مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٨) العدد (١) ٢٠٢٤
Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (8) No. (1) 2024

الفضاءات anti–تبولوجية والتوابع بينها

د.عدنان ظريف*
د.أحمد كنج**
حنين خربوطلي***

(تاريخ الإيداع ٦/١١/ ٢٠٢٣ – تاريخ النشر ٢١/١/ ٢٠٢٤)

□ ملخّص □

قُدمت الفضاءات anti–تبولوجية من قبل Şahin، Kargın وYücel . ثم دُرِست مفاهيم الداخلية واللصاقة في هذه الفضاءات من قبل Witczak وآخرون، وكذلك درست التوابع المستمرة بينها. وقد تابعنا الدراسة فيها وعرفنا أنماطاً جديدة من التوابع مثل التوابع المفتوحة والتوابع المغلقة والهوميومورفيزم بين الفضاءات anti–تبولوجية ودرسنا أهم خواصها.

الكلمات المفتاحية : فضاء anti–تبولوجي، تابع anti–مستمر، تابع anti–مفتوح، تابع anti–مغلق، anti–هوميومورفيزم.

*أستاذ دكتور – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.
**مدرس – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية. a.kinj@tishreen.edu.sy.
*** طالبة دراسات عليا (ماجستير) – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (8) العدد (1) 2024

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (8) No. (1) 2024

Anti- topological spaces and the functions between them

Dr. Adnan Zarif*
Dr. Ahmed Kinj**
Haneen Kharboutli***

(Received 6/11/2023.Accepted 21/1/2024)

□ABSTRACT □

Anti-topological spaces introduced by Şahin, Kargın and Yücel. Then, the notions of interior and closure in these spaces have been studied by Witczak and others, the continuous functions between these spaces have also been studied, and we have continued studying on them and defined new types of functions, like open functions, closed functions, and homeomorphism between anti-topological spaces , and studied the most important properties in these functions.

Key words: Anti-topological space, anti-continuous function, anti-open function, anti-close function, anti- homeomorphism.

* Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.
* Assistant Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria, a.kinj@tishreen.edu.sy
*** Master student, Department of Mathematics, Faculty of sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.

مقدمة:

انطلاقاً من أهمية الفضاء التبولوجي كان العمل على تعميمه وتقليل شروطه غزيراً لذا تمَّ تعريف بنى رياضية تعممّه، مثل:

البنية الضعيفة Weak structure [6] ، البنية الأصغرية Minimal structure [10]، التبولوجيا المعممة Generalized topology [5]، البنى الضعيفة المعممة Generalized weak structures [2]، الفضاءات supra–تبولوجية Supratopological spaces [9]، والفضاءات infra–تبولوجية Infratopological spaces [3].

عالج العديد من الباحثين مختلف المفاهيم والقضايا التبولوجية على مدى العقود الثلاثة الماضية (المجموعات المفتوحة والمغلقة، الداخلية، اللصاقة، الكثافة ،التراص،..) في الفضاءات التبولوجية وتعميماتها، نجد بعضاً من ذلك في [12],[8],[7],[1] .

ويُلاحظ أن البنى السابقة قائمة على التعامل مع المجموعات المغلقة تحت عمليات معينة ، أما مؤخراً فقد التفت العديد من الباحثين إلى التعامل مع المجموعات anti–مغلقة وعليه يعتمد الفضاء الذي سنتناوله في هذه المقالة.

عرّف الباحثون Şahin, Yücel وKargın في عام 2021 [11] بنية جديدة أُطلق عليها الفضاءات anti–تبولوجية (Anti–topological spaces) وقد تابع بعض الباحثون الدراسة في هذه الفضاءات فقد عرّف الباحث Witczak عام 2022 في [14,13] أهم المفاهيم التبولوجية في الفضاء anti–تبولوجي، ودرس الباحثان Bhimraj وJeevan عام 2022 في [4] بعض الخواص في بنية هذه الفضاءات وقدّما تعريف جبهية مجموعة فيها.

أهمية البحث وأهدافه:

نهدف في هذا البحث إلى تعريف بعض المفاهيم والثوابت التبولوجية في الفضاءات anti–تبولوجية ومحاولة دراسة بعض الخواص والقضايا المحققة في هذه الفضاءات، وهذا ما يساهم في إغناء الدراسة عن هذه البنية ويتيح متابعة الحصول على نتائج علمية في هذا المجال.

