مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٨) العدد (٦) ٢٠٢٤

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (8) No. (6) 2024

دراسة طيف مؤثر خطي غير محدود له مؤثر عكسي متراص

أ.د. ابراهيم ابراهيم *

يزن الحبيب **

(تاريخ الإيداع ٢٠٢٤/٨/٢٨ – تاريخ النشر ٢٠٢٤/١٢/٣١)

□ ملخّص □

تعتبر دراسة النظرية الطيفية للمؤثرات الخطية المتراصة في فضاء هيلبرت سهلة كثيراً مقارنة مع غيرها من المؤثرات ، وخاصة إذا كانت هذه المؤثرات مترافقة ذاتياً . حيث تتألف طيف هذه المؤثرات (المتراصة والمترافقة ذاتياً) من القيم الذاتية فقط ، وبنفس الوقت فإن التوابع الذاتية الموافقة لقيم ذاتية مختلفة متعامدة فيما بينها . لذلك عندما يكون فضاء هيلبرت فصولاً وغير منتهي الأبعاد فإن هذه التوابع الذاتية تشكل قاعدة للفضاء . هذه الخواص محدودة بالمؤثرات الخطية المتراصة والمترافقة ذاتياً. وبناءً على دراسة النظرية الطيفية لها يمكننا دراسة النظرية الطيفية لنوع خاص من المؤثرات غير المحدودة تسمى المؤثرات ذات طيف نقطي بحت (صافي) حيث تمتلك مؤثرات عكسية متراصة . فمن خلال دراسة طيف المؤثر العكسي يمكن دراسة العديد من الخواص الطيفية لها، مثلاً : تحديد مجموعة تعريفها من خلال سلاسل عددية متقاربة تحوي عوامل فورييه ، و إمكانية نشر العناصر بسلسلة فورييه وفق توابعها الذاتية . وهذه الدراسة تسهم في إيجاد بعض حلول المعادلات المؤثراتية . وكتطبيق على هكذا مؤثرات درسنا مؤثر ليجندر التفاضلي الذي توابعه الذاتية هي كثيرات حدود ليجندر المعروفة .

كلمات مفتاحية : فضاء هيلبرت – قيمة ذاتية – مؤثر متراص – مؤثر غير محدود – مؤثر مترافق ذاتياً .

* الأستاذ الدكتور– قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة البعث – حمص – سوريا.

** طالب دراسات عليا (ماجستير) – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة طرطوس – طرطوس – سوريا.

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٨) العدد (٦) ٢٠٢٤

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (8) No. (6) 2024

A study of the spectrum 0f an unbounded linear operator with a compact inverse operator.

Prof: Ibrahem Ibrahem *
Yazan Al Habbib **

(Received 28/8/2024.Accepted 31/12/2024)

□ABSTRACT □

The study of the spectral theory of compact operators is relatively simple in comparing with such study of other operators. Especially , if the compact operators are self -adjoint, their spectrum constitutes of the eigenvalues only . At the same time the eigenfunctions , corresponding different eigenvalues are mutually orthogonal . Hence , if the Hilbert space is infinite dimensional and separable , the eigenfunctions form a basis . This properties are true if the operator is linear , compact and self –adjoint. By using the spectral theory for such operator one can study the spectral theory for an important kind of operators , namely , the operators with a pure point spectrum , because they have a compact inverse. Therefore, by using the spectral theory of compact operators one can study the spectral theory of the last operators, and then determine the domain (of definition) of the operator through determining converging numerical series certain Fourier series with respect to the eigenfunctions. As applications, we can solve operator equations containing such operators. In concret, we studied differential Legendre operator, which has the famous Legendre polynomials as eigenfunctions.

Key words: Hilbert space – eigenvalues – compact operator –unbounded operator – self-adjoint operator.

*** Professor, Department of Mathematics, Faculty of sciences, Al Baath University, Homs, Syria.**
**** postgraduate student (Master), Department of Mathematics, Faculty of science, Tartous university, Tartous, Syria.**

مقدمة:

من المعلوم أن المؤثر الخطي المتراص ليس له مؤثر عكسي محدود. ولكن توجد مؤثرات خطية غير محدودة لها مؤثر عكسي متراص. وبما أن دراسة طيف المؤثر المتراص سهلة نسبياً مقارنة مع غيره [8 , 11 , 12] فيمكن الاستعانة بها لدراسة طيف مؤثر خطي غير محدود و له مؤثر عكسي متراص. من تلك المؤثرات غير المحدودة: المؤثرات التي يتألف طيفها من القيم الذاتية فقط، وتدعى ذات الطيف النقطي البحث.

قبل البدء بالدراسة نعرض المفاهيم التي تلزمنا خلال البحث. للمزيد عنها يمكن الرجوع إلى المراجع [1 , 3 , 5 , 8 ,10] وعن طيف المؤثرات المتراصة [2 , 3 , 6 , 9]، وعن التطبيقات [3 , 6 , 7].

