف الأيمن معرف من أجل كل الدوال f على L^1 بنفس الطريقة المستخدمة في $\left[2\right]$، وذلك من أجل مشتق ABR ، وبما أن مشتق ABC مشابه لمشتق ABR منقوصاً الحد الذي يتضمن قيمة ابتدائية $f(a)$ مضروبة بدالة ميتاغ–ليفلر، وبما أن الطرف الأيمن من العلاقة (1.3) يمثل مؤثر معرف من أجل جميع $f\in L^1\left[a,b\right]$ والذي يطابق مشتق ABC في الحالة الخاصة $AC\left[a,b\right]\subset L^1\left[a,b\right]$ فمن الطبيعي تعريف مشتق ABC على فضاء أوسع $L^1\left[a,b\right]$ باستخدام هذه الصيغة.

يمكن ملاحظة أن التكامل بالتجزئة يمكن تطبيقه على مؤثر أتانغانا–باليانو ABC بهذا الشكل لأنه مؤثر غير فردي $\left[6\right]$

هذه الغير فردية تتيح لنا تمديد تعريف مشتق ABC من أجل كل دوال L^1 .

ملاحظة : الصيغة (1.3) يمكن أن تستخدم كتعريف لمشتق ABC من أجل كل f من $L^1\left[a,b\right]$

من الآن فصاعداً سوف نتعامل مع العلاقة (1.3) كعلاقة مكافئة، بديلة لتعريف مشتق ABC .

تعريف 6 $[3]$:

الفضاء $C'[0,T]$: هو فضاء كل الدوال المستمرة تقريباً في كل مكان على $[0,T]$ حيث :
$C[0,T] \subset C'[0,T]$

ملاحظة : كل دالة مستمرة مطلقاً على $[a,b]$ هي دالة محدودة التغير أو ذات تغيرات محدودة وبالتالي مستمرة تقريباً في كل مكان على $[a,b]$ ولكن العكس غير صحيح بشكل عام أي أن صف الدوال المستمرة مطلقاً على $[a,b]$ هو صف جزئي من صف الدوال $C'[a,b]$ وكل دالة مستمرة تقريباً في كل مكان على $[a,b]$ تكون قابلة للمكاملة حسب ريمان والعكس صحيح.

مبرهنة 2 $[14]$:

لتكن $f \in C'[0,T]$ دالة مستمرة تقريباً في كل مكان عندئذ :

١ . مشتق ABC $\ {}^{ABC}D_{a+}^{\alpha} f(t)$ مستمر تقريباً في كل مكان أيضاً على $[a,b]$

٢ . $\lim\limits_{t \to +a} {}^{ABC}D_{a+}^{\alpha} f(t) = 0$

الإثبات :

يمكن إثبات هذه المبرهنة حسب العلاقة (1.3) (عبارة المشتق ABC)، كذلك باستخدام خواص المحدودية للدالة النواة .

أي أن التكامل موجود بغض النظر عن القيم العددية (بحيث تكون هذه القيم معينة) لأن كل دالة مستمرة تقريباً في كل مكان على $[a,b]$ هي قابلة للمكاملة حسب ريمان على ذلك المجال والعكس صحيح.

تعريف 7 $[1]$:

يعرف تكامل أتانغانا–باليانو الكسري بالصيغة:

$$ {}^{AB}I_{a+}^{\alpha} f(t) = \frac{1-\alpha}{B(\alpha)} f(t) + \frac{\alpha}{B(\alpha)} \cdot {}^{RL}I_{a+}^{\alpha} f(t) \qquad (1.4)$$

حيث $f \in L^1[a,b]$ ، $a < t < b,$ ، $0 < \alpha < 1,$

مبرهنة 3 $[2]$:

التعريف الآتي البديل للمشتق ABC الكسري مفيد لإثبات العديد من الخواص :

$$ {}^{ABC}D_{a+}^{\alpha} f(t) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-\alpha}{1-\alpha} \right)^n {}^{RL}I_{a+}^{\alpha n+1} f'(t) \qquad (1.5)$$

$$= \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-\alpha}{1-\alpha} \right)^n {}^{RL}I_{a+}^{\alpha n} (f(a) - f(b))$$

حيث المتسلسلة المذكورة متقاربة بشكل منتظم على $[a,b]$ و $0 < \alpha < 1$ وفي المتسلسلة الأولى f يجب أن تكون في $AC[a,b]$ ، بينما في المتسلسلة الثانية (1.5) أي دالة مستمرة تقريباً في كل مكان f هي دالة مقبولة .