طرائق البحث ومواده:

البحث يقع ضمن اختصاص الرياضيات النظرية و بشكل خاص ضمن نظرية الفضاءات و لذا فإن الطرائق المتبعة فيه نظرية وتعتمد بشكل أساسي على مفاهيم أساسية في نظرية المجموعات والفضاءات التبولوحية.

نورد فيما يلي بعض الرموز و المصطلحات المستخدمة في البحث :

(X, τ) فضاء anti–تبولوجي، τ_{cl} أسرة المجموعات anti–مغلقة في (X, τ) ، aInt(A) داخلية مجموعة A في الفضاءات anti–تبولوجية ، aCl(A) لصاقة مجموعة A في الفضاءات anti–تبولوجية.

تعاريف ومفاهيم أساسية :

تعريف1:[11]

لتكن X مجموعة غير خالية وτ أسرة مجموعات جزئية من X يقال أن (X, τ) فضاء anti–تبولوجي اذا تحققت الشروط التالية:

(1) $\emptyset, X \notin \tau$

(2) أي تقاطع منتهي لعناصر من τ ليس عنصر من τ ، أي: $\forall \{A_i; i \in \{1,2,,n\}\} \subseteq \tau \Rightarrow \bigcap_1^n A_i \notin \tau$

(3) أي اجتماع كيفي لعناصر من τ ليس عنصر من τ، أي: $\forall \{A_i; i \in I\} \subseteq \tau \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A \notin \tau$

تمهيدية1:[14]

ليكن (X, τ) فضاء anti–تبولوجي و $B \in \tau$ و $A \subseteq B$ عندئذٍ $A \notin \tau$

تعريف2:[14]

يقال عن عناصر الأسرة τ أنها مجموعات anti–مفتوحة ومتمماتها مجموعات anti–مغلقة، أي:

$\forall A \in \tau \Rightarrow$ مغلقة anti–مجموعة A^c , مفتوحة anti–مجموعة A

يُرمز لأسرة هذه المجموعات anti–مغلقة بالرمز τ_{cl} .

تمهيدية2:[14]

ليكن (X, τ) فضاء anti–تبولوجي و $A, B \in \tau_{cl}$ بحيث $A \neq B$ عندئذٍ فإن $A \cap B \notin \tau_{cl}$

تمهيدية3:[14]

ليكن (X, τ) فضاء anti–تبولوجي و $\{A_i\}_{i \in J} \subseteq \tau_{cl}$ عندئذٍ $\bigcup_{i \in J} A_i \notin \tau_{cl}$

تعريف3:[14]

ليكن (X, τ) فضاء anti–تبولوجي ولتكن $A \subseteq X$:

تعرف داخلية A في (X, τ) بالعلاقة $aInt(A) = \cup\{U; U \subseteq A \text{ and } U \in \tau\}$

وتعرف لصاقة A في (X, τ) بالعلاقة $aCl(A) = \cap\{F; A \subseteq F \text{ and } F \in \tau_{cl}\}$ مع العلم أن $X = \bigcap \emptyset$

مبرهنة1:[14]

ليكن (X, τ) فضاء anti–تبولوجي ولتكن $A \subseteq X$ عندئذٍ ما يلي صحيح:

1) $aInt(A) \subseteq A$.

2) اذا كان $A \in \tau$ فإنّ $aInt(A) = A$.

3) اذا كان $A \subseteq B$ فإنّ $aInt(A) \subseteq aInt(B)$.

4) $aInt(aInt(A)) = aInt(A)$.

5) $A \subseteq aCl(A)$.

6) اذا كان $A^C \in \tau$ فإنّ $aCl(A) = A$.

7) اذا كان $A \subseteq B$ فإنّ $aCl(A) \subseteq aCl(B)$.

8) aCl(aCl(A)) = aCl(A).

9) $(\mathrm{aInt}(A))^c = \mathrm{aCl}(A^C)$.

10) $\mathrm{aInt}(A^C) = \left(\mathrm{aCl}(A)\right)^C$.

11) $x \in \mathrm{aInt}(A)$ ⟺ يوجد $U \in \tau$ بحيث $U \subseteq A$ $x\in$.

12) $x \in \mathrm{aCl}(A)$ ⟺ $U \cap A \neq \emptyset$ لأجل كل $U\in \tau$ بحيث أن $x \in U$.

