مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٨) العدد (٣) ٢٠٢٤

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (8) No. (3) 2024

مسألة رتبة زمرة الصفوف للحقول التربيعية الحقيقية $\mathbb{Q}(\sqrt{m^2+r})$

د. حسن سنكري*

د. نبيل علي**

ياسمين غانم***

(تاريخ الإيداع ١١/ ٥/ ٢٠٢٤ – تاريخ النشر ٤/ ٨/ ٢٠٢٤)

□ ملخّص □

درسنا في هذا البحث إحدى المسائل الهامة وهي مسألة التحليل الوحيد لأسر من الحقول التربيعية $K=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ حيث $d=m^2+r$ عدد صحيح موجب حر من التربيع وذلك بالاعتماد على المعادلات الديوفانتية.

الكلمات المفتاحية : الحقول التربيعية الحقيقة، رتبة زمرة الصفوف ، المعادلات الديوفانتية .

* أستاذ – قسم الرياضيات – كلية العلوم– جامعة تشرين – اللاذقية – سورية .

**أستاذ مساعد– قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة طرطوس – طرطوس–سورية.

*** طالبة دراسة عليا (ماجستير) –قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة طرطوس–طرطوس –سورية.

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٨) العدد (٣) ٢٠٢٤

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (8) No. (3) 2024

CLASS NUMBER PROBLEM FOR THE REAL QUADRATIC FIELDS $\mathbb{Q}(\sqrt{m^2+r})$

Dr. Hasan Sankari *

Dr. Nabil Ali**

Yasmin Ghanem***

(Received 11/5/2024.Accepted ٤/8/2024)

□**ABSTRACT** □

In this paper, we have studied one of the important problems which is the Unique Factorization of the family of real quadratic fields $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ where $d = m^2 + r$ is a positive square free integer, depending on Diophantine equation .

Keywords : Real quadratic fields, Class Number.

* Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.
**Associate Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tartous University, Tartous, Syria.
***Postgraduate Student, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tartous University, Tartous, Syria.

مقدمة :

تعتبر مسألة التحليل الوحيد من المسائل المهمة التي درسها الرياضيون وكانت البداية في ساحة الأعداد الصحيحة Z مع المبرهنة الأساسية في الحساب والتي تنص على أن كل عدد صحيح يكتب بصيغة جداء منتهٍ لأعداد أولية ومن ثم قاموا بتوسيع الحلقة Z وكان توسيع غاوص Z[i] بداية التوسيعات التربيعية التي عملوا بها حيث أدخلوا مفهوم العناصر اللامختزلة والعناصر الأولية ومن ثم النظرية الحديثة للحلقات والحقول الجبرية وبشكل خاص البنى الجبرية من الصيغة $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ حيث d عدد صحيح حر من التربيع وبحثوا في الخصائص الجبرية لهذه البنى فيما إذا كانت تحقق ما تحققه الحلقة Z كخاصة التحليل الوحيد و وجود القاسم المشترك الأعظم والمضاعف المشترك الأصغر .

كانت نتيجة أبحاثهم أن تحليل العناصر يكون ممكناً ووحيداً في بعض هذه الساحات وفي بعض الساحات الأخرى غير ممكناً وقد توقع العالم Gauss أنه من أجل $d < 0$ فقط عندما $d \in A$ حيث :

$$A = \{-1, -2, -3, -7, -11, -19, -43, -67, -163\}$$

تكون حلقة الأعداد الجبرية الصحيحة للحقل $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ واحدية التحليل.

ومن ثم أثبت العالمين Heegner [8] و Stark [7] أن توقع Gauss صحيح بينما من أجل $d > 0$ عدد صحيح حر من التربيع لم يتمكن الباحثون من تحديد الساحات الواحدية وبقيت المسألة مفتوحة فقد تم إثبات وجود عدد لا نهائي من الحقول التربيعية $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ و التي تكون حلقة الأعداد الجبرية الصحيحة فيها واحدية التحليل ولكن ليس من أجل كل d

و يبقى السؤال : هل يمكن إيجاد شروط معينة ل d لكي نحكم على حلقة الأعداد الجبرية الصحيحة للحقل $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ فيما إذا كانت Unique Factorization Domains UFD أم لا ؟

أهمية البحث وأهدافه:

من المعروف أن التحليل الوحيد لعناصر ساحة جبرية يلزم لحل بعض المعادلات الديوفانتية ولوجود القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر وغيرها من الخصائص الجبرية ولذلك يهدف هذا البحث إلى دراسة مسألة التحليل الوحيد لأسر من الحقول التربيعية.

