مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٨) العدد (٤) ٢٠٢٤

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (8) No. (4) 2024

دراسة حلول المعادلة التفاضلية العشوائية الضبابية المتناظرة على [٠،∞)

د. عائدة صائمة*

حسين جنيد الحاج علي**

(تاريخ الإيداع ٩/٧/ ٢٠٢٤ – تاريخ النشر ٢٤/١٠/ ٢٠٢٤)

□ ملخّص □

ندرس في هذا البحث حلول نوع جديد من المعادلات التفاضلية وهو المعادلات التفاضلية العشوائية الضبابية المتناظرة (SFSDEs) والتي درست حلولها سابقاً بالنسبة لمجال $t \in [0, T]$ وقد قمنا بدراسة هذا النوع من المعادلات بالنسبة لمجال $t \in [0, \infty)$ وتم إثبات عدة مبرهنات في هذا الخصوص وكذلك برهان وجود الحل لهذه المعادلات وبرهان وحدانية هذا الحل وذلك ضمن شرط ليبشتز الشامل (global Lipschitz Condition).

الكلمات المفتاحية: معادلة تفاضلية، ضبابية،متغيرات عشوائية، متعدد القيم، متناظرة.

*قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة طرطوس، طرطوس.

**طالب دراسات عليا (ماجستير) –قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة طرطوس، طرطوس.

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٨) العدد (٤) ٢٠٢٤

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (8) No. (4) 2024

On Solutions of Symmetric Fuzzy Stochastic Differential Equation on $[0, \infty)$

Dr. A. Aida Sayma*

HoussenJneed Al-Haj Ali**

(Received 9/7/2024.Accepted 24/10/2024)

□**ABSTRACT** □

In this research, we will study the solutions of new type of differential equations known as Symmetric Fuzzy Stochastic Differential Equations (SFSDEs). the solutions of which were previously studied with respect of the field of $t \in [0, T]$,We have studied this type of equations with respect of the field of $t \in [0, \infty)$. However, in this study, several theorems in this regard have been proven, as well as proof of the existence of the solutions to these equations and proof of their unity. this solution is within the global Lipschitz condition.

Keywords: Differential Equation,SFSDE,Fuzziness, stochastic variables, Multivalued,Symmetric.

*Lecturer – Department of Mathematics -Facutly of Science – Tartous University

**Postgraduate Student (Master)–Department of Mathematics-Facutly of Science–Tartous University

المقدمة:

تعد المعادلات التفاضلية من أهم الأساسيات في علوم الرياضيات، بل صُنفت من قبل علماء الرياضيات بشكل عام على أنها أهم فروع الرياضيات وذلك لأنها أعطت تفسيراً منطقياً وعلمياً للكثير من الظواهر العلمية والفيزيائية والهندسية والرياضية التي تمس مختلف جوانب الحياة علمية كانت أم عملية، فمن أجل ذلك وفي علوم الحياة المختلفة فإن معظم الباحثين يجدون أنفسهم بحاجة ماسة للمعادلات التفاضلية التي ما برحت تتطور يوما بعد يوم حتى أصبحت علماً رياضياً هاماً ومستقلاً إلى حد كبير.

ورغم كل ما ذكر سابقا ورغم كل التطور الحاصل في علوم الرياضيات يجد الباحث العديد من النظم الطبيعية التي تتصرف بطرق ليست حتمية وذلك من خلال تمتعها بصفة عدم الدقة او الاضطراب الذي يدور حول هذا النظام. فحالات عدم اليقين هذه قد تكون على شكل توزيع يحمل طابع احتمالي أو تكون بشكل يخلو من التأكيد والدقة ويشوبه الغموض تارة أخرى. فيمكن تشكيل حالة عدم اليقين التي نتجت عن عدم الدقة من خلال الضبابية بالإضافة الى أن أي نظام طبيعي غالباً ما يواجه نوعاً ومصدراً آخر من عدم الدقة الذي من الممكن أن يحدث كتأثير لعوامل الاضطراب العشوائية أو ما يعرف بالضجة العشوائية. وبالتالي مما سبق ذكره نجد ان هناك مصدران مؤثران استوجب دراستهما في هذا النوع من الأنظمة الطبيعية بما يسمى بالريبة أو الشك أو عدم اليقين الذي يشمل عدم الدقة (الضبابية) والعشوائية.