- H يرمز لفضاء هيلبرت فصول وغير منتهي الأبعاد مع الجداء الداخلي $\langle \cdot,\cdot \rangle$ والنظيم $\|\cdot\|$.
- $A : D(A) \longrightarrow H$ مؤثر خطي، حيث مجموعة تعريفه $D(A)$ كثيفة في H.

أهداف البحث و أهميته :

تلعب النظرية الطيفية دوراً هاماً في نظرية المعادلات التكاملية والعديد من المسائل الفيزيائية ، لما لها من تطبيقات فيزيائية عديدة وبالذات في علم ميكانيك الكم و الاقتصاد . يهدف هذا البحث إلى إيجاد التمثيل الطيفي (النشر بسلسلة فورييه وفق التوابع الذاتية للمؤثر) وخصوصاً المؤثرات غير محدودة بالاستفادة من خواص المؤثر العكسي المتراص لها.

منهجية البحث وموارده :

يندرج هذا البحث تحت اختصاص الرياضيات النظرية ، حيث يعتبر هذا البحث من أهم المواضيع التي يدرسها التحليل التابعي. لذلك فإن التقنيات المستخدمة تعتمد بشكل أساسي على الدراسة النظرية لأهم الخواص المؤثرات المتراصة مع الاستفادة من المعلومات المتوفرة في المراجع.

تعاريف ومفاهيم أساسية :

- نقول عن المؤثر A إنه:

(١) محدود: إذا وجد عدد ثابت $c > 0$ بحيث يكون:

$$\|Ax\| \leq c\,\|x\| \quad ; \quad x \in D(A).$$

وخلاف ذلك يكون المؤثر A غير محدود.

(٢) نصف محدود (من الأدنى) إذا وجد عدد ثابت c بحيث يكون:

$$\langle Ax\,,x\rangle \geq c\,\|x\|^2 \quad ; \quad x \in D(A).$$

(٣) موجب محدد (أو موجب تحديداً) إذا كان نصف محدود و $c > 0$.

(٤) نقول عن عدد λ إنه قيمة ذاتية (أو قيمة خاصة) للمؤثر A إذا وجد عنصر $x \in D(A)$ بحيث إن:

$$x \neq O \;\; , \;\; Ax = \lambda\, x\,.$$

في هذه الحالة، يسمى x العنصر (المتجه) الذاتي الموافق للقيمة λ.

يرمز عادة لمجموعة القيم الذاتية بـ $\sigma_p(A)$، وتسمى الطيف النقطي (أو المتقطع).

(٥) إذا كانت λ قيمة ذاتية للمؤثر A فنرمز بـ $N(A-\lambda I)$ للفضاء الذاتي الموافق، وهو يتألف من العناصر الذاتية الموافقة للقيمة λ بالإضافة للصفر O. هنا يرمز I لمؤثر المطابقة.

العدد $\dim\,(N(A-\lambda I))$ يسمى رتبة (أو تضاعف) القيمة الذاتية λ.

(٦) يكون المؤثر A تناظرياً إذا حقق العلاقة:

$$\langle Ax\,,y\rangle = \langle x\,,Ay\rangle \quad ; \quad \forall\, x\,,y \in D(A).$$

(٧) يعرف المؤثر المرافق (الهيلبرتي) A^* للمؤثر A بالعلاقة:

$$\langle Ax\,,y\rangle = \langle x\,,A^*y\rangle \quad ; \quad x \in D(A) \quad , \quad y \in D(A^*)$$

(٨) يكون المؤثر A مترافقاً ذاتياً إذا كان $A^* = A$. في هذه الحالة يكون $D(A^*) = D(A)$.

من الواضح أن كل مؤثر مترافق ذاتياً يكون تناظرياً، لكن العكس غير صحيح في الحالة العامة.

(٩) يكون المؤثر A مغلقاً إذا تحقق مايلي:

من أجل أية متتالية $\{x_n\}$ من عناصر $D(A)$ بحيث:

$$x_n \longrightarrow x \quad , \quad Ax_n \longrightarrow y \quad ; \quad n \longrightarrow \infty \quad ,$$

ينتج أن: $x \in D(A)$ و $Ax = y$.

(١٠) نقول إن المؤثر $B : D(B) \longrightarrow H$ تمديد للمؤثر $A : D(A) \longrightarrow H$ إذا كان:

$$D(B) \supset D(A) \quad , \quad Bx = Ax \quad ; \quad \forall\, x \in D(A).$$

(١١) إن أصغر تمديد مغلق للمؤثر A يسمى غلاقة A ، ويرمز له بـ $\overline{A}$.

(١٢) نقول عن المؤثر المترافق ذاتياً $A : D(A) \longrightarrow H$ إنه ذو طيف نقطي بحت (أو صافي) إذا كان طيفه يحوي فقط القيم الذاتية له، أي: $\sigma(A) = \sigma_p(A)$.