مثال1:[14]

ليكن X={1,2,3,4} ولتكن τ={{1,2},{2,3},{3,4}}

عندئذٍ يتضح أن (X, τ) هو فضاء anti–تبولوجي

ويكون $\tau_{cl} = \{\{3,4\},\{1,4\},\{1,2\}\}$

مثال2:[14]

لتكن X=ℕ و $\tau_k=\{T \subset \mathbb{N};\ |T| = k < \infty\}$ حيث $k\in \mathbb{N}^*$ و $|T|$ هو عدد عناصر T

نلاحظ أن(X, τ) هو فضاء anti–تبولوجي لأن:

- $|\phi| = 0\ ,\ |X| = |\mathbb{N}| \neq k \Rightarrow \phi, X \notin \tau_k$
- $\forall A_1, A_2, .., A_n \in \tau \Rightarrow |\bigcap_1^n A_i| = m < k \Rightarrow \bigcap_1^n A_i \notin \tau_k$
- $\forall\{A_i; i \in I\} \subseteq \tau \Rightarrow |\bigcup_{i\in I} A| = m > k \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A \notin \tau$

تعريف4:[14]

ليكن (X,τ) و (Y,δ) فضاءين anti–تبولوجيين، وليكن $f: X \longrightarrow Y$ تابعاً ما،

يقال أن f تابع anti–مستمر اذا وفقط اذا كانت الصورة العكسية لكل مجموعة anti–مفتوحة في (Y,δ) هي مجموعة anti–مفتوحة في (X,τ) أي:

$$\forall H \in \delta \Rightarrow f^{-1}(H) \in \tau$$

تعريف5:[14]

ليكن (X,τ) و (Y,δ) فضاءين anti–تبولوجيين، وليكن $f: X \longrightarrow Y$ تابعاً ما،

يقال أن f تابع anti–مستمر نقطياً Point–Anti–continuous اذا وفقط اذا كان من أجل كل نقطة x من X وكل مجموعة V anti–مفتوحة في (Y,δ) بحيث $f(x) \in V$ يوجد مجموعة U anti–مفتوحة في (X,τ) بحيث $x \in U$ وصورتها $f(U)$ محتواة في V، أي f مستمر نقطياً اذا وفقط اذا تحقق :

$$\forall x \in X,\ \forall V \in \delta; f(x) \in V \Rightarrow \exists U \in \tau\ ; x \in U\ ; f(U) \subseteq V$$

مبرهنة2:[14]

إن كل تابع anti–مستمر هو anti–مستمر نقطياً. أما العكس فهو غير صحيح بصورة عامة.

النتائج والمناقشة:

تمهيدية4:

ليكن (X, τ) و (Y,δ) فضاءين anti–تبولوجيين، وليكن $f: X \longrightarrow Y$ تابعاً ما يحقق أن

$$\forall x \in X,\ \forall V \in \delta; f(x) \in V \Rightarrow x \in f^{-1}(V) \in \tau$$

فإن التابع f anti–مستمر نقطياً.

البرهان: لدينا من الفرض

$$\Rightarrow \forall x \in X,\ \forall V \in \delta; f(x) \in V \Rightarrow x \in f^{-1}(V) \in \tau$$

$$\exists U = f^{-1}(V) \in \tau\ ;\ x \in U\ ,\ f(U) = f\big(f^{-1}(V)\big) \subseteq V$$

ومنه فإن f تابع anti–مستمر نقطياً.

ملاحظة1:

إن عكس التمهيدية السابقة خاطئ، لأنه لو كان f تابع anti–مستمر نقطياً فإن :

$$\forall x \in X,\ \forall V \in \delta; f(x) \in V \ \Rightarrow\ \exists U \in \tau\ \ ; x \in U\ ; f(U) \subseteq V \Rightarrow U \subseteq f^{-1}(V)$$

ولكن $U \in \tau$ اذاً لا يمكن أن تكون $f^{-1}(V) \in \tau$.