طرائق البحث ومواده :

في هذا البحث نستفيد من تحليل الإيديال الأولي الرئيسي (p) في الحقل $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ومن أن كل ساحة إيديالات رئيسية هي ساحة تحليل وحيد.

تعاريف ومفاهيم أساسية:

بعض الرموز والمصطلحات المستخدمة في هذا البحث:

- $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ حقل الأعداد الجبرية
- $\mathcal{O}_k$ حلقة الأعداد الجبرية للحقل K
- $\left(\frac{a}{p}\right)$ رمز ليجندر
- $CL(K)$ زمرة صفوف تكافؤ الإيديالات للحقل K
- $h(d)$ رتبة الزمرة $CL(K)$ للحقل K

نذكر فيما يأتي بعضاً من التعاريف والتمهيديات والأفكار التي سنعتمد عليها في هذا البحث.

تعريف1: [1,3]

ليكن d عدد صحيح حر من التربيع عندئذٍ الحقل الجزئي من $\mathbb{C}$ الذي يحوي المجموعة $\mathbb{Q} \cup \{\sqrt{d}\}$ يسمى

حقل تربيعي ويرمز له بالرمز $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ وتكون عناصره من الصيغة : $\alpha = a + b\sqrt{d}$ حيث $a, b \in \mathbb{Q}$ و إذا كان $d > 0$ يسمى K حقل تربيعي حقيقي (Real quadratic field) ، وإذا كان $d < 0$ يسمى K حقل تربيعي تخيلي (Complex quadratic field) ، وتسمى عناصر الحقل التربيعي أعداد تربيعية .

- إن حلقة الأعداد الجبرية $\mathcal{O}_{\mathrm{k}}$ تعطى بالصيغة :

$$\mathcal{O}_{\mathrm{k}} = \begin{cases} \mathbb{Z}\left[\dfrac{1+\sqrt{d}}{2}\right] & if \quad d \equiv 1 (mod\ 4) \\ \mathbb{Z}[\sqrt{d}] & if \quad d \not\equiv 1 (mod\ 4) \end{cases}$$

- إن مميز الحقل $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ يعطى بالصيغة :

$$\Delta_k = \begin{cases} d & if \quad d \equiv 1 (mod\ 4) \\ 4d & if \quad d \not\equiv 1 (mod\ 4) \end{cases}$$

تعريف 2: [1]

ليكن $\alpha = a + b\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ يعرف مرافق العنصر α (Conjugate of α) ويرمز له بالرمز $\bar{\alpha}$ ،

بالشكل: $\bar{\alpha} = a - b\sqrt{d}$

ويعرف نظيم العنصر α (Norm of α) ويرمز له بالرمز $\mathrm{N}(\alpha)$ ، بالشكل:

$$\mathrm{N}(\alpha) = \alpha\,\bar{\alpha} = (a + b\sqrt{d})(a - b\sqrt{d}) = a^2 - db^2$$

ويعرف أثر العنصر α (Trace of α) ويرمز له بالرمز $\mathrm{TR}(\alpha)$ ، بالشكل :

$$\mathrm{TR}(\alpha) = \alpha + \bar{\alpha} = (a + b\sqrt{d}) + (a - b\sqrt{d}) = 2a$$

تعريف3:[6]

ليكن K حقلاً تربيعياً عندئذٍ زمرة الواحدات في الحلقة $\mathcal{O}_{\mathrm{k}}$ تعطى بالصيغة التالية:

$$\mathcal{O}_{\mathrm{k}}^{*} = \{\alpha \in \mathcal{O}_{\mathrm{k}}\ ;\ |\mathrm{N}(\alpha)| = 1\}$$

وفي حال K حقلاً تربيعياً حقيقياً عندئذٍ أصغر واحدة في $\mathcal{O}_{\mathrm{k}}^{*}$ أكبر تماماً من 1 تسمى الواحدة الأساسية للحقل K ، ويرمز لها بالرمز ε.