مبرهنة 4 $[4]$:

لتكن f دالة مستمرة تقريباً في كل مكان على $[a,b]$ عندئذ تكون العلاقات الآتية محققة :

$$^{AB}I_{a+}^{\alpha}(^{ABC}D_{a+}^{\alpha}f(t))=f(t)-f(a);\quad t\in\left]a,b\right] \qquad (1.6)$$

$$^{ABC}D_{a+}^{\alpha}(^{AB}I_{a+}^{\alpha}f(t))=f(t)-f(a)E_{\alpha}(\frac{-\alpha}{1-\alpha}t^{\alpha});\quad t\in\left]a,b\right] \qquad (1.7)$$

الإثبات: النتيجة الأولى (1.6) تم إثباتها في التمهيدية 1 [2] من أجل $f\in AC\left[a,b\right]$

ومن أجل f دالة مستمرة تقريباً في كل مكان يمكن إثباتها بسهولة باستخدام الصيغة (1.5)

بالنسبة للنتيجة الثانية لدينا :

$$^{ABC}D_{a+}^{\alpha}(^{AB}I_{a+}^{\alpha}f(t))=\frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)^{n}\ {}^{RL}I_{a+}^{\alpha n}\left(^{AB}I_{a+}^{\alpha}f(t)-{}^{AB}I_{a+}^{\alpha}f(a)\right)$$

بما أن $f(t)$ مستمرة تقريباً في كل مكان ومحدودة في جوار $t=a$ لدينا $^{RL}I_{a+}^{\alpha}f(a)=0$ وبالتالي نجد $^{AB}I_{a+}^{\alpha}f(a)=\frac{1-\alpha}{B(\alpha)}f(a)$ ، وبالتالي فإن الجانب الأيمن من العبارة الأخيرة هو :

$$\frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)^{n}\ {}^{RL}I_{a+}^{\alpha n}\left(\frac{1-\alpha}{B(\alpha)}f(t)+\frac{\alpha}{B(\alpha)}\ {}^{RL}I_{a+}^{\alpha}f(t)-\frac{1-\alpha}{B(\alpha)}f(\alpha)\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)^{n}\ {}^{RL}I_{a+}^{\alpha n}f(t)+\frac{\alpha}{1-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)^{n}\ {}^{RL}I_{a+}^{\alpha n+\alpha}f(t)-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)^{n}\ \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)}f(a)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)^{n}\ {}^{RL}I_{a+}^{\alpha n}f(t)-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right)^{n}\ {}^{RL}I_{a+}^{\alpha n}f(t)-E_{\alpha}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}t^{\alpha}\right)f(a)$$

$$=f(t)-E_{\alpha}\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}t^{\alpha}\right)f(a)$$

وبهذا يكون قد تم إثبات المطلوب.

النتائج والمناقشة:

سنقوم بدراسة المعادلة التفاضلية الآتية بأمثال متغيرة مستمرة ومؤثرات AB :

$$^{ABC}D_{0+}^{\beta_0}x(t)+\sum_{i=1}^{m}d_i(t)\,^{ABC}D_{0+}^{\beta_i}x(t)=h(t),\quad t\in\left[0,T\right] \qquad (2.1)$$

إما بالشرط الابتدائي المتجانس : (2.2) $x(0^{+})=0$

أو بالشرط الابتدائي العام : (2.3) $x(0^{+})=C_0\in\mathbb{R}$

حيث : $1>\beta_0>\beta_1>......>\beta_m>0,\quad m\in\mathbb{N}$

و $x,h,d_i,(i=1,.....,m)$ دوال مستمرة تقريباً في كل مكان على $\left[0,T\right]$

من أجل قابلية حل المسألة ، الدالة h يجب أن تحقق $h(0)=0$

المبرهنة التالية تتضمن شروط الوجود والوحدانية لحل مستمر تقريباً في كل مكان للمعادلة (2.1) مع الشروط الابتدائية (2.2) (لاحقاً سيتم تعميم هذه النتيجة لنفس المعادلة بشروط ابتدائية عامة).

التعميم من مفهوم الاستمرار إلى مفهوم الاستمرار تقريباً في كل مكان صحيح نظراً لتحقق مايلي :

$AC\left[a,b\right]$فضاء كل الدوال المستمرة مطلقاً على $\left[a,b\right]$ وبالطبع كل دالة مستمرة مطلقاً هي دالة محدودة التغير على $\left[a,b\right]$ وبالتالي مستمرة تقريباً في كل مكان على $\left[a,b\right]$ [24].