(13) يرمز لفضاء التوابع $f(x)$ المعرفة والقيوسة حسب لبيغ على المجال $[a\,,b]$والكمولة تربيعياً بالرمز $L_2[a\,,b]$، أي التي تحقق: $\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$ (تكامل لبيغ).

وهو فضاء هيلبرت مع الجداء الداخلي:

$$\langle f\,,g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx \quad ; \quad f\,,g \in L_2[a\,,b].$$ ،

والنظيم المعرف على هذا الفضاء بالشكل : $\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

النتائج والمناقشة :

1–المؤثرات ذات الطيف النقطي البحت (الصافي)

نرمز بـ $\sigma(A)$ لطيف المؤثر A، وهو مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$، ويتألف من ثلاث مجموعات منفصلة مثنى مثنى هي:

الطيف النقطي $\sigma_p(A)$ المذكور في (٤) من المقدمة،

الطيف المستمر $\sigma_c(A)$ والطيف الباقي $\sigma_r(A)$.

أي أن: $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$.

تسمى المجموعة المتممة للطيف، أي: $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ ، بالمجموعة الحلالة للمؤثر A، وهي مجموعة الأعداد العقدية λ التي تجعل المؤثر العكسي $(A - \lambda\, I)^{-1}$ موجوداً ومحدوداً ومجموعة تعريفه كثيفة في H، وهذا الأخير يدعى المؤثر الحلَّال.

فيما يلي نعتبر أن المؤثر A مترافق ذاتياً، لذلك يكون الطيف الباقي له $\sigma_r(A) = \phi$ وبالتالي نجد أن:

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A)$$.

والآن نستعرض اهم القضايا التي تلزم خلال البحث.

1-1 مبرهنة (هيلبرت – شميدت): [5]

ليكن $A:H\to H$ مؤثراً متراصاً ومترافقاً ذاتياً، له القيم الذاتية $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ وموافقة للعناصر الذاتية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. عندئذ:

(١) العناصر الذاتية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ تشكل قاعدة منظمة متعامدة في H.

(٢) من أجل كل $x\in H$

يصح التمثيل:

$$Ax=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\langle x,x_n\rangle x_n .$$

(٣) من أجل كل عنصر مفروض $y\in H$ وأي عدد $\lambda\in\rho(A)$ يوجد للمعادلة:

$$(A-\lambda I)x=y$$

حل وحيد ، له الشكل:

$$x=(A-\lambda I)^{-1}y=\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n-\lambda)^{-1}\langle x,x_n\rangle x_n .$$

2-1 مبرهنة :

إذا كان المؤثر A متراصاً والمؤثر B محدوداً فيكون كل من المؤثرين AB و BA متراصاً.

الإثبات :

لتكن M مجموعة جزئية من الفضاء X محدودة، وبما أن المؤثر B محدود فتكون المجموعة $B(M)$ محدودة. وبما أن المؤثر A متراص فتكون المجموعة $A(B(M))$ متراصة نسبياً .

وبما أن $A\big(B(M)\big)=AB(M)$ فالمؤثر AB متراص.

لإثبات أن المؤثر BA متراص نأخذ أية متتالية $\{x_n\}$ محدودة في X. عندئذٍ توجد متتالية جزئية $\{x_{n_k}\}$ بحيث تكون $\{Ax_{n_k}\}$ متقاربة. وبما أن B مؤثر خطي محدود فهو مستمر. لذلك تكون المتتالية $\{BAx_{n_k}\}$ متقاربة، وبالتالي BA متراص. بذلك يتم المطلوب.

1-1 نتيجة :

إذا كان المؤثر A متراصاً فتكون المؤثرات التالية متراصة :

$$A^2=AA\quad,\quad A^3=AA^2\quad,\quad A^n=AA^{n-1}$$

حيث إن كل مؤثر متراص يكون محدوداً .

2-1 نتيجة:

إذا كان المؤثر الخطي $A:H\to H$ متراصاً ومترافقاً ذاتياً فيكون لدينا من أجل $m=1,2,\ldots$:

$$A^m x=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^m\langle x,x_n\rangle x_n\qquad;\qquad x\in H .$$

وينتج ذلك مباشرة من المبرهنة السابقة وملاحظة أن:

$$A^2x_n=A\left(Ax_n\right)=A\left(\lambda_n x_n\right)=\lambda_n Ax_n=\lambda_n^2x_n\ ,$$
$$A^3x_n=A\left(A^2x_n\right)=A\left(\lambda_n^2x_n\right)=\lambda_n^3x_n\ ,$$

وهكذا من أجل A^4 و A^5 و.... هنا يمكن التحقق بسهولة أن A^m مؤثرات متراصة ومترافقة ذاتياً . المبرهنة التالية تعطينا العلاقة بين القيم الذاتية لمؤثر غير محدود و معكوسه المتراص.