تعريف4 : [5]

الحقل التربيعي الحقيقي $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ حيث $d = n^2 + r \neq 5$ عدد صحيح موجب حر من التربيع يسمى حقلاً تربيعياً حقيقياً من نمط Richaud–Degert(R–D) إذا حقق:

$$r | 4n \ \& -n < r < n$$

تمهيدية 1: [5]

ليكن $K=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ حقل تربيعي من نمط (R– D) Richaud–Degert عندئذٍ الواحدة الأساسية ε ونظيمها $N(\varepsilon)$ تعطى في الحالات التالية كما يلي:

$$\varepsilon=\begin{cases} n+\sqrt{n^2+r} & , \quad N(\varepsilon)=-sgn\, r \quad if \ \ |r|=1 \\ \dfrac{n+\sqrt{n^2+r}}{2} & , \quad N(\varepsilon)=-sgn\, r \ \ if \ \ |r|=4 \\ \dfrac{2n^2+r}{|r|}+\dfrac{2n}{|r|}\sqrt{n^2+r} & , \quad N(\varepsilon)=1 \qquad if \ \ |r|\neq 1,4 \end{cases}$$

تعريف5 : [1]

نقول عن مجموعة عناصر I في حلقة R أنها إيديال (Ideal) إذا كانت مغلقة بالنسبة لعمليتي الجمع و الضرب بعدد أي :

$$a\,,b\ \in I\Longrightarrow a+b\in I$$
$$a\ \in \mathrm{I}\,,\mathrm{r}\ \in \mathrm{R}\Longrightarrow r\,a\in I$$

ونقول عن إيديال I أنه إيديال أولي في R إذا كان $a\in R$ و b وكان $ab\in I$ فإنه إما $a\in I$ أو $b\in I$

تعريف6 : [1]

لتكن $a_1,a_2,\dots,a_n\in R$ عندئذٍ يمكن أن نعرف إيديال $I=(a_1,a_2,\dots,a_n)=\{\sum r_ia_i\ ;\ r_i\in R\}$ وعندئذٍ الإيديال من الصيغة $I=(a)=aR=\{\sum r_ia\ ;\ r_i\in R\}$ يسمى إيديال رئيسي (Principal Ideal) مولد بالعنصر a .

و إذا كان كل إيديال في الساحة الصحيحة R إيديال رئيسي فإنه يقال عن R أنها ساحة إيديالات رئيسية.

تعريف7 : [1]

نقول عن الساحة $\mathcal{O}_{\mathrm{k}}$ أنها ساحة تحليل وحيد إذا كان كل عنصر $\mathrm{a}\in\mathcal{O}_{\mathrm{k}}$ يكتب بشكل وحيد كجداء منتهٍ لعناصر غير خزولة

- إذا كانت R ساحة إيديالات رئيسية فهي ساحة تحليل وحيد أي أن كل ساحة إيديالات رئيسية هي ساحة تحليل وحيد.

تعريف 8: [1]

لتكن R ساحة صحيحة و F حقل كسور R وليكن $\mathcal{H}$ مودول جزئي في F عندئذٍ إذا وجد عدد صحيح r بحيث $r\mathcal{H}\ \subseteq R$ فإن $\mathcal{H}$ يدعى إيديال كسري في R .

- كل إيديال كسري $\mathscr{H}$ في R يكتب بالصيغة : $\mathcal{H}=\mathrm{a}^{-1}\mathfrak{T}=\left\{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\ ;\mathrm{b}\in\mathfrak{T}\right\}$ حيث $\mathfrak{T}$ إيديال في R و a عنصر غير معدوم في R
- كل إيديال عادي في R هو إيديال كسري حيث تكون $r=1$ ويسمى إيديال صحيح.
- كل إيديال كسري $\mathscr{H}$ في R يحقق $\mathscr{H}=(\mathrm{a})\,;\mathrm{a}\in F$ يسمى إيديال كسري رئيسي.

تعريف 9: [1]

لتكن R ساحة صحيحة من أجل إيديالين كسريين I و J من الساحة R سنعرف الجداء كالآتي :

$$IJ=\left\{\sum_{i=1}^{d} a_i b_i \quad ; a_i \in I, b_i \in J \ \& \ d \in \mathbb{Z}^+\right\}$$

ويكون IJ إيديال كسري ويكون R حيادي عملية الجداء.

تعريف 11: [1]

لنرمز بـ F(R) لزمرة جميع الإيديالات الكسرية في R و $P(R)$ زمرة جزئية منها تحوي جميع الإيديالات الكسرية الرئيسية

وليكن $\mathcal{H},\mathcal{I} \in F(R)$ فإن $\mathcal{H}\ \mathrm{P(R)} = \mathcal{I}\ \mathrm{P(R)}$ تعرف علاقة تكافؤ على F(R) ونكتب $\mathcal{H} \sim \mathcal{I}$

تعريف 12: [1]

لتكن R ساحة ديدكند عندئذٍ تكون زمرة صفوف تكافؤ الإيديالات لـ R هي زمرة القسمة $F(R)\big/P(R)$

ونرمز لها بـ $CL(R)$ ويكون $|CL(R)|<\infty$ ويسمى رقم الصف (رتبة الصف) ونرمز له بـ h(R)