" إذا كان التابع $f(x)$ مستمر مطلقاً على $[a,b]$، فإنه محدود التغير أو ذو تغيرات محدودة على $[a,b]$. (لأن مجموعة نقاط الانقطاع لتابع ذو تغيرات محدودة تكون على الأكثر قابلة للعد "$[24]$.

" كل تابع مستمر مطلقاً على $[a,b]$ هو تابع مستمر على $[a,b]$ ولكن التطابق ممكن في حال كان التابع قابل للاشتقاق باستمرار على $[a,b]$ (كل تابع مستمر على مجموعة متراصة هو محدود) "$[24]$.

مبرهنة 5 :

لتكن : $h, d_i (i=1,.....,m)$ دوال مستمرة تقريباً في كل مكان على $[0,T]$ تحقق أن $h(0)=0$ تحقق أيضاً المحدودية الآتية بالنسبة للدوال d_i :

$$\frac{1-\beta_0}{|B(\beta_0)|}\sum_{i=1}^{m}\frac{|B(\beta_i)|}{1-\beta_i}\|d_i\|_\infty \le C < 1 \qquad (2.4)$$

بالتالي فإن مسألة القيم الابتدائية (٢.٢) و(2.1) لها حل وحيد $x(t)$ مستمر تقريباً في كل مكان على المجال $[0,T]$ هو:

$$\begin{cases} x_0(t) = {}^{AB}I_{0+}^{\beta_0}h(t), \\ x_n(t) = x_0(t) - {}^{AB}I_{0+}^{\beta_0}\sum_{i=1}^{m} d_i(t)\, {}^{ABC}D_{0+}^{\beta_i}x_{n-1}(t), \quad n=1,2,.... \end{cases} \qquad (2.5)$$

الإثبات: في البداية ، نثبت أن مسألة القيمة الابتدائية $(2.1),(2.2)$ يمكن أن تكافئ معادلة تكاملية.

الآن بفرض أن $x(t)$ دالة مستمرة تقريباً في كل مكان على $[a,b]$ تحقق $(2.1),(2.2)$ نعرف $w(t) = {}^{ABC}D_{0+}^{\beta_0}x(t)$

بحسب المبرهنة ٢، لدينا ، $w(0)=0$ ، $w \in C[0,T]$، ومن المبرهنة ٣ والشرط الابتدائي (2.2) يكون لدينا ${}^{AB}I_{0+}^{\beta_0}w(t) = x(t)$، وبالتالي المعادلة (2.1) تكتب بالشكل :

$$w(t) + \sum_{i=1}^{m} d_i(t)\, {}^{ABC}D_{0+}^{\beta_i}\, {}^{AB}I_{0+}^{\beta_0}w(t) = h(t) \qquad (2.6)$$

بما أن $x \in C[a,b] \Leftarrow x \in C'[a,b]$ وهو يمثل حل لمسألة القيمة الابتدائية $(2.1),(2.2)$

ثم إن $w(t) = {}^{ABC}D_{0+}^{\beta_0}x(t)$ تعطي الحل $w \in C'[0,T]$ للمعادلة التكاملية (2.6)

نلاحظ أن : $w(0)=h(0)=0$ عندما تكون المشتقات ABC معدومة عند نقطة ابتدائية .

لنثبت العكس الآن بفرض أن $w \in C'[0,T]$ هو حل ل (2.6) كما أن $w(0)=0$ بتطبيق المؤثر: ${}^{AB}I_{0+}^{\beta_0}$ على العبارة (2.6) نحصل على :

$${}^{AB}I_{0+}^{\beta_0}w(t) + {}^{AB}I_{0+}^{\beta_0}\sum_{i=1}^{m} d_i(t)\, {}^{ABC}D_{0}^{\beta_i}\, {}^{AB}I_{0+}^{\beta_0}w(t) = {}^{AB}I_{0+}^{\beta_0}h(t)$$

نعرف: $x(t) = {}^{AB}I_{0+}^{\beta_0}w(t)$ مستمرة تقريباً في كل مكان على $[0,T]$، لدينا:

$$x(t) + {}^{AB}I_{0+}^{\beta_0}\sum_{i=1}^{m} d_i(t)\, {}^{ABC}D_{0+}^{\beta_i}x(t) = {}^{AB}I_{0+}^{\beta_0}h(t)$$