وسنتعرف على كل منهما في سياق منفصل، فالمعادلات التفاضلية المتمتعة بصفة العشوائية (Stochastic differential equation) هي وسائل وأدوات نمذجةطبيعية رياضية تستخدم في وصف سلوك العديد من الظواهر العشوائيةوالأنظمة الديناميكية التي يكون تطورها مرتبطا بتطور الزمن. فالمعادلات التفاضلية العشوائية بشكل عام تملك حلولاً ذات عمليات عشوائية مستمرة مع الزمن: بمعنى أن الحل يمكن أن يكون معلوماً في نفس اللحظة الحالية عند زمن tولكن بعد لحظة أي في زمن $t + dt$سيكون الحل غير معلوم، ففي مثال واقعي عن المعادلات التفاضلية العشوائية (عدد خلايا السرطان في جسم مصاب يكون معلوماً بنفس اللحظة التي يتم إجراء التحاليل فيها لكن بعد تلك اللحظة يمكن للخلايا السرطانية أن تنتشر لخلايا أكثر وأكثر وبمثال أخر الأصابات بالأوبئة وأسعار المواد الغذائية في فترات الحروب والأزمات ...الخ)، وعلى الرغم من ذلك، فإنه في كثير من الأحيان يصادفنا نوع آخر من عدم اليقين عند نمذجة الظواهر المختلفة وهذا النوع تختلف طبيعته عن حالة العشوائية. وهو الذي يحدث عندما يلف الغموض وعدم اليقينالنموذج المراد دراسته، كمثال على ذلك عندما يكون قياس ما غير دقيق ويتم التعبير عنه باستخدام مصطلحات لغوية، مثل الضغط المرتفع أو درجة الحرارة منخفضة وحوالي 8% ، أو إذا كانت الآراء حول موضوع معين يلفها الغموض، والمعرفة بالمتغيرات أو البارامترات غير تامة وهو ظاهرة الضبابية، حيث تم العمل على توصيفها بشكل جيد وذلك من خلال تطبيق مفهوم المجموعات الضبابية (Fuzzy sets) و دالة الانتماء لهذه المجموعات ودرجتها.

فالعشوائية والضبابية مفهومينمختلفين، حيث أنه بشكل مفصل نجد العشوائية (Stochastic) تشير إلى عدم القدرة عل التنبؤ بحدث معين. إذا كان هناك عنصر عشوائي، فإن النتائج غير محددة ولايمكن التنبؤ بها بشكل دقيق، حتى لو كان هناك معلومات مسبقة، وهي تعتمد على الظواهر العشوائية وتصف كيفية تطور الأنظمة تحت تأثير عوامل غير متوقعة .أما الضبابية (Fuzziness) تشير إلى عدم اليقين والغموض في

المعلومات ، حيث تكون الحدود بين الفئات غير واضحة بدلاً من أن تكون الأمور محددة بشكل صارم(مثل صحيح أو خاطئ).أي ليصف عدم التأكيد وعدم الوضوح في كل شيء حولنا مثل (درجات الحرارة والأطوال والجمال والمسافات) ومايميزهاوجود دالة إنتماء (دالة عضوية) يتم بواسطتها حساب وتحديد درجة إنتماء عنصر ما للمجموعة[0,1]، بإختصار بسيط الضبابية لا علاقة لها بالتجارب العشوائية بل هي مجرد حكم منطقي على شيء ما بمدى إنتمائه لمجموعة معينة .

فالتعايش بين الظواهر المختلفةسواء كانت عشوائية أم ضبابية شجع العلماء على إيجاد وصياغة نوع مهم جداً من النماذج المحتوية على كلاهما معاً، حيث أن عناصره الرئيسية تشمل (العشوائيةوالضبابية) فالعشوائية في هذا النموذج تشير إلى وجود عوامل عشوائية توثر على النظام، وغالبأما يعبر عنها بواسطة عمليات وينر(Wiener process). أما عن الضبابية الموجودة في هذا النموذج تعكس عدم الدقة أو عدم اليقين في المعلمات أو القيم المستخدمة في المعادلة، وغالباً ما يتم تمثيلها باستخدام متغيرات ضبابية. ويمكن تمثيل المعادلات التفاضلية العشوائية الضبابية بشكل عام كالتالي:

$$[dx(t) = f(x(t),t)dt + g(x(t),t)dW(t) + h(x(t),t)dF(t)]$$

حيث:$x(t)$ هو المتغير الذي يتغير مع الزمن و $f(x(t),t), g(x(t),t)$ تعبران عن العمليات العشوائية و$dW(t)$ تمثل عملية وينر و$dF(t)$ تمثل التغيرات الضبابية.فالمعادلات التفاضلية العشوائية الضبابية تتميز بقدرتها على نمذجة سلوك الأنظمة في حالات عدم اليقين، حيث تمثل الضبابية عدم الدقة في القياسات أو البيانات، بينما تعكس العشوائية التقلبات الناتجة عن العوامل الغير متوقعة. وهذه الخصائص تجعل هذه المعادلات أدوات فعالة في تحليل الأنظمة المعقدة التي تتأثر بالعديد من العوامل المتداخلة. مع العلم أنه حتى وقت إعداد هذا البحث لاتوجد دراسة علمية تم بها إدخال مفهوم الضبابية إلى المعادلات التفاضلية العادية.

أهمية البحث وأهدافه:

تكمن أهمية البحث فيدراسة حلول نوع جديد من المعادلات التفاضلية وهو المعادلات التفاضلية العشوائية الضبابية المتناظرة على المجال $[0,\infty)$ويتجلى الهدف الرئيس في دراسة وجود ووحدانية الحل لهذه المعادلات في حالة متغيرات عشوائية ضبابية متعددة القيم ومعاملاتها خاضعة لشرط ليبتشز الشامل.

طرائق البحث وموارده:

لتحقيق هدف البحث، تم إتباع الخطوات التالية :

- دراسة نظرية وتعريفية بالمعادلات التفاضلية العشوائية الضبابية المتناظرة.
- صياغة الشكل التكاملي للمعادلات التفاضلية العشوائية الضبابية المتناظرة.
- برهان وجود ووحدانية الحل للمعادلات التفاضلية العشوائية الضبابية المتناظرة التي تحقق شرط ليبشتز الشامل بالنسبة للمجال $[0,\infty)$.

أولاً: تعاريف ومفاهيم أساسية:

تعريف ١ [1, 2]: لتكن $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ مجموعة كل المجموعات الجزئية المحدبة والمتراصة وغير الخالية من $\mathbb{R}^d$، نعرّف على هذه المجموعة المسافة d_H بالشكل التالي:

$$d_H(A,B) = max\left\{ \underset{a\in A}{sup}\,\underset{b\in B}{inf}\|a-b\| ,\quad \underset{b\in B}{sup}\,\underset{a\in A}{inf}\|a-b\| \right\}$$

حيث‖ . ‖يدل على النظيم في$\mathbb{R}^d$وإنّ $(\mathcal{K}(\mathbb{R}^d), d_H)$أو اختصاراً$\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ فضاء متري ندعوه فضاء هاوسدروف.

. حيث يمكن أن نعرف الجمع والضرب القياسي في $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$بالشكل التالي:

$$A + B = \{a + b\,;\, a \in A\,, b \in B\}$$
$$A + \{b\} = \{a + b\ ;\, a \in A\}$$
$$\lambda A = \{\lambda a\,;\, a \in A\}$$

وذلك من اجل كل A, Bمن $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ وa, b من $\mathbb{R}^d$ و λ من $\mathbb{R}$.

تعريف ٢ [5, 4, 2]: (المتغير العشوائي متعدد القيم)

ليكن $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ فضاء احتمالي تام ولنرمز لأسرة$\mathcal{A}-$ المتغيرات العشوائية متعددة القيم القابلة للقياس (متغيرات عشوائية متعددة القيم) والتي تأخذ قيمها في $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ بالرمز $\mathscr{M}(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{K}(\mathbb{R}^d))$ أي:

. التطبيقات $F: \Omega \longrightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ بحيث أن:$\{\omega \in \Omega: F(\omega) \cap \mathrm{O} \neq \emptyset\} \in \mathcal{A}$وذلك من أجل كل مجموعة مفتوحة$\mathrm{O} \subset \mathbb{R}^d$.

وبتعبير آخر نقول عن التطبيق: $F: \Omega \longrightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ أنه متغير عشوائي متعدد القيم إذا وفقط إذا كان Fهو $\mathcal{A}/\mathcal{B}_{d_H}$ تطبيق قابل للقياس.

حيث $\mathcal{B}_{d_H}$ ترمز لـ Borel $\sigma -$ algebra جبر بوريل المولّد من التبولوجيا في فضاء هاوسدروف $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$.