ونرمز لرتبة زمرة صفوف تكافؤ الإيديالات للحقل التربيعي $K=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ بالرمز h_k أو $h(d)$

تمهيدية 2:[1]

ساحة ديدكند R ساحة إيديالات رئيسية إذا وفقط إذا كانت CL زمرة بديهية ومن ثم

$$h(R)=1$$

تعريف 13: [3]

قيمة a التي يكون من أجلها التطابق $x^2 \equiv a \pmod p$ قابل للحل تسمى باقي تربيعي للعدد الأولي الفردي p يعطى مميز الباقي التربيعي والذي يرمز له برمز ليجندر $\left(\frac{a}{p}\right)$ بالعلاقة :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{a}{p}\right)=1 & \text{if } x^2\equiv a \pmod p \quad solvable\ and (a,p)=1 \\ \left(\dfrac{a}{p}\right)=0 & \text{if } (a,p)=p \\ \left(\dfrac{a}{p}\right)=-1 & \text{if } x^2\equiv a \pmod p \quad unsolvable \end{cases}$$

تمهيدية 3:[3]

ليكن a,b أعداد صحيحة و p,q أعداد أولية عندئذٍ:

1) $a_1 \equiv a_2 \pmod p \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{a_1}{p}\right)=\left(\frac{a_2}{p}\right)$

2) $\left(\frac{a_1}{p}\right)\cdot\left(\frac{a_2}{p}\right)=\left(\frac{a_1\cdot a_2}{p}\right)$

3) $\left(\frac{1}{p}\right)=\left(\frac{a^2}{p}\right)=1$

4) $\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{(p-1)/2}$

5) $\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{(p^2-1)/8}$

6) $\left(\frac{a}{p}\right)=\left(\frac{p}{a}\right)(-1)^{(b-1)/2\,.(a-1)/2}$

7) $\left(\frac{a}{pq}\right)=1 \ \ if \ \left(\frac{a}{p}\right) \ \& \ \left(\frac{a}{q}\right)=1$

8) $\left(\frac{p}{q}\right)=\begin{cases}\left(\frac{q}{p}\right) & \Leftrightarrow\ p\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)\ \text{or}\ q\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)\\ -\left(\frac{q}{p}\right) & \Leftrightarrow\ p\equiv q\equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)\end{cases}$

9) $\left(\frac{-1}{p}\right)=\begin{cases}1 & \Leftrightarrow\ p\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)\\ -1 & \Leftrightarrow\ p\equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)\end{cases}$

10) $\left(\frac{2}{p}\right)=\begin{cases}1 & \Leftrightarrow\ p\equiv \pm1(\mathrm{mod}\ 8)\\ -1 & \Leftrightarrow\ p\equiv \pm3(\mathrm{mod}\ 8)\end{cases}$

11) $\left(\frac{3}{p}\right)=\begin{cases}1 & \Leftrightarrow\ p\equiv \pm1(\mathrm{mod}\ 12)\\ -1 & \Leftrightarrow\ p\equiv \pm5(\mathrm{mod}\ 12)\end{cases}$

12) $\left(\frac{-3}{p}\right)=\begin{cases}1 & \Leftrightarrow\ p\equiv 1(\mathrm{mod}\ 6)\\ -1 & \Leftrightarrow\ p\equiv -1(\mathrm{mod}\ 6)\end{cases}$

تمهيدية 4:[3]

الإيديال الأولي P يتحلل في الحقل التربيعي $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ بالشكل الأتي:

$$\begin{cases} <P> \quad =<P> \quad or\ P\ does\ not\ fctor\ if\ and\ only\ if\ \left(\frac{d}{P}\right)=-1\\ <P> \quad =PP' \quad or\ P\ splits\ into\ 2\ different\ fctors\ if\ and\ only\ if\ \left(\frac{d}{P}\right)=+1\\ <P> \quad =P^2 \quad or\ P\ ramifies\ if\ and\ only\ if\ \left(\frac{d}{P}\right)=0\end{cases}$$

النتائج والمناقشة :

مبرهنة 1:

ليكن $d=4m^2+pa$ حيث p عدد أولي فردي و$a|m$ و $a,m\geq 1$ أعداد فردية عندئذٍ:

المعادلة $|x^2-dy^2|=4p$ لا تملك حلول صحيحة عندما a>4

الإثبات :

لنفرض أن a>4 ولنفرض أن للمعادلة $x^2-dy^2=\pm4p$ حل صحيح (x_0,y_0) وبحيث y_0 أصغر ما يمكن