تمهيدية5:

ليكن (X, τ) و (Y,δ) فضاءين anti–تبولوجيين، وليكن التابع $f: X \longrightarrow Y$ عندئذٍ تكون العبارتين التاليتين متكافئتين:

(1) الصورة العكسية لكل مجموعة anti–مفتوحة في المستقر هي مجموعة anti–مفتوحة في المنطلق، أي: $\forall H \in \delta\ \Rightarrow f^{-1}(H) \in \tau$

(2) الصورة العكسية لكل مجموعة anti–مغلقة في المستقر هي مجموعة anti–مغلقة في المنطلق، أي:

$$\forall F \in \delta_{cl}\ \Rightarrow f^{-1}(F) \in \tau_{cl}$$

البرهان:

$(1) \Leftarrow (2)$: لتكن F مجموعة anti–مغلقة في المستقر ولنبرهن أن صورتها العكسية هي مجموعة anti–مغلقة في المنطلق أي أن $f^{-1}(F) \in \tau_{cl}$

بحسب (1) .. $F \in \delta_{cl} \Rightarrow Y \backslash F \in \delta \Rightarrow f^{-1}(Y \backslash F) \in \tau$

ولدينا $Y \backslash (Y \backslash F) = F$ اذاً:

$$f^{-1}(F) = f^{-1}\big(Y \backslash (Y \backslash F)\big) = f^{-1}(Y) \backslash f^{-1}(Y \backslash F) = X \backslash f^{-1}(Y \backslash F)\ \in \tau_{cl}$$

وأما الاتجاه المعاكس فيتم بالأسلوب نفسه.

نتيجة1:

يكون f تابعاً anti–مستمراً اذا وفقط اذا كانت الصورة العكسية لكل مجموعة anti–مغلقة في المستقر هي مجموعة anti–مغلقة في المنطلق .

مبرهنة3:

ليكن (X,τ) و (Y,δ) فضاءين anti–تبولوجيين، وليكن $f: X \longrightarrow Y$ تابع anti–مستمر عندئذٍ يتحقق مايلي:

(1) $\forall A\subseteq X : f(\mathrm{aCl}(A)) \subseteq \mathrm{aCl}(f(A))$

(2) $\forall H\subseteq Y : \mathrm{aCl}(f^{-1}(H)) \subseteq f^{-1}(\mathrm{aCl}(H))$

(3) $\forall H\subseteq Y : f^{-1}(\mathrm{aInt}(H)) \subseteq \mathrm{aInt}(f^{-1}(H))$

البرهان:

(1) لنفرض جدلاً أن الاحتواء المطلوب غير محقق عندئذٍ توجد نقطة واحدة على الأقل $x_0 \in \mathrm{aCl}(A)$ بحيث أن $f(x_0) \notin \mathrm{aCl}(f(A))$: وبحسب خواص اللصاقة في الفضاءات anti–تبولوجية $\Leftarrow$

$\exists U \in \delta ; f(x_0) \in U, U \cap f(A) = \emptyset \Rightarrow f^{-1}(U \cap f(A)) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(f(A)) = \emptyset$

وبما أن $A\subseteq f^{-1}(f(A))$ اذاً $f^{-1}(U) \cap A = \emptyset$ .. (*)

ولدينا $f(x_0) \in U \Rightarrow x_0 \in f^{-1}(U)$

وكون f anti–مستمر $\Leftarrow f^{-1}(U) \in \tau$ ومنه ومن (*) نجد أن $x_0 \notin \mathrm{aCl}(A)$ وهذا مناقض للفرض ، بذلك فإن الاحتواء المطلوب محقق.

(2) لنأخذ $x_0 \in \mathrm{aCl}(f^{-1}(H))$

$\Rightarrow f(x_0) \in f(\mathrm{aCl}(f^{-1}(H))) \subseteq \mathrm{aCl}(f(f^{-1}(H))$

وبما أن $f(f^{-1}(H))\subseteq H \Leftarrow \mathrm{aCl}(f(f^{-1}(H)) \subseteq \mathrm{aCl}(H)$ اذاً يصبح :

$f(x_0) \in \mathrm{aCl}(H) \Rightarrow x_0 \in f^{-1}(\mathrm{aCl}(H))$

وبهذا يتم المطلوب

(3) لنفرض جدلاً أن الاحتواء غير محقق عندئذٍ يوجد $x_0 \in aInt(H)$ بحيث أن :

$f^{-1}(x_0) \notin aInt(f^{-1}(H)) \Rightarrow f^{-1}(x_0) \subseteq [aInt(f^{-1}(H))]^c$

$\Rightarrow f^{-1}(x_0) \subseteq \mathrm{aCl}[f^{-1}(H)]^c$

$\Rightarrow f^{-1}(x_0) \subseteq \mathrm{aCl}(f^{-1}(H^C))$

$\Rightarrow x_0 \in f(\mathrm{aCl}(f^{-1}(H^C)) \subseteq \mathrm{aCl}(f(f^{-1}(H^C))$