حيث $C'[0,T]$ هو فضاء كل الدوال المستمرة تقريباً في كل مكان على $[0,T]$

بتطبيق المؤثر: ${}^{ABC}D_{0+}^{\beta_0}$ يصبح لدينا:

$$ {}^{ABC}D_{0+}^{\beta_0}x(t) + {}^{ABC}D_{0+}^{\beta_0}\,{}^{AB}I_{0+}^{\beta_0}\sum_{i=1}^{m} d_i(t)\,{}^{ABC}D_{0+}^{\beta_i}x(t) $$
$$ = {}^{ABC}D_{0+}^{\beta_0}\,{}^{AB}I_{0+}^{\beta_0}h(t) $$

باستخدام المبرهنة ٤ والملاحظة بأن h وجميع المشتقات ABC معدومة عند نقطة ابتدائية $t=0$ ينتج لدينا :

$$ {}^{ABC}D_{0+}^{\beta_0}x(t) + \sum_{i=1}^{m} d_i(t)\,{}^{ABC}D_{0+}^{\beta_i}x(t) = h(t) $$

علمنا أن x تحقق (2.1) وتبقى فقط التحقق من الشروط الابتدائية (2.2)

لما كان $x(t) = {}^{AB}I_{0+}^{\beta_0}w(t)$ مزيج خطي من $w(t)$ و ${}^{RL}I_{0+}^{\beta_0}w(t)$ يجب أن تساوي الصفر عندما $t \to 0^+$

لما كان $w(0)=0$ و w مستمرة تقريباً في كل مكان بالتالي فهي محدودة في جوار $t=0$

بالتالي لدينا الشرط الابتدائي المطلوب (2.2)

بالتالي فإن الحل $w \in C'[0,T]$ ل (2.6) يدل على أن : $x(t) = I_{0+}^{\beta_0}w(t) \in C'[0,T]$

هو حل للمسألة (2.1) ويحقق الشرط (2.2)

الآن قمنا بإثبات أن مسألة القيمة الابتدائية $(2.1),(2.2)$ مكافئة للمعادلة التكاملية (2.6) بشرط ابتدائي $w(0)=0$

بتعويض : $w(t) = {}^{ABC}D_{0+}^{\beta_0}x(t), \quad x(t) = I_{0+}^{\beta_0}w(t)$

فإن المسألتين يمكن حلهما من أجل دوال مستمرة تقريباً في كل مكان $x(t), w(t)$

بقي أن نثبت وجود ووحدانية الحل المستمرتقريباً في كل مكان للمعادلة (2.6)

لنعرف المؤثر T بالصيغة: $Tw(t) := h(t) - \sum_{i=1}^{m} d_i(t)\,{}^{ABC}D_{0+}^{\beta_i}\,{}^{AB}I_{0+}^{\beta_0}w(t)$

بالتالي فإن المعادلة (2.6) مكافئة لـ $Tw(t) = w(t)$

بالتالي يعتبر T مؤثراً لفضاء الدوال المستمرة تقريباً في كل مكان $C'[0,T]$ والتي تحقق الشرط : $w(0)=0$ علماً أنه فضاء خطي منظم مزود بنظيم $\|\ \|\sup$ حيث : $\|z\|_k := \sup_{t\in[0,T]}\left\{e^{-kt}|z(t)|\right\}$

من أجل بعض قيم k الحقيقية الموجبة.

وبحسب العلاقة (1.5) من المبرهنة ٣ وبالأخذ بالحسبان أن $w(0)=0$ وأن $\lim_{t\to 0}{}^{AB}I_{0+}^{\beta_0}w(t) = 0$

نجد أنه لكل $t\in[0,T]$, $w_1,w_2\in C'[0,T]$, يكون:

$$\left|Tw_1(t)-Tw_2(t)\right|\le\sum_{i=1}^{m}\|di\|_\infty\left|{}^{ABC}D_{0+}^{\beta_i}\,{}^{AB}I_{0+}^{\beta_0}w_1(t)-{}^{ABC}D_{0+}^{\beta_i}\,{}^{AB}I_{0+}^{\beta_0}w_2(t)\right|$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\|di\|_\infty\left|\frac{B(\beta_i)}{1-\beta_i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-\beta_i}{1-\beta_i}\right)^n {}^{RL}I_{a+}^{\beta_i n}\,{}^{AB}I_{0+}^{\beta_0}(w_1(t)-w_2(t))\right|$$

$$\le\|w_1-w_2\|_k\,(J_1(t)+J_2(t)),$$

حيث: $J_1(t)=\dfrac{1-\beta_0}{|B(\beta_0)|}\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\|d_i\|_\infty\frac{|B(\beta_i)|}{1-\beta_i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\beta_i}{1-\beta_i}\right)^n {}^{RL}I_{a+}^{\beta_i n+\beta_0}(e^{kt})$