1-3 مبرهنة : [5]

ليكن $A : D(A) \to H$ مؤثراً خطياً مترافقاً ذاتياً وغير محدود وله مؤثر عكسي متراص A^{-1}، حيث H فضاء هيلبرت فصول وغير منته الأبعاد. عندئذ:

(١) إذا كانت $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ القيم الذاتية و $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ العناصر الذاتية للمؤثر A^{-1}، فيكون $\mu_n \neq 0$ من أجل $n = 1, 2, ...$ ، كما أن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ تشكل جملة متعامدة منظمة (قاعدة) في H.

(٢) تكون القيم الذاتية للمؤثر A هي $\left\{\lambda_n = \dfrac{1}{\mu_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ وموافقة للعناصر الذاتية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(٣) يتألف الطيف $\sigma(A)$ من القيم الذاتية $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ فقط، كما أن $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty$.

الإثبات:

بما أن المؤثر A مترافق ذاتياً بالفرض فيكون:

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} = A^{-1}.$$

أي أن A^{-1} مترافق ذاتياً ، ويكون:

$$R(A) = D(A^{-1}) \quad , \quad D(A) = R(A^{-1}).$$

إذا كانت μ قيمة ذاتية للمؤثر A^{-1} فيوجد عنصر $u \neq 0$ بحيث أن $A^{-1}u = \mu u$.

بتطبيق A على الطرفين نجد $u = \mu Au$.

بشكل مشابه: من $Au = \lambda u$ ينتج $u = \lambda A^{-1} u$. من ذلك ينتج أن العدد 0 لا يمكن أن يكون قيمة ذاتية للمؤثر A^{-1} كما ينتج أيضاً أن u عنصر ذاتي للمؤثر A^{-1} (موافق للقيمة الذاتية μ) إذا وفقط إذا كان u عنصراً ذاتياً للمؤثر A (موافقاً للقيمة الذاتية $\lambda = \mu^{-1}$).

بحسب مبرهنة هيلبرت – شميدت (١-١) فإن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ تشكل قاعدة في H.

لنبين الآن أن $\sigma(A) = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$.

واضح أن $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \sigma(A)$، ولنثبت الاحتواء المعاكس. وهنا يكفي إثبات أنه من $\lambda^{-1} \in \rho(A^{-1})$ ينتج $\lambda \in \rho(A)$.

لنعتبر أن $\lambda^{-1} \in \rho(A^{-1})$. هذا يعني $(A^{-1} - \lambda^{-1} I)^{-1}$ موجود ومحدود، ولنبين أن $(A - \lambda I)$ متباين. في الواقع لو كان الأمر غير ذلك لكانت λ قيمة ذاتية للمؤثر A، وبالتالي يوجد عنصر $v \neq O$ بحيث أن $Av = \lambda v$ ، وبالتالي تكون λ^{-1} قيمة ذاتية للمؤثر A^{-1} ، وهذا يناقض الفرض.

بما أن $R(A^{-1}) = D(A)$ فيكون لدينا من أجل $y \in H$:

$$y=(A^{-1}-\lambda^{-1}I)(A^{-1}-\lambda^{-1}I)^{-1}y=(\lambda I-A)\lambda^{-1}A^{-1}(A^{-1}-\lambda^{-1}I)^{-1}y. \quad (1)$$

وهذا يعني أن $(\lambda I-A)$ غامر، فهو تقابل. لذلك $\lambda\in\rho(A)$. بذلك يكون $\sigma(A)=\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$.

وبما أن $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n=0$ فينتج أن $\lim\limits_{n\to\infty}|\lambda_n|=\infty$. ومن العلاقة (1) نجد:

$$(A-\lambda I)^{-1}=\lambda^{-1}A^{-1}(A^{-1}-\lambda^{-1}I)^{-1}.$$

يمكن الاستفادة من المبرهنة السابقة لدراسة الخواص الطيفية للعديد من المؤثرات المترافقة ذاتياً وغير المحدودة.

4-1 مبرهنة: [10]

ليكن $A:D(A)\to H$ مؤثراً تناظرياً وموجباً محدداً، له القيم الذاتية $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ الموافقة للعناصر الذاتية (المتعامدة المنظمة) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$، عندئذ:

(١) إذا أمكن ترتيب القيم الذاتية $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ (مع مراعاة رتبة تضاعفها) بالشكل:

$$0<\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n\le\cdots\ ;\ \lambda_n\to\infty, n\to\infty,$$

وكانت الجملة $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ تامة، فيوجد للمؤثر A غلاقة $\overline{A}$ عبارة عن مؤثر مترافق ذاتياً وذو طيف نقطي بحت.

(٢) الطيف النقطي $\sigma_p(\overline{A})$ للمؤثر $\overline{A}$ يتألف من القيم الذاتية $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(٣) العناصر الذاتية للمؤثر $\overline{A}$ هي $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$، ولا يوجد أية عناصر ذاتية أخرى.

5-1 مبرهنة: [10]

إذا كان $A:D(A)\to H$ مؤثراً ذو طيف نقطي بحت فيكون عندئذ:

(١) A مؤثر غير محدود.

(٢) يمكن ترتيب القيم الذاتية للمؤثر A بحسب كبر قيمها المطلقة مع مراعاة رتبة تضاعفها.