عندئذٍ: $\quad {x_0}^2-d{y_0}^2=\pm4p \qquad (*)$

ولنأخذ $x=\frac{x_0-y_0\sqrt{d}}{2}\in\mathcal{O}_k$ حيث $\mathcal{O}_k=\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}]$ لأن $d\equiv 1(mod\ 4)$ و $\mathscr{E}=\frac{8m^2+pa+4m\sqrt{d}}{pa}\in\mathcal{O}_k^*$ حسب التمهيدية 1 فيكون :

$$\varepsilon x=\frac{(8m^2+pa)x_0-4my_0d}{2pa}+\frac{4mx_0-y_0(8m^2+pa)}{2pa}\sqrt{d}$$

وبما أن $N(\varepsilon x)=N(\varepsilon)N(x)$ و $N(\varepsilon)=1$ فإن :

$$\left(\frac{(8m^2+pa)x_0-4my_0d}{2pa}\right)^2-d\left(\frac{4mx_0-y_0(8m^2+pa)}{2pa}\right)^2=\frac{{x_0}^2-d{y_0}^2}{4}$$

$$\left(\frac{(8m^2+pa)x_0-4my_0d}{2pa}\right)^2-d\left(\frac{4mx_0-y_0(8m^2+pa)}{2pa}\right)^2=\pm p$$

$$\left(\frac{(8m^2+pa)x_0-4my_0d}{pa}\right)^2-d\left(\frac{4mx_0-y_0(8m^2+pa)}{pa}\right)^2=\pm 4p$$

وبما أن $x_0{}^2 - 4m^2y_0{}^2 = x_0{}^2 - dy_0{}^2 + pay_0{}^2$ فإن $x_0{}^2 \equiv 4m^2y_0{}^2 \ (mod\ p)$ أي
$x_0 \equiv 2my_0 \ (mod\ p)$

نلاحظ أن $\left(\frac{4mx_0 - y_0(8m^2+pa)}{pa}, \frac{(8m^2+pa)x_0 - 4my_0d}{pa}\right)$ حل صحيح للمعادلة $|x^2 - dy^2| = 4p$

وبالتالي :

$$\left|\frac{4mx_0 - y_0(8m^2+pa)}{pa}\right| \geq y_0$$

$\Leftarrow \quad 4mx_0 - y_0(8m^2+pa) \geq pay_0$ أو $-4mx_0 + y_0(8m^2+pa) \geq pay_0$

لذلك إما $2mx_0 \geq y_0(4m^2+pa)$ أو $x_0 \leq 2my_0$

نضرب طرفي المعادلة (*) بِ $4m^2$ فنجد: $(2mx_0)^2 - d(2my_0)^2 = \pm 16pm^2$

فإذا كان $2mx_0 \geq y_0(4m^2+pa)$ فإن :

$$\pm 16pm^2 \geq \left(y_0(4m^2+pa)\right)^2 - 4m^2y_0{}^2(4m^2+\mathrm{pa})$$
$$\pm 16pm^2 \geq 16y_0{}^2m^4 + 8y_0{}^2m^2pa + p^2a^2y_0{}^2 - 16y_0{}^2m^4 - 4y_0{}^2m^2pa$$
$$\pm 16pm^2 \geq p^2a^2y_0{}^2 + 4y_0{}^2m^2pa$$

$$\Rightarrow \pm 16m^2 \geq pa^2y_0{}^2 + 4y_0{}^2m^2a$$

وهذا مستحيل

أما إذا كان $x_0 \leq 2my_0$ فإن : $\pm 4p \leq (2my_0)^2 - dy_0{}^2$

$$\pm 4p \leq 4y_0{}^2m^2 - 4y_0{}^2m^2 - pay_0{}^2$$

وبالتالي:

$$\pm 4p \leq -pay_0{}^2$$
$$\pm 4 \leq -ay_0{}^2 \Rightarrow y_0{}^2 < 1$$

وهذا تناقض

مبرهنة 2 :

ليكن $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ حقل تربيعي حيث $d=4m^2+pa$ و p عدد أولي فردي و a|m و $a,m \geq 1$ أعداد فردية عندئذٍ:

$h_{\mathrm{k}} > 1$ عندما a > 4

الإثبات :

لنفرض أن gcd (m,p)=1 فيكون $d \equiv 4m^2 (mod\ p) \Leftarrow \left(\frac{d}{p}\right) = 1$ بالتالي p يتجزأ في $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ أي أن $<p> = \mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{a}}$ حيث $\mathfrak{a}$ إيديال أولي و $\bar{\mathfrak{a}}$ مرافق $\mathfrak{a}$ وذلك حسب التمهيدية 4