لنثبت الآن أنه من أجل اختيار مناسب ل $k\in\mathbb{R}^+$ يوجد ثوابت موجبة $(i=1,2)$ $0<C_i<1;$

وتحقق مايلي: $|J_2(t)|<C_2e^{kt}$, $|J_1(t)|<C_1e^{kt}$, $\forall t\in[0,T]$,

لإثبات ذلك نحتاج إلى التمهيدية الآتية: [18]

$$I_{0+}^{\lambda}e^{pt}\le\frac{e^{pt}}{p^{\lambda}},\quad t,\lambda>0,\quad p\in\mathbb{R}^+\qquad(2.7)$$

من أجل الحالة J_1 ، يمكن مناقشة الحالة التي يكون فيها $n=0$ واستخدام العلاقة (2.4). أما من أجل $n\ge1$ سوف نستخدم (2.7) أي :

$$J_1(t)=\frac{1-\beta_0}{|B(\beta_0)|}\sum_{i=1}^{m}\|d_i\|_\infty\frac{|B(\beta_i)|}{1-\beta_i}\left(e^{kt}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\beta_i}{1-\beta_i}\right)^n {}^{RL}I_{a+}^{\beta_i n}(e^{kt})\right)$$

$$\le Ce^{kt}+e^{kt}\frac{1-\beta_0}{|B(\beta_0)|}\sum_{i=1}^{m}\|d_i\|_\infty\frac{|B(\beta_i)|}{1-\beta_i}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\beta_i}{1-\beta_i}\right)^n\cdot\frac{1}{k^{\beta_i n}}$$

$$=Ce^{kt}+e^{kt}\frac{1-\beta_0}{|B(\beta_0)|}\sum_{i=1}^{m}\|d_i\|_\infty\frac{\beta_i|B(\beta_i)|}{(1-\beta_i)^2}\cdot\frac{k^{-\beta_i}}{1-\dfrac{\beta_i}{1-\beta_i}k^{-\beta_i}}$$

بفرض أن $k\in\mathbb{R}^+$ كبير بقدر كاف بالتالي : $\left|\dfrac{\beta_i}{1-\beta_i}k^{-\beta_i}\right|<1$

$k\in\mathbb{R}^+$ يمكن اختياره كبير بقدر كاف مع الأخذ بالحسبان أن:

$$|J_1(t)|<(c+c_1)e^{kt};\quad 0\le C_i<1,\quad(i=1,2)\quad,\forall t\in[0,T],c_1<\frac{1-c}{2}$$

الحالة J_2 مشابهة للحالة الأولى لـ J_1 باستثناء أن الحد من أجل $n=0$ يمكن دراسته بشكل منفصل عندما $\beta_i n+\beta_0$ موجب وذلك من أجل جميع القيم $n\ge0$

بالتالي يمكننا ضمان أن $|J_2(t)|<c_2e^{kt}$, $\forall t\in[a,b]$,

حيث $c_2\in(0,1)$ هو ثابت محدود يحقق $c_2<\dfrac{1-c}{2}$

ثم نحصل على ثابت $c'=c+c_1+c_2\in(0,1)$ بحيث يكون:

$$e^{-kt}\left|Tw_1(t)-Tw_2(t)\right|\le c'\left\|w_1-w_2\right\|_k$$

أي: $\left\|Tw_1-Tw_2\right\|\le c'\left\|w_1-w_2\right\|_k$

وبالتالي المؤثر T تطبيق ضاغط مع الأخذ بعين الاعتبار النظيم $\|.\|_k$

وبالتالي فهو تطبيق ضاغط مع الأخذ بعين الاعتبار الحد الأعلى للنظيم $\|.\|_\infty$

باستخدام مبرهنة باناخ للنقطة الثابتة نستنتج أن المعادلة التكاملية (2.6)

تملك حل وحيد في فضاء كثيرات الحدود على $[0,T]$ مع الأخذ بعين الاعتبار $\|.\|_\infty$