وبما أن $f(f^{-1}(H^C) \subseteq H^C \Leftarrow \mathrm{aCl}(f(f^{-1}(H^C)) \subseteq \mathrm{aCl}(H^C)$

$\Rightarrow x_0 \in \mathrm{aCl}(H^C)$

$\Rightarrow x_0 \in [aInt(H)]^c$

$\Rightarrow x_0 \notin aInt(H)$

وهذا مناقض للفرض ، بالتالي يتحقق المطلوب .

ملاحظة2:

إن الاحتواء المعاكس في العلاقات الواردة في المبرهنة (3) غير محقق بالضرورة والمثال الآتي يوضح ذلك :

مثال3:

ليكن (X,τ) الفضاء anti–تبولوجي المعرف في المثال (1)

ولنعرف على المجموعة Y={a,b,c,d,e} anti–تبولوجيا δ وفق الصيغة δ={{a,b,c,d},{e}}

ولنعرف التابع $f: X \longrightarrow Y$ وفق الصيغة: $f(1)=$ a, $f(2)=$ b, $f(3)=f(4)=$e

إن التابع f anti–مستمر لأن:

$f^{-1}(\{a,b,c,d\})=\{1,2\}\in \tau$, $f^{-1}(\{e\})=\{3,4\}\in \tau$

❖ لنأخذ المجموعة $A=\{1,4\}$ $\Longleftarrow$ $f(A)=\{a,e\}$ $\Longleftarrow$ aCl$(f(A))$=Y (حيث $\cap \emptyset = Y$)

ومن ناحية أخرى aCl$(A)=A$ $\Longleftarrow$ $f($aCl$(A))=\{a,e\}$

أيَ أن $f\big(\mathrm{aCl}(A)\big) \subset$ aCl$\big(f(A)\big)$ ولكن aCl$\big(f(A)\big) \not\subset f\big(\mathrm{aCl}(A)\big)$

❖ ولنأخذ المجموعة H={a} $\Longleftarrow$ $f^{-1}(H)=\{1\}$ $\Longleftarrow$ aCl$(f^{-1}(H))=\{1\}$

ومن ناحية أخرى aCl(H) ={a,b,c,d} $\Longleftarrow$ $f^{-1}\big(\mathrm{aCl(H)}\big)=\{1,2\}$

أي أن aCl$\big(f^{-1}(H)\big) \subset f^{-1}\big(\mathrm{aCl(H)}\big)$ ولكن $f^{-1}\big(\mathrm{aCl(H)}\big) \not\subset$ aCl$\big(f^{-1}(H)\big)$

❖ ولنأخذ المجموعة F={a,b,e} $\Longleftarrow$ $f^{-1}(F)=\{1,2,3,4\}$ $\Longleftarrow$ aInt$(f^{-1}(F))=\{1,2,3,4\}$

ومن ناحية أخرى aInt(F)={e} $\Longleftarrow$ $f^{-1}\big(\mathrm{aInt(F)}\big)=\{3,4\}$

أي أن $f^{-1}\big(\mathrm{aInt(F)}\big) \subset \mathrm{aInt}\big(f^{-1}(F)\big)$ ولكن $\mathrm{aInt}\big(f^{-1}(F)\big) \not\subset f^{-1}\big(\mathrm{aInt(F)}\big)$

تعريف6:

ليكن (X,τ) و (Y,δ) فضاءين anti–تبولوجيين، وليكن $f: X \longrightarrow Y$ تابعاً ما، يقال أن f تابع anti– مفتوح اذا كانت الصورة المباشرة وفق f لكل مجموعة anti–مفتوحة في المنطلق هي مجموعة anti–مفتوحة في المستقر، أي:

$$\forall A \in \tau \ \Rightarrow \ f(A) \in \delta$$

تعريف7:

ليكن (X,τ) و (Y,δ) فضاءين anti–تبولوجيين، وليكن $f: X \longrightarrow Y$ تابعاً ما، يقال أن f تابع anti– مغلق اذا كانت الصورة المباشرة وفق f لكل مجموعة anti–مغلقة في المنطلق هي مجموعة anti–مغلقة في المستقر، أي:

$$\forall F \in \tau_{cl} \Rightarrow f(F) \in \delta_{cl}$$

مثال4:

لنعرف على المجموعة X={1,2,3,4} anti–تبولوجيا τ وفق الصيغة: τ={{1,2},{2,3},{4}}

وعلى المجموعة Y={a,b} anti–تبولوجيا δ وفق الصيغة: δ={{a},{b}}

ولنعرف التابع $f: X \longrightarrow Y$ وفق الصيغة: $f(1)=f(2)=f(3)=$a , $f(4)=$b

نلاحظ أن : $f(\{1,2\})=f(\{2.3\})$={a} , $f(\{4\})$={b} ، أي أن التابع f anti– مفتوح.

مثال5:

لنعرف على مجموعة الأعداد الحقيقة $\mathbb{R}$ anti–تبولوجيا τ وفق الصيغة τ ={[n,n+1] ; n∈ $\mathbb{Z}$}

$\Rightarrow \tau_{cl}$ ={ $\mathbb{R}\backslash$[n,n+1] ; n∈ $\mathbb{Z}$}

وعلى مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ anti–تبولوجيا δ وفق الصيغة $\delta = \{\{n\};\ n \in \mathbb{Z}\}$

$\Rightarrow\ \delta_{cl} = \{\mathbb{Z}\backslash\{n\};\ n \in \mathbb{Z}\}$

ولنعرف التابع $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ بالعلاقة: $g(x) = E(x)$ التابع الذي يقرن بكل عدد x العدد الصحيح الذي يسبقه مباشرةً، نلاحظ أن : $g(\mathbb{R}\backslash[n,n+1]) = \mathbb{Z}\backslash\{n\}$ ، أي أن التابع g anti– مغلق، لكنه ليس anti– مفتوح لأنه يوجد المجموعة $[n,n+1] \in \tau$ لكن $g([n,n+1]) = \{n,n+1\} \notin \delta$.

مبرهنة4:

ليكن (X,τ) و (Y,δ) فضاءين anti–تبولوجيين، وليكن $f: X \longrightarrow Y$ تقابلاً كيفياً، عندئذٍ :

f تابع anti– مفتوح $\Leftrightarrow$ f تابع anti– مغلق.

البرهان:

($\Longleftarrow$) لنبرهن أن f تابع anti– مغلق ، نأخذ $F \in \tau_{cl}$ ولنبرهن أن $f(F) \in \delta_{cl}$

$F \in \tau_{cl} \Rightarrow X\backslash F \in \tau \Rightarrow f(X\backslash F) \in \delta$ (كون التابع f anti–مفتوح)

وبالاستفادة من كون f تقابل نجد

$f(X)\backslash f(F) \in \delta \Rightarrow Y\backslash f(F) \in \delta \Rightarrow f(F) \in \delta_{cl}$.

ويتم الاتجاه المعاكس بنفس الأسلوب.

مبرهنة5: ليكن (X,τ) و (Y,δ) فضاءين anti–تبولوجيين، وليكن $f: X \longrightarrow Y$ تابع anti– مفتوح ، يتحقق أن:

$\forall A \subseteq X : f(aInt(A)) \subseteq aInt(f(A))$

البرهان:

$\forall x \in f(aInt(A)) \Rightarrow \exists y \in aInt(A)\ ;\ x = f(y)$

وبحسب تعريف الداخلية في الفضاء anti–تبولوجي :

$\exists U \in \tau\ ;\ y \in U \subseteq A \Rightarrow f(y) \in f(U) \subseteq f(A)$

وكون f تابع anti– مفتوح نضع : $f(U) = V \in \delta$ اذاً أصبح : $f(y) = x \in V \subseteq f(A)$

أي أن $x \in aInt(f(A))$ ، بالتالي $f(aInt(A)) \subseteq aInt(f(A))$.