(٣) إذا كانت $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ القيم الذاتية للمؤثر A و $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ العناصر الذاتية الموافقة (المتعامدة المنظمة) فإن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ تشكل جملة متعامدة منظمة في H، كما أن $|\lambda_n|\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$.

(٤) يكون أيضاً:

$$(1)\qquad D(A)=\left\{x\in H:\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2\left|\langle x,x_n\rangle\right|^2<\infty\right\},$$

$$(2)\qquad Ax=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\langle x,x_n\rangle x_n\quad ;\quad x\in D(A).$$

1-3 نتيجة :

ليكن $A: D(A) \to H$ مؤثراً خطياً مترافقاً ذاتياً وغير محدود وله مؤثر عكسي متراص A^{-1}، حيث H فضاء هيلبرت فصول وغير منته الأبعاد. حسب المبرهنة (١-٣) : إذا كانت $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ القيم الذاتية و $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ العناصر الذاتية للمؤثر A^{-1}، فيكون $\mu_n \neq 0$ من أجل $n = 1, 2, \ldots$ ، كما أن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ تشكل جملة متعامدة منظمة (قاعدة) في H. و تكون القيم الذاتية للمؤثر A هي $\left\{\lambda_n = \dfrac{1}{\mu_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ وموافقة للعناصر الذاتية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.(أي أن المؤثر ذو طيف نقطي بحت).عندئذ

$$A^{-m}\,\mathrm{x} = \sum_{n=1}^{\infty} {\lambda_n}^{-m} \langle x, x_n \rangle x_n \quad ; \quad x \in H \quad ; \quad m = 1,2,3,4, \ldots$$

2- مؤثر ليجندر التفاضلي

كتطبيق على ما تقدم ندرس مؤثر ليجندر التفاضلي في فضاء هيلبرت$[-1\,,+1]$ L_2 ، ونحل بعض المعادلات المؤثراتية، حيث يكون الحل بشكل سلسلة وفق كثيرات حدود ليجندر.

في البداية نذكر لمحة عن كثيرات حدود ليجندر، يرمز لها بـ $p_n(x)$ ، حيث يمكن الحصول عليها بتطبيق مبرهنة جرام – شميت، انطلاقاً من التوابع:

$$1, x, x^2, \cdots, x^n, \cdots$$

مع الجداء الداخلي $\langle f\,, g\rangle = \int_{-1}^{+1} f(x)g(x)dx$. ويمكن أن تكتب بصيغة رودريج بالشكل:

$$p_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,\frac{1}{2^n\, n!}\,\frac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^n] \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

إن الدوال $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ تشكل جملة متعامدة منظمة وتامة في فضاء هيلبرت$[-1\,,+1]$ L_2، ينتج ذلك من مبرهنة جرام – شميت، ويمكن إثبات ذلك مباشرة، كما هو الحال في [4 , 1] .

بعد قليل سندرس طيف مؤثر ليجندر التفاضلي، سنرمز له بـ L ، ونبين أن $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ هي الدوال الذاتية له. من أجل ذلك نحتاج لمجموعة تعريف مناسبة لهذا المؤثر. وهنا سنأخذ $D(L)$ على أنها المجموعة $\widetilde{C^{\infty}}[-1\,,+1]$ المؤلفة من التوابع $f(x)$ المعرفة والقابلة للاشتقاق عدداً لانهائياً من المرات على المجال $(-1\,,+1)$ والتي لها وجميع مشتقاتها تمديداً مستمراً على المجال $[-1\,,+1]$.

والآن نعرف مؤثر ليجندر بالشكل:

$$L : D(L) \longrightarrow L_2[-1\,,+1]$$

حيث:

$$\begin{aligned}(Lf)(x) &= -(1-x^2)f''(x) + 2xf'(x) + f(x)\\ &= -\left((1-x^2)f'(x)\right)' + f(x) \qquad ; \quad f \in D(L) = \widetilde{C^{\infty}}[-1\,,+1]\end{aligned}$$

وندرس خواص هذا المؤثر من خلال المبرهنة التالية:

2-١ مبرهنة:

ليكن L المؤثر المذكور أعلاه وغلاقته $\overline{L}$ مؤثر مترافق ذاتياً وذو طيف نقطي بحت عندئذ يكون L تناظري وموجب محدد وله القيم الذاتية:

$$\lambda_n = n(n+1)+1 \quad ; \quad n = 0,1,2,\cdots.$$

والتوابع الذاتية الموافقة هي $p_n(x)$.

وأن جميع القيم الذاتية بسيطة، ولا يوجد توابع ذاتية أخرى سوى $p_n(x)$.

الإثبات:

يمكن الإثبات بطريقتين: الأولى بشكل مباشر، والثانية بالاعتماد على المبرهنة (١-١).