ويكون:

$$N\left((p)\right) = N(\mathfrak{a})N(\bar{\mathfrak{a}}) \Rightarrow p^2 = N(\mathfrak{a})N(\bar{\mathfrak{a}})$$

بالتالي $N(\mathfrak{a}) = N(\bar{\mathfrak{a}}) = p$ لأن p عدد أولي

ولنفرض أن $h_k = 1$ عندئذٍ الساحة $\mathcal{O}_{\mathrm{k}} = \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right]$ ساحة إيديالات رئيسية وذلك حسب التمهيدية 2 أي

يوجد $\frac{u+v\sqrt{d}}{2} \in \mathcal{O}_{\mathrm{k}}$ بحيث: $\mathfrak{a} = <\frac{u+v\sqrt{d}}{2}>$ وبالتالي $N(\mathfrak{a}) = N\left(\frac{u+v\sqrt{d}}{2}\right)$ وهذا يكافئ :

$\pm 4p = u^2 - dv^2$ وهذا مستحيل بحسب المبرهنة 1 إذاً $h_k > 1$

مبرهنة 3 :

ليكن $d=p^2m^2+4m$ حيث p عدد أولي فردي و $m \geq 1$ عندئذٍ:

المعادلة $|x^2-dy^2|=4p$ لا تملك حلول صحيحة عندما m عدد فردي يحقق $m>p$

الإثبات :

لنفرض $m>p$ ولنفرض أن للمعادلة $x^2-dy^2=-4p$ حل صحيح (x_0,y_0) وبحيث y_0 أصغر ما يمكن

عندئذٍ: $\quad x_0{}^2-dy_0{}^2=\pm 4p \qquad (*)$

ولنأخذ $x=\frac{x_0-y_0\sqrt{d}}{2}\in\mathcal{O}_k$ حيث $\mathcal{O}_k=\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right]$ لأن $d\equiv 1(mod\ 4)$ و

$\mathcal{E}=\frac{p^2m+2+p\sqrt{d}}{2}\in\mathcal{O}_k^*$ حسب التمهيدية 1 فيكون :

$$\varepsilon x=\frac{(p^2m+2)x_0-y_0pd}{4}+\frac{x_0p-y_0(p^2m+2)}{4}\sqrt{d}$$

وبما أن $N(\varepsilon x)=N(\varepsilon)N(x)$ و $N(\varepsilon)=1$ فإن:

$$\left(\frac{(p^2m+2)x_0-y_0pd}{4}\right)^2-d\left(\frac{x_0p-y_0(p^2m+2)}{4}\right)^2=\frac{x_0{}^2-dy_0{}^2}{4}$$

$$\left(\frac{(p^2m+2)x_0-y_0pd}{4}\right)^2-d\left(\frac{x_0p-y_0(p^2m+2)}{4}\right)^2=\pm p$$

$$\left(\frac{(p^2m+2)x_0-y_0pd}{2}\right)^2-d\left(\frac{x_0p-y_0(p^2m+2)}{2}\right)^2=\pm 4p$$

وبما أن $x_0{}^2-dy_0{}^2=\pm 4p$ فإن $x_0{}^2\equiv dy_0{}^2\ (mod\ 2)$ أي $x_0\equiv pmy_0\ (mod\ 2)$ ومن ثم

$\left(\frac{(p^2m-2)x_0-y_0pd}{2}\ ,\ \frac{x_0p-y_0(p^2m-2)}{2}\right)$ حل صحيح للمعادلة $|x^2-dy^2|=4p$ وبالتالي

$$\left|\frac{x_0p-y_0(p^2m+2)}{2}\right|\geq y_0$$

$\Longleftarrow\quad x_0p-y_0(p^2m+2)\geq 2y_0$ أو $-x_0p+y_0(p^2m+2)\geq 2y_0$

لذلك إما $\quad x_0p\geq y_0(p^2m+4)$ أو $x_0\leq pmy_0$

إذا كان $x_0p\geq y_0(p^2m+4)$ نضرب المعادلة (*) بِ p^2 فنجد: $(px_0)^2-d(py_0)^2=\pm 4p^3$

$$\pm 4p^3\ \geq\left(y_0(p^2m+4)\right)^2-dp^2y_0{}^2$$

$$\pm 4p^3\ \geq\left(y_0(p^2m+4)\right)^2-(p^2m^2+4m)p^2y_0{}^2$$

$$\geq y_0{}^2p^4m^2+8y_0{}^2p^2m+16y_0{}^2-y_0{}^2p^4m^2-4y_0{}^2p^2m$$

$$\Longrightarrow\quad \pm 4\ \geq 4y_0{}^2pm\quad\Longrightarrow \pm 1\ \geq y_0{}^2m$$