ملاحظة3:

إن الاحتواء المعاكس في المبرهنة (5) غير محقق بالضرورة والمثال الآتي يوضح ذلك:

مثال6:

ليكن الفضاءين anti–تبولوجيين (X,τ) و (Y,δ) والتابع f المعرف في المثال (4) ولتكن المجموعة $A=\{1,4\} \Longleftarrow f(A) = \{a,b\} \Longleftarrow \mathrm{aInt}(f(A)) = \{a,b\}$

من ناحية أخرى $\mathrm{aInt}(A)=\{4\} \Longleftarrow f(\mathrm{aInt}(A)) = \{b\}$

أي أن $f(\mathrm{aInt}(A)) \subset \mathrm{aInt}(f(A))$ ولكن $\mathrm{aInt}(f(A)) \not\subset f(\mathrm{aInt}(A))$

مبرهنة6:

ليكن (X,τ) و (Y,δ) فضاءين anti–تبولوجيين، وليكن $f: X \longrightarrow Y$ تابع غامر وanti– مفتوح عندئذٍ يتحقق أن:

$$f^{-1}(aCl(H)) \subseteq aCl(f^{-1}(H)) \ \forall H \subseteq Y$$

البرهان:

لنفرض جدلاً أن الاحتواء غير محقق عندئذٍ يوجد $x_0 \in aCl(H)$ بحيث أن :

$$f^{-1}(x_0) \not\subseteq aCl(f^{-1}(\mathrm{H})) \Rightarrow \exists a \in f^{-1}(x_0)\ ;\ a \notin aCl(f^{-1}(\mathrm{H}))$$

$$\Rightarrow \exists \mathrm{U} \in \tau\ ;\ a \in \mathrm{U}\ ,\ \mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{H}) = \emptyset$$

وبالاستفادة من كون التابع f غامر

$$\Rightarrow f(\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{H})) = f(U) \cap H = \emptyset\ ..(*)$$

وكون f anti– مفتوح $f(U) \in \delta$ ولدينا $a \in \mathrm{U} \Leftarrow x_0 = f(a) \in f(U)$ ومنه ومن (*) ينتج أن

$x_0 \notin aCl(H)$ لكن هذا يناقض الفرض ومنه يتحقق المطلوب.

ملاحظة4:

إن الاحتواء المعاكس في المبرهنة (6) غير محقق بالضرورة والمثال الآتي يوضح ذلك:

مثال7:

لنعرف على المجموعة $X=\{1,2,3,4,5\}$ anti–تبولوجيا τ وفق الصيغة: $\tau = \{\{1,2\},\{3,4\},\{5\}\}$

وعلى المجموعة $Y=\{a,b,c,d\}$ anti–تبولوجيا δ وفق الصيغة: $\delta = \{\{a,b\},\{a,d\},\{c\}\}$

ولنعرف التابع $f: X \longrightarrow Y$ وفق الصيغة: $f(1) = f(3) = a\ , f(2) = b\ , f(4) = d\ , f(5) = c$

يتضح أن f غامر، وهو anti–مفتوح لأن:

$$f(\{1,2\}) = \{a,b\} \in \delta\ , f(\{3,4\}) = \{a,d\} \in \delta\ , f(\{5\}) = \{c\} \in \delta$$

ولنأخذ المجموعة $H=\{b,c\} \Leftarrow f^{-1}(H) = \{2,5\} \Leftarrow aCl(f^{-1}(H)) = \{1,2,5\}$

من ناحية أخرى $\mathrm{aCl}(H) = \{b,c\} \Leftarrow f^{-1}(\mathrm{aCl}(H)) = \{2,5\}$

أي أن $f^{-1}(\mathrm{aCl}(H)) \subset aCl(f^{-1}(H))$

تعريف8:

ليكن (X,τ) و (Y,δ) فضاءين anti–تبولوجيين، وليكن $f: X \longrightarrow Y$ تابعاً كيفياً يقال أن f anti–هوميومورفيزم اذا حقق الشروط التالية:

1) f تقابل .
2) f anti–مستمر .
3) f^{-1} anti–مستمر .

تعريف9:

ليكن (X,τ) و (Y,δ) فضاءين anti–تبولوجيين، يقال أنهما anti– هوميومورفيان اذا وجد بينهما anti– هوميومورفيزم واحد على الأقل.

مبرهنة7:

ليكن (X,τ) و (Y,δ) فضاءين anti–تبولوجيين، وليكن $f: X \longrightarrow Y$ تقابلاً كيفياً، عندئذٍ العبارات التالية متكافئة:

1) f anti– هوميومورفيزم.

2) f anti–مستمر و anti–مفتوح.

3) f anti–مستمر و anti–مغلق.

البرهان:

$(1 \Leftarrow 2)$ لدينا f anti– هوميومورفيزم فبحسب التعريف فإنه anti–مستمر ولنبرهن أنه anti–مفتوح

لتكن $U \in \tau$ عندئذٍ بالاستفادة من الفرض وكون f^{-1} anti–مستمر فإن $f(U) = (f^{-1})^{-1}(U) \in \delta$.