أيضاً المتتالية $\{w_n(t)\}_{n\ge 0}$ تعرف بطريقة التقريب المتتالي بالصيغة :

$$w_0=h\in C'[0,T]$$

$$w_n(t)=Tw_{n-1}(t)=h(t)-\sum_{i=1}^{m}d_i(t)\,{}^{ABC}D_{0+}^{\beta_i}\,{}^{AB}I_{0+}^{\beta_0}w_{n-1}(t)$$

تتقارب بشكل منتظم من النقطة الثابتة $w(t)$

بوضع $x_n(t)={}^{AB}I_{0+}^{\beta_0}w_n(t)$ وبأخذ النتيجة أن التكاملات الكسرية تحافظ على التقارب المنتظم ،نحصل على متتالية الدوال (2.5) المتقاربة بشكل منتظم للحل المستمرتقريباً في كل مكان الوحيد $x(t)$ لـ (2.1) ,(2.2) الأمر الذي يكمل الإثبات .

مبرهنة ٦ :

لتكن $h,d_i(i=1,.....,m)$ دوال مستمرة تقريباً في كل مكان على $[0,T]$ وتحقق الشرط $h(0)=0$ وتحقق الشروط الواردة في (2.4)، عندئذ فإن مسألة القيمة الابتدائية (2.1),(2.2) تملك حل مستمر تقريباً في كل مكان ووحيد $x(t)$ وهو معطى بصيغة متسلسلة متقاربة بانتظام وهو:

$$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,{}^{AB}I_{0+}^{\beta_0}\left(\sum_{i=1}^{m}d_i(t)\,{}^{ABC}D_{0+}^{\beta_i}\,{}^{AB}I_{0+}^{\beta_0}\right)^k h(t)\quad(2.8)$$

الإثبات : من المبرهنة ٤ نثبت وجود ووحدانية الحل المستمر تقريباً في كل مكان لمسألة القيمة الابتدائية $(2.2),(2.1)$

لإيجاد الحل الدقيق نستخدم طريقة التقريبات المتتالية المعتمدة على متتالية الدوال المعرفة بشكل تدريجي (2.5)

التقريب الأول $x_1\in C'[0,T]$ هو :

$$x_1(t)={}^{AB}I_{0+}^{\beta_0}h(t)-{}^{AB}I_{0+}^{\beta_0}\sum_{i=1}^{m}d_i(t)\,{}^{ABC}D_{0+}^{\beta_i}\,{}^{AB}I_{0+}^{\beta_0}h(t)$$

$$=\sum_{k=0}^{1}(-1)^k\,{}^{AB}I_{0+}^{\beta_0}\left(\sum_{i=1}^{m}d_i(t)\,{}^{ABC}D_{0+}^{\beta_i}\,{}^{AB}I_{0+}^{\beta_0}\right)^k h(t)$$

التقريب الثاني $x_2\in C'[0,T]$ هو :

وبالتالي وبشكل تدريجي نجد أن الحد العام يأخذ الشكل الآتي :

$$x_n(t)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,{}^{AB}I_{0+}^{\beta_0}\left(\sum_{i=1}^{m}d_i(t)\,{}^{ABC}D_{0+}^{\beta_i}\,{}^{AB}I_{0+}^{\beta_0}\right)^k h(t) \qquad (2.9)$$

ويمكن استخدام طريقة الاستقراء الرياضي لإثبات أن الصيغة المتقاربة محققة من أجل x_{n+1} ، لدينا:

$$\begin{aligned}
x_{n+1}(t) &= {}^{AB}I_{0+}^{\beta_0}h(t)-{}^{AB}I_{0+}^{\alpha_0}\sum_{i=1}^{m}d_i(t)\,{}^{ABC}D_{0+}^{\beta_i}x_n(t)\\
&= {}^{AB}I_{0+}^{\beta_0}h(t)-{}^{AB}I_{0+}^{\beta_0}\sum_{i=1}^{m}d_i(t)\,{}^{ABC}D_{0+}^{\beta_i}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,{}^{AB}I_{0+}^{\beta_0}\left(\sum_{i=1}^{m}d_i(t)\,{}^{ABC}D_{0+}^{\beta_i}\,{}^{AB}I_{0+}^{\beta_0}\right)^k h(t)\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\,{}^{AB}I_{0+}^{\beta_0}\left(\sum_{i=1}^{m}d_i(t)\,{}^{ABC}D_{0+}^{\beta_i}\,{}^{AB}I_{0+}^{\beta_0}\right)^k h(t)
\end{aligned}$$