وهذا مستحيل

أما إذا كان فإذا كان $x_0\leq y_0pm$ فإن :

$$\pm 4p\leq(y_0pm)^2-dy_0{}^2$$

وبالتالي: $\quad \leq y_0{}^2p^2m^2-y_0{}^2p^2m^2-4y_0{}^2m$

$$\pm 4p\ \leq -4y_0{}^2m\Longrightarrow \pm p\leq -y_0{}^2m\ \Longrightarrow y_0{}^2m\leq p$$

ولكن $p < m$ بالتالي :

$$\Rightarrow y_0{}^2 m < m \quad \Rightarrow y_0{}^2 < 1$$

وهذا تناقض

مبرهنة 4 :

ليكن $d=p^2m^2+4m$ عدد صحيح حر من التربيع حيث p عدد أولي فردي و $m \geq 1$ عدد صحيح فردي عندئذٍ: $\mathcal{O}_k = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}]$ ليست واحدية التحليل عندما $m > p$ و $\left(\frac{m}{p}\right) = 1$

الإثبات :

بما أن $\left(\frac{m}{p}\right) = 1$ و $d \equiv 4m (mod\ p)$ فإن $\left(\frac{d}{p}\right) = 1$ بالتالي p يتجزأ في $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d}\,)$

أي أن $\mathfrak{a}\,\bar{\mathfrak{a}} =< p >$ حيث $\mathfrak{a}$ إيديال أولي و $\bar{\mathfrak{a}}$ مرافق $\mathfrak{a}$ وذلك حسب التمهيدية 4 ويكون:

$$N\big((p)\big) = N(\mathfrak{a})N(\bar{\mathfrak{a}}) \Rightarrow p^2 = N(\mathfrak{a})N(\bar{\mathfrak{a}})$$

بالتالي $N(\mathfrak{a}) = N(\bar{\mathfrak{a}}) = p$ لأن p عدد أولي

ولنفرض أن $h_k = 1$ عندئذٍ الساحة $\mathcal{O}_k = \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right]$ ساحة إيديالات رئيسية وذلك حسب التمهيدية 2 أي

يوجد $\frac{u+v\sqrt{d}}{2} \in \mathcal{O}_k$ بحيث: $\mathfrak{a} =< \frac{u+v\sqrt{d}}{2} >$ وبالتالي $N(\mathfrak{a}) = N\left(\frac{u+v\sqrt{d}}{2}\right)$ وهذا يكافئ :

$\pm 4p = u^2 - dv^2$ وهذا مستحيل بحسب المبرهنة 3 إذاً $h_k > 1$ و

$\mathcal{O}_k = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}]$ ليست واحدية التحليل.

مبرهنة 5 :

ليكن $d=4p^2m^2+5p$ حيث p عدد أولي فردي و $m \geq 1$ عندئذٍ:

المعادلة $|x^2 - dy^2| = 4p$ لا تملك حلول صحيحة

الإثبات :

لنفرض أن للمعادلة $x^2 - dy^2 = \pm 4p$ حل صحيح (x_0,y_0) وبحيث $y_0>1$ أصغر ما يمكن

عندئذٍ: $\qquad x_0{}^2 - dy_0{}^2 = \pm 4p \qquad (*)$

ولنأخذ $x = \frac{x_0 - y_0\sqrt{d}}{2} \in \mathcal{O}_k$ حيث $\mathcal{O}_k = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}]$ لأن $d \equiv 1 (mod\ 4)$ و

$\mathscr{E} = \frac{8pm^2+5+4m\sqrt{d}}{5} \in \mathcal{O}_k^*$ حسب التمهيدية 1 فيكون :

$$\varepsilon x = \frac{(8pm^2+5)x_0 - 4y_0md}{10} + \frac{4x_0m - y_0(8pm^2+5)}{10}\sqrt{d}$$

وبما أن $N(\varepsilon x) = N(\varepsilon)N(x)$ و $N(\varepsilon) = 1$

$$\left(\frac{(8pm^2+5)x_0 - 4y_0md}{10}\right)^2 - d\left(\frac{4x_0m - y_0(8pm^2+5)}{10}\right)^2 = \frac{x_0{}^2 - dy_0{}^2}{4}$$

$$\left(\frac{(8pm^2+5)x_0 - 4y_0md}{10}\right)^2 - d\left(\frac{4x_0m - y_0(8pm^2+5)}{10}\right)^2 = \pm p$$

$$\left(\frac{(8pm^2+5)x_0-4y_0md}{5}\right)^2-d\left(\frac{4x_0m-y_0(8pm^2+5)}{5}\right)^2=\pm 4p$$