$(2 \Leftarrow 3)$ لدينا f anti–مستمر و anti–مفتوح وهو تقابل فرضاً فحسب المبرهنة (4) يكون f anti–مغلق.

$(3 \Leftarrow 1)$ لدينا f ntia–مستمر وanti–مغلق وهو تقابل فرضاً، اذاً بقي إثبات أن f^{-1} anti–مستمر.

لنأخذ $F \in \tau_{cl}$ عندئذٍ $f(F) \in \delta_{cl}$ أي $(f^{-1})^{-1}(F) \in \delta_{cl}$ اذاً f^{-1} anti–مستمر بحسب النتيجة 1.

مثال8:

لنعرف على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة $\mathbb{Z}^+$ anti–تبولوجيا τ وفق الصيغة:

$\tau = \{\{n\} ; n \in \mathbb{Z}^+\}$

وعلى مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة $\mathbb{Z}^-$ anti–تبولوجيا δ وفق الصيغة:

$\delta = \{\{n\} ; n \in \mathbb{Z}^-\}$

ولنعرف التابع $f: \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{Z}^-$ بالعلاقة: $\forall n \in \mathbb{Z}^+ : \ f(n) = -n$

يمكن ملاحظة أن f تقابل وهو anti–مستمر و anti–مفتوح فهو anti– هوميومورفيزم.

الاستنتاجات والتوصيات:

إنَّ دراسة الفضاءات anti–تبولوجية تمثل إضافة جديدة في نظرية الفضاءات عموماً و دارسة بعض خواص التوابع في هذه الفضاءات يتيح لنا التوصل إلى نتائج أكثر أهمية فيها، وعليه يمكن دراسة:

1) موضوعات الفصل في الفضاءات anti–تبولوجية.

2) مفهوم التراص في الفضاءات anti–تبولوجية.

Reference

[1] AL-SHAMIA, T. M, AMEEN, Z. A, ABU-GDAIRID, R. MHEMDIE, A. *Continuty and separation axioms via infra-topological spaces*. Journal of Mathematics and Computer Science,30,2022,213–225.

[2] ÁVILA.J, MOLINA.F. *Generalized weak structures*. International Mathematical Forum.7(52),2012, 2589-2595.

[3] AL-ODHARI.A,M. *On infra-topological spaces*. International Journal of Mathematical Archive. 6(11),2015 ,179-184.

[4]BASUMATARY.B, KHAKLARY.J.*A Study on the Properties of Antitopological Space*. Neutrosophic Algebraic Structures and their Applications, NSIA Publishing House,2022,16-27.

[5] CSÁSZÁR, Á. *Generalized topology, generalized continuity*. Acta Mathematica Hungarica. 96(4), 2002,351-357.

[6] CSÁSZÁR, Á. *Weak structures*. Acta Mathematica Hungarica.131(1-2), 2011, 193-195.

[7] JAMUNARAN.R, JEYANTHI.P, NOIRI.T. *On generalized weak structures.* Journal of Algorithms and Computation .47, 2016, 21-26.

[8] JASSEM,H.T. *On supra compactness in supratopologicol spaces*. Tikrit Journal of Pure Science.14(3),2009,57-69.

[9] MASSHOUR, A.S, ALLAM ,A.A, MAHMOUD, F.S, KHEDR,F.H. *On supratopological spaces*. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics.14(4), 1983, 502-510.

[10]MODAK,S. *Dense sets in weak structure and minimal structure*. Commun. Korean Math. Soc.28(3),2013, 589-596.

[11] SAHIN.M, KARGIN.A, YU¨CEL. M. Neutro-topological Space and Anti-topological Space. In: NeutroAlgebra theory Vol I, 2021,16-30.

[12] WITCZAK, T. *Infra-topologies revisited: logic and clarification of basic notions.* Communications of the Korean Mathematical Society.37(1),2022, 279-292.

[13] WITCZAK, T. *On dense, rare and nowhere dense sets in anti-topological spaces*. In: Neutrosophic Algebraic Structures and their Applications, NSIA Publishing House,2022,42-52.

[14] WITCZAK, T., *Some remarks on anti-topological spaces*. Asia Mathematika. Vol. 6, Issue 1 ,2022, 23− 34.