حسب مبدأ الاستقراء الرياضي يكون التقريب النوني x_n للحل يعطى بالعلاقة (2.9) لكل $n\in\mathbb{N}$

ولما كانت متتالية الدوال $\{x_n(t)\}_{n\geq 0}$ متقاربة بشكل منتظم إلى $x(t)$ نحصل على :

$$\begin{aligned}
x(t) &= \lim x_n(t)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,{}^{AB}I_{0+}^{\beta_0}\left(\sum_{i=1}^{m}d_i(t)\,{}^{ABC}D_{0+}^{\beta_i}\,{}^{AB}I_{0+}^{\beta_0}\right)^k h(t)
\end{aligned}$$

حيث أن المتسلسلة اللانهائية فوق k متقاربة بشكل منتظم على $[0,T]$

أما في الحالة العامة لأجل الشرط $x(t)=c_0\in\mathbb{R}$ ، يمكن الحصول عليها من (2.2) حيث المشتق ABC للثابت معدوم.

نتيجة ١:

لتكن $h,d_i(i=1,.....,m)$ دوال مستمرة تقريباً في كل مكان على $[0,T]$ تحقق $h(0)=0$ وتحقق الشروط (2.4)

بالتالي مسألة القيمة الابتدائية ل (2.1) والشرط الابتدائي العام (2.3) تملك حل مستمر تقريباً في كل مكان على $[0,T]$ ووحيد $x(t)$ وهو معطى بصيغة المتسلسلة المتقاربة بشكل منتظم:

$$x(t)=c_0+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,{}^{AB}I_{0+}^{\beta_0}\left(\sum_{i=1}^{m}d_i(t)\,{}^{ABC}D_{0+}^{\beta_i}\,{}^{AB}I_{0+}^{\beta_0}\right)^k h(t) \qquad (2.10)$$

نتيجة ٢:

لتكن h دالة مستمرة تقريباً في كل مكان على $[0,T]$ تحقق $h(0)=0$

ولتكن الثوابت: $1>\beta_0>\beta_1>....>\beta_m>0,\ d_1,....,d_m$

حيث : $\dfrac{1-\beta_0}{|B(\beta_0)|}\sum_{i=1}^{m}\dfrac{|B(\beta_i)|}{1-\beta_i}|d_i|<1$

بالتالي مسألة القيم الابتدائية المعطاة بالصيغة :

$${}^{ABC}D_{0+}^{\beta_0}x(t)+\sum_{i=1}^{m}d_i\,{}^{ABC}D_{0+}^{\beta_i}x(t)=h(t),\quad t\in[0,T]$$

تملك حل وحيد مستمر تقريباً في كل مكان $x(t)$ ويعطى بصيغة متسلسلة متقاربة بشكل منتظم :

$$x(t)=c_0+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}(-d_i)^k\left({}^{AB}I_{0+}^{\beta_0}\,{}^{ABC}D_{0+}^{\beta_i}\right)^k\,{}^{AB}I_{0+}^{\beta_0}h(t) \quad (2.11)$$

نتيجة ٣:

في المبرهنة (٥) إذا استبدلنا الاستمرار عوضاً عن الاستمرار تقريباً في كل مكان فنحصل على المبرهنة (٣.١) $[23]$ وذلك من أجل h,d_i دوال مستمرة على $[0,T]$.

الاستنتاجات:

في هذا العمل تم حل معادلة تفاضلية كسرية عامة من نمط أتانغانا−باليانو وبأمثال متغيرة بطريقة تحليلية تعتمد على إيجاد دالة حل صريحة، وقمنا باستخدام نظرية النقطة الثابتة باناخ لإثبات وجود ووحدانية الحلول لهذه المعادلات.

أيضاً تم استخدام طريقة التقريبات المتتالية لإيجاد الحل المطلوب بصيغة متسلسلة لانهائية متقاربة بشكل منتظم.

المقترحات والتوصيات:

١. تطوير طريقة الحل التي تسمح لنا بإيجاد الحلول القابلة للتطبيق في مجالات مختلفة تتضمن مؤثرات لأجل معادلات تفاضلية كسرية من صنف AB ، وتعميم هذا العمل باستخدام مؤثرات برابهاكار المعممة $[6]$

٢. تمديد هذا العمل بشروط كوشي وضمن شروط معينة أخرى في فضاءات باناخ.

المراجع العلمية

[1] A. Atangana, D. Baleanu, *New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: theory and application to heat transfer model*, Therm. Sci. 20 (2) (2016) 763–769.