الطريقة الأولى: من أجل أي تابعين $f\,,g \in D(L)$ يكون لدينا بالتكامل بالتجزئة (مع ملاحظة أن $(1-x^2)=0$ عندما $x=\mp 1$):

$$-\int_{-1}^{+1}\left((1-x^2)f'(x)\right)'\,\overline{g(x)}dx = \int_{-1}^{+1}(1-x^2)f'(x)\,\overline{g'(x)}dx$$
$$= \int_{-1}^{+1} f(x)\,\overline{\left[-\left((1-x^2)g'(x)\right)'\right]}\,dx\,.$$

بناءً على ذلك يكون:

$$\langle Lf\,,g\rangle = -\int_{-1}^{+1}\left((1-x^2)f'(x)\right)'\,\overline{g(x)}dx + \int_{-1}^{+1} f(x)\,\overline{g(x)}dx$$
$$= \int_{-1}^{+1} f(x)\,\overline{\left[-\left((1-x^2)g'(x)\right)'\right]}\,dx + \int_{-1}^{+1} f(x)\,\overline{g(x)}dx$$
$$= \langle f\,,L\,g\rangle \quad ; \quad f\,,g \in D(L).$$

أي أن المؤثر L تناظري.

من أجل $f = g$ يكون لدينا:

$$\langle Lf\,,f\rangle = \int_{-1}^{+1}(1-x^2)|f'(x)|^2\,dx + \int_{-1}^{+1}|f(x)|^2\,dx \geq \|f\|^2\,.$$

وهذا يعني أن المؤثر L موجب محدد.

والآن نوجد القيم الذاتية.

بما أن $p_n(x)$ كثيرة حدود من الدرجة n فيكون $L\,p_n(x)$ كثيرة حدود من الدرجة n أيضاً. لذلك يصح التمثيل التالي (بحسب مبرهنة جرام – شميدت):

$$L\,p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j\,p_j(x)$$

ولنحسب الأعداد a_j . هنا، وللسهولة نأخذ $p_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^n]$ ، وهذا الأمر ممكن (حسب الخاصة: بفرض u عنصراً ذاتياً موافقاً للقيمة الذاتية λ فيكون αu $(\alpha \neq 0)$ عنصراً ذاتياً موافقاً لنفس القيمة λ).

بما أن $p_n(x)$ كثيرة حدود من الدرجة n فيمكن كتابته بالشكل:

$$p_n(x) = b_n x^n + \sum_{j=0}^{n-1} b_j\,x^j\,.$$

لذلك يكون:

$$-\left((1-x^2)p_n{}'(x)\right)' = (x^2 n x^{n-1})' b_n + \sum_{j=0}^{n-1} j\, b_j\, x^j$$
$$= b_n n(n+1)x^n + \sum_{j=0}^{n-1} b^*{}_j\, x^j . \qquad b^*{}_j = j\, b_j$$

وهكذا يكون:

$$L\, p_n(x) = -\left((1-x^2)p_n{}'(x)\right)' + p_n(x)$$
$$= [n(n+1)+1]p_n(x)$$

أي أن القيم الذاتية هي:

$$\lambda_n = n(n+1)+1 \quad ; \quad n = 0,1,2,\cdots.$$

والتوابع الذاتية الموافقة هي $p_n(x)$.

ما تبقى ينتج من المبرهنة السابقة (١-٤).

الطريقة الثانية: بالاعتماد على المبرهنتين (١-٤) و (١-٣) يكفي إثبات أن المؤثر $\overline{L}$ له مؤثر عكسي متراص.

بما أن المؤثر $\overline{L}$ مترافق ذاتياً، فتوجد أسرة طيفية $\{E_\lambda : -\infty < \lambda < +\infty\}$ بحيث يمكن تمثيل $\overline{L}$ بالشكل:

$$\overline{L}x = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE_\lambda x \quad ; \quad x \in D\left(\overline{L}\right),$$
$$D\left(\overline{L}\right) = \left\{ x \in H : \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d\left\|E_\lambda x\right\|^2 < \infty \right\}.$$

كما يمكن تشكيل المؤثر الطيفي $\varphi(\overline{L})$ ، حيث $\varphi(\lambda)$ تابع معرف ومستمر على $\mathbf{R}$ باستثناء عدد منته من نقاط الانقطاع من النوع الأول:

$$\varphi(\overline{L})f = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\varphi(\lambda)\right|^2 d\left\|E_\lambda f\right\|^2 < \infty \quad ; \quad f \in D\left(\varphi(\overline{L})\right),$$
$$D\left(\varphi(\overline{L})\right) = \left\{ f \in L_2[a,b] : \int_{-\infty}^{\infty} \left|\varphi(\lambda)\right|^2 d\left\|E_\lambda f\right\|^2 < \infty \right\}.$$

نأخذ الآن:

$$\varphi(\lambda) = \begin{cases} 0 & ; \quad -\infty < \lambda < 1 \\ \lambda^{-1} & ; \quad 1 \le \lambda < \infty \end{cases}$$

فيكون لدينا:

$$\overline{L}\,\varphi\left(\overline{L}\right) = I \quad , \quad D\left(\varphi(\overline{L})\right) = L_2[a,b].$$

وبذلك يكون:

$$\overline{L}^{-1} f = \varphi(\overline{L}) f = \int_{[1,\infty)} \lambda^{-1} dE_\lambda \, f = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} \langle f, p_n \rangle p_n \quad ; \quad f \in D\left(\overline{L}^{-1}\right).$$

وإضافة لذلك:

$$\left\| \overline{L}^{-1} f \right\|^2 \le \sum_{n=1}^{\infty} \left| \langle f, p_n \rangle \right|^2 = \| f \|^2 .$$

وبذلك يكون: $\left\| \overline{L}^{-1} \right\| \le 1$.