وبما أن $5|4(2pm)$ $\Leftarrow$ $5|m$ لأن $(5,8p)=1$

$\left(\frac{(8pm^2+5)x_0-4y_0md}{5}\ ,\ \frac{4x_0m-y_0(8pm^2+5)}{5}\right)$ حل صحيح للمعادلة $|x^2-dy^2|=4\text{p}$

وبالتالي

$$\left|\frac{4x_0m-y_0(8pm^2+5)}{5}\right|\ge y_0$$

$\Leftarrow$ $4x_0m-y_0(8pm^2+5)\ge 5y_0$ أو $-4x_0m+y_0(8pm^2+5)\ge 5y_0$

لذلك إما $2\,x_0m\ge y_0(4pm^2+5)$ أو $x_0\le 2pmy_0$

فإذا كان $2\,x_0m\ge y_0(4pm^2+5)$ فإنه إذا ضربنا المعادلة (*) بـِ $4m^2$ فنجد:

$$(2mx_0)^2-d(2my_0)^2=-4m^2p\quad :$$

$$\begin{aligned}\pm 4m^2p &\ge \left(y_0(4pm^2+5)\right)^2-d(2my_0)^2\\ &\ge 16{y_0}^2p^2m^4+40{y_0}^2pm^2+25{y_0}^2-16{y_0}^2p^2m^4-20{y_0}^2pm^2\\ &\ge 20{y_0}^2pm^2+25{y_0}^2\\ &\ge 20{y_0}^2pm^2 \Rightarrow -4p\ge 20p{y_0}^2\Rightarrow -1\ge 5{y_0}^2\end{aligned}$$

وهذا مستحيل

أما إذا كان $x_0\le 2pmy_0$ فإن :

$$\begin{aligned}-4p &\le (2pmy_0)^2-d{y_0}^2\\ &\le 4{y_0}^2p^2m^2-4{y_0}^2p^2m^2-5p{y_0}^2\\ -4p &\le -5p{y_0}^2\Rightarrow\ 4\ge 5{y_0}^2\Rightarrow\ 4p\ge 5{y_0}^2\\ &\Rightarrow {y_0}^2\le 1\end{aligned}$$

وهذا تناقض

الاستنتاجات والتوصيات :

توصلنا في هذه المقالة إلى أن $h_k>1$ من أجل $K=\mathbb{Q}(\sqrt{4m^2+\text{pa}})$ و $K=\mathbb{Q}(\sqrt{p^2m^2+4\text{m}})$

و أثبتنا أن المعادلة $|x^2-dy^2|=4p$ لا تملك حلول صحيحة حيث $d=4p^2m^2+5p$

أما بالنسبة للتوصيات : فنوصي بدراسة وحدانية التحليل لأسر أخرى من الحقول التربيعية .

Rferences:

1) ALACA. S, WILLIAMS. K. S., *Introductory algebraic number theory*, Cambridge University Press. New York, 2004.

2) BARNER. K., Über die Werte der Ringklassen-L- *Funktionen reell-quadratis cher Zahlkörper an natürlichen Argumentstellen.* Journal of Number theory, vol. 1, pp. 28–64, 1969.

3) BOLKER. E. D., Elementary Number Theory, *An Algebraic Approach*, W. A. Bedjamin, Inc. New York, 1970.

4) BYEON. D., Kim. H. K., *Class number 1 criteria for real quadratic fields of Richaud– Degert type*, Journal of Number theory , vol. 57, no. 2, pp. 328–339, 1996.

5) BYEON. D., KIM. H. K., *Class number 2 criteria for real quadratic fields of Richaud– Degert type*, Journal of Number theory, vol. 62, no. 2, pp. 257–272, 1997.

6) HALTER-KOCH. *F., Quadratic Irrationals: An introduction to Classical Number Theory,* Taylor & Francis Group, University of Graz Austria, 2013.

7) Stark, H. M., *A complete determination of the complex quadratic fields of class number one*, Michigan Math. J., 14, 1-27,1967.

8) Heegner, K., *Diophantische Analysis und Modulfunktionen*. Math. Z., 56, 227–253,1952.

9) Larson, N. (2019). *The bernoulli numbers.* A Brief Primer.

10) Sankari. H.; Issa. A., *Lower Bound for the Class Number of* $\mathbb{Q}(\sqrt{4n^2+1})$, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2020.