[2] D. Baleanu, A. Fernandez, *On some new properties of fractional derivatives with Mittag-Leffler kernel, Commun*. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 59 (2018) 444–462.

[3] E. Bas, B. Acay, R. O¨ zarslan, *Fractional models with singular and non-singular kernels for energy efficient buildings*, Chaos 29 (2) (2019) 023110.

[4] A. Carpinteri, F. Mainardi (Eds.*), Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, Springer, New York, 1997.

[٥] K.Diethelm,*The analysis of fractional differential equations:An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type*,Springer,Heidelberg,2010.

[6] A.Fernandez,D.Baleanu,*Classes of Operators in Fractional Calculus:A Case Study,Math.* Meth.Appl.Sci.44 (11) (2021) 9143–9162.

[7] R.Gorenflo,A.A.Kilbas,F.Mainardi,S.V.Rogosin.Mittag– Leffler Functions,Related *Topics and Applications.Springer Monographs in Mathematics,Sp*ringer,New York (2014).

[8] R.Hilfer(Ed.),*Applications of Fractional Calculus in Physics*,World Scientific,Singapore, 2000.

[9] A.Jajarmi,S.Arshad,D.Baleanu,*A new fractional modelling and control strategy for the outbreak of dengue fever,* Physica A: Stat. Mech. Appl. 535 (2019) *122524.*

[10] A.Jajarmi,A.Yusuf,D.Baleanu,*M.Inc,A new fractional HRSV model and its optimal control: A non-singular operator approach, Physica A: Stat. Mech. Appl.* 547 (2020) 123860.

[11] A.A.Kilbas,H.M.Srivastava,J.J.Trujillo.*Theory and Applications of Fractional Differential Equations*.NorthHolland Mathematics Studies,vol.204.Elsevier ScienceB.,Amsterdam (2006).

[12] F.Mainardi,*Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity*, Imperial College Press, London, 2010.

[13] I.A.Mirza,M.S.Akram,N.A.Shah,W.Imtiaz,J.D.*Chung,Analytical solutions to the advection-diffusion equation with Atangana-Baleanu time-fractional derivative and a concentrated loading,* Alexandria Eng.J.60(1)(2021)1199–1208.

[14] P.A.Naik,M.Yavuz,J.Zu,Th*e role of prostitution on HIV transmission with memory: A modeling approach*, Alexandria Eng.J.59(4)(2020)2513–2531.

[15] K.B.Oldham,J.Spanier,*The Fractional Calculus,Academic Press*,New York,1974.

[16] I.Podlubny,*Fractional Differential Equations*,Academic Press,San Diego, 1999.

[17] C.Ravichandran,K.*Logeswari,F.Jarad,New results on existence in the framework of Atangana-Baleanu derivative for fractional integro-differential equations,*Chaos Solitons Fractals 125 (2019) 194–200.

[18] M.Rivero,L.Rodrı´gez-CiermaJ.J.*Trujillo,Linear fractional differential equations with variable coefficients,*Appl.Math.Lett.21 (2008) 892–897.

[19] K.M.Saad,M.M.Khader,J.F.*Go´mez-Aguilar,D.Baleanu,Numerical solutions of the fractional Fisher's type equations with Atangana-Baleanu fractional derivative by using spectral collocation methods,* Chaos 29 (2) (2019) 023116.

[20] S.G.Samko,A.A.Kilbas,O.I.*Marichev,Fractional integrals and derivatives,*translated from the 1987 Russian original,Gordon and Breach,Yverdon,1993.

[21] V.E.Tarasov,*Fractional dynamics:applications of fractional calculus to dynamics of particles,* fields and media,Springer,New York,2011.

[22] V.V. Uchaikin. *Fractional Derivatives for Physicists and Engineers: Vol. 1. Background and Theory*; Vol 2. Application. Springer, (2013).

[23] A. Fernandez, J.E. Restrepo, D. Suragan*, Linear differential equations with variable coefficients and Mittag-Leffler kernels*. Alexandria Engineering Journal, 2021.

[24] А. Н. КОЛМОГОРОВ, С. В. ФОМИН, *ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА,* ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА», МОСКВА 1968. (A. N. KOLMOGOROV, S. V. FOMIN, ELEMENTS OF THE THEORY OF FUNCTIONS AND FUNCTIONAL ANALYSIS, PUBLISHING HOUSE "SCIENCE", MOSCOW 1968.)