والآن نعرف المؤثرات $A_N^{-1} : H \to H$ بالشكل:

$$\overline{L}_N^{-1} f = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n^{-1} \langle f, p_n \rangle p_n \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots$$

فنجد أن هذه المؤثرات متراصة لأن $R(\overline{L}_N^{-1}) \le N$ ، ويكون لدينا:

$$\left\| \overline{L}^{-1} - \overline{L}_N^{-1} \right\| = \sup_{\|f\|=1} \left\| \left(\overline{L}^{-1} - \overline{L}_N^{-1} \right) f \right\|$$

$$= \sup_{\|f\|=1} \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n^{-2} \left| \langle f, p_n \rangle \right|^2$$

$$\le \sup_{\|f\|=1} \lambda_{N+!}^{-2} \| f \|^2 \le \lambda_{N+1}^{-2} \xrightarrow[N \to \infty]{} 0.$$

من ذلك نجد أن متتالية المؤثرات $\{\overline{L}_N^{-1}\}$ متقاربة في فضاء المؤثرات الخطية المحدودة من المؤثر $\overline{L}^{-1}$.

وبما أن مجموعة المؤثرات المتراصة مغلقة فيكون المؤثر $\overline{L}^{-1}$ متراصاً.

ملاحظة 1:

تعطى عوامل فورييه لتابع $f \in L_2[-1,+1]$ وفق كثيرات حدود ليجندر بالشكل:

$$\langle f, p_n \rangle = \int_{-1}^{+1} f(x) p_n(x) dx \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

بحسب المبرهنة (١-٥) يكون :

$$D\left(\overline{L}\right) = \left\{ f \in L_2[-1,+1] : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \left| \langle f, p_n \rangle \right|^2 < \infty \right\}, \tag{1}$$

$$\overline{L} f = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle f, p_n \rangle p_n(x) \quad ; \quad f \in D\left(\overline{L}\right). \tag{2}$$

من (1) ينتج أن عوامل فورييه لكل تابع $f \in L_2[-1,+1]$ تكون متناقصة بسرعة.

فيما يلي نوجد حلول بعض المعادلات المؤثراتية.

2-2 مبرهنة:

من أجل كل تابع g وكل عدد عقدي λ بحيث $\lambda \neq \lambda_n$ يوجد للمعادلة $(\overline{L} - \lambda I) f = g$ حل وحيد $f \in L_2[-1,+1]$ وله الشكل:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n - \lambda)^{-1} \langle g , p_n \rangle p_n .$$

الإثبات:

بما أن $\lambda \neq \lambda_n$ فإن $\lambda \in \rho(\overline{L})$ ، وبالتالي يكون المؤثر $(\overline{L} - \lambda I)^{-1}$ موجوداً ومحدوداً.

وبحسب المبرهنة (١−١) يكون:

$$f = (\overline{L} - \lambda I)^{-1} g = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n - \lambda)^{-1} \langle g , p_n \rangle p_n .$$

ملاحظة 2 :

يمكن حل مسائل أكثر تعقيداً من قبيل $p(T)f = g$ حيث $p(T)$ كثيرة حدود مؤثراتية.

نعرّف القوى الصحيحة للمؤثر $\bar{L}$ بالشكل:

$$\bar{L}^0 = I \text{ (مؤثر المطابقة)} , \ \bar{L}^1 = \bar{L} \ , \ \bar{L}^m = \bar{L}(\bar{L}^{m-1}) \ ; \ m = 2,3, \ldots$$

فنجد أنّ:

$$D(\bar{L}^m) = \left\{ f \in L_2 [-1 , +1] : \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{2m} |\langle f, p_n \rangle|^2 < \infty \right\} \ ; \ m = 0,1,2, \ldots$$

كما أنّ:

$$\bar{L}^m f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^m \langle f, p_n \rangle p_n(x) \quad ; \quad f \in D(\bar{L}^m).$$

والآن: من أجل كثيرة حدود جبرية من الدرجة m :

$$p(t) = a_m t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \cdots + a_1 t + a_0$$

نعرّف كثيرة الحدود المؤثراتية $P(\bar{L})$ بالشكل:

$$P(\bar{L}) = a_m \bar{L}^m + a_{m-1} \bar{L}^{m-1} + \cdots + a_1 \bar{L} + a_0 I.$$

فنحصل على السلسلة:

$$P(\bar{L}) f = \sum_{n=0}^{\infty} P(\lambda_n) \langle f, p_n \rangle p_n \quad ; \quad f \in D(P(A)).$$

و إذا أردنا حل المعادلة $P(A)f = g$ حيث g تابع معطى (و f مطلوب) فيكون لدينا:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(\lambda_n) \langle f, p_n \rangle p_n = \sum_{n=0}^{\infty} \langle g, p_n \rangle p_n .$$

وهنا نميز الحالات الآتية:

(١) إذا كان $P(\lambda_n) \neq 0$ من أجل $n = 0,1,2,..$ يكون للمسألة حل وحيد هو:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle g, p_n \rangle}{P(\lambda_n)} p_n$$

(١) إذا كان $P(\lambda_n) = 0$ من أجل بعض قيم n ، مثلاً: $n = n_1, n_2, .., n_{j_0}$ فيكون للمسألة حل إذا وفقط إذا كان $\langle g, p_n \rangle = 0$ من أجل $n = n_1, n_2, .., n_{j_0}$. فإن تحقق ذلك نحصل على الحل الخاص:

$$f_s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle g, p_n \rangle}{P(\lambda_n)} p_n \;\; ; \;\; n \neq n_1, n_2, .., n_{j_0}$$

وهذا الحل ليس وحيداً، حيث يمكن إضافة أي حل متمم من الشكل:

$$f_c = \sum_{i=1}^{j_0} b_i p_i \;\; ; \;\; b_i \in \mathbb{C}$$

ويكون الحل العام للمسألة هو:

$$f = f_s + f_c .$$

طبعاً يمكن حل العديد من المسائل الأخرى، ولكن نكتفي بما ذكر أعلاه.

النتائج والتوصيات :

- درسنا في هذا البحث النظرية الطيفية للمؤثرات ذات الطيف النقطي البحت (الصافي) وهذه المؤثرات غير محدودة ولكن تملك مؤثراً عكسياً متراصاً وطيفها يتألف من القيم الذاتية فقط .
- درسنا طيف مؤثر ليجندر التفاضلي في فضاء هيلبرت $L_2[-1\,,+1]$ مع العلم أنه مؤثر غير محدود ولكنه يملك مؤثراً عكسياً متراصاً . وبالاعتماد على النظرية الطيفية للمؤثرات ذات الطيف النقطي البحت أثبتنا أن جميع القيم الذاتية لمؤثر ليجندر التفاضلي بسيطة ولا يوجد توابع ذاتية له سوى كثيرات حدود ليجندر المعروفة .
- وجدنا حلول بعض المعادلات المؤثراتية وذلك في فضاء هيلبرت

ونوصي بمتابعة البحث في هذا المجال للإجابة عن التساؤلات التالية :

❖ كيف يمكن توسيع هذه الدراسة الطيفية لمؤثرات غير محدودة في فضاء هيلبرت إلى فضاء باناخ بشكل عام ؟

❖ كيف يمكن دراسة طيف مؤثر ليجندر التفاضلي في فضاء باناخ $L_p[-1\,,+1]$ من أجل $p \neq 2$ ؟

. (مع العلم أن $L_p[-1\,,+1]$ ليس فضاء جداء داخلي)

❖ كيف نحل معادلات مؤثراتية في فضاء باناخ مثل التي درسناها في فضاء هيلبرت ؟

المراجع

[1] W. W. Bell. (1968). *Special Functions for Scientists and Engineering.* D. VAN NOSTRAND Company Ltd.

[2] M. Dabkowski. (2022). *On the Numerical Range of Compact Operators.* A Thesis presented to the Faculty of California Polytechnic State University, San Luis Obispo.

[3] A. J. Daddy. (2011). *Spectral Theory of Compact Linear Operators and Applications*. A Thesis submitted to the African University of Science and Technology Abuja-Nigeria.

[4] J. R. Higgeins. (1977). *Completeness and Basis Properties of Sets of Special Functions.* Campridge University Press.

[5] V. Hutson ; J. S. Pym. (1980*). Application of Functional Analysis and Operator Theory*. Academic Press.

[6] E. Kreyszig. (1989). *Introductory Functional Analysis with Applications.* John Wiley & Sons.

[7] B. Luttikhuizen. (2019). *The Numerical Range of Linear Operators on Hilbert Spaces.* University of Groningen. Mathematics and Applied Mathematics.

[8] R. Melrose. (2020). F*unctional Analysis (Lecture notes).* MIT Cambridge University.

[9] J. Nielsen . (2017*). An Introduction to Compact Operators.* Lakehead University, Thunder Bay, Ontario.

[10] H. Triebel. . (1992) . *Higher Analysis*. John Ambrosius Barth. Leipzig, Berlin.

[11] J. E. Osborn. *Spectral Approximation for compact operators*. Mathematics of Computation, Vol. (29), Nr. 131, pp. 712- 625

[12] H. F. Weinberger. (1974). *Variational methods of Eigenvalue Approximation*. SIAM.