تعريف ٣ [2]: نقول عن$X: I \times \Omega \to \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ أنها عملية عشوائية متعددة القيمة إذا كان من أجل كل

$t \in I$ فإنَّ التطبيق $X(t\,,.): \Omega \to \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ متغير عشوائي متعدد القيم.

تعريف٤[١]:نعرف المجموعة $u \subseteq \mathbb{R}^d$ مجموعة ضبابية بأنهاالمجموعة المخصصة بدالة العضوية والتي نرمز لها بنفس رمز المجموعة الضبابية u والمعرفة بالشكل :

$$u: \mathbb{R}^d \longrightarrow [0,1]$$
$$u(x) = a; a \in [0,1]\ \wedge x \in \mathbb{R}^d$$

ودرجة عضوية العنصرxفي المجموعة الضبابيةuهي$u(x)$المعرفة من أجل كل $x \in \mathbb{R}^d$.

أي أن المجموعة الضبابيةu هي عبارة عن مجموعة عناصرها ثنائيات يعبر عنها بالشكل التالي:

$$u = \{(x, u(x)); x \in \mathbb{R}^d\}$$

تعريف ٥[1, 3]: نعرف التضمين $\langle\,.\,\rangle: \mathbb{R}^d \to \mathscr{F}(\mathbb{R}^d)$

حيث المجموعة $\mathbb{R}^d$ يمكن تضمينها ضمن $\mathscr{F}(\mathbb{R}^d)$ بواسطة التضمين $\langle\,.\,\rangle$ بالشكل التالي:

$$\langle r\rangle(a) = \begin{cases} 1 & if\ \ a = r \\ 0 & if\ \ a \in \mathbb{R}^d \wedge\ \ a \neq r \end{cases}$$

فيكون من أجل $\alpha \in [0,1]$ و $u, v \in \mathscr{F}(\mathbb{R}^d)$ فإن الجمع $u \oplus v$ يعرف على المستوى α بالشكل:

$$[u \oplus v]^\alpha = [u]^\alpha + [v]^\alpha$$

والجداء المباشر $\beta \odot u$ يعرف ايضا بالشكل:

$$[\beta \odot u]^\alpha = \beta[u]^\alpha$$

تعريف ٦[1, 3]: نعرف w على أنه فرق هوكيهارا (Hukuhara difference) لمجموعتين ضبابيتين v, u من $\mathscr{F}(\mathbb{R}^d)$ إذا وجدت مجموعة ضبابية $w \in \mathscr{F}(\mathbb{R}^d)$ بحيث أن: $u = v \oplus w$ والذي

نرمز له بالرمز $u \ominus v$ ، مع ملاحظة أن: $u \ominus v \neq u\oplus(-1)\odot v$ ، وأن فرق Hukuhara إذا وجد فإنه وحيد .

ملاحظة ١: $[6,5,3,2]$ليكن لدينا $d_\infty : \mathscr{F}(\mathbb{R}^d) \times \mathscr{F}(\mathbb{R}^d) \to [0,\infty)$ قياس هاوسدورف المعمم و $u,v \in \mathscr{F}(\mathbb{R}^d)$ و $\alpha \in [0,1]$عندئذ فإنه يمكن أن نعبر عن قياس هاوسدروف المعمم بالنسبة للمجموعتين الضبابيتينu,vبالشكل التالي: $d_\infty(u,v) := \sup_{\alpha\in[0,1]} d_\infty([u]^\alpha,[v]^\alpha)$

خاصة ٢: $[1,2,3,4,5,6]$إذا كانت u,v,w,z مجموعات ضبابية من $\mathscr{F}(\mathbb{R}^d)$ و β عدد حقيقي من $\mathbb{R}$ ، و $r_1,r_2 \in \mathbb{R}^d$ عندئذ فإن الخواص التالية صحيحة:

i $(u\oplus\langle r_1\rangle) \ominus \langle r_2\rangle = u\oplus\langle r_1 - r_2\rangle$

ii فرق $(u\oplus\langle r_1\rangle) \ominus v$ Hukuharaيكون موجود إذا كان$(u \ominus v)$موجود بالإضافة الى أن$(u\oplus\langle r_1\rangle) \ominus \langle v\rangle = (u \ominus v)\oplus\langle r_1\rangle$

iii $d_\infty(u+w,v+w) = d_\infty(u,v)$

v $d_\infty(u+v,w+z) \le d_\infty(u,w) + d_\infty(v,z)$

iv $d_\infty(\beta u,\beta v) = |\beta| d_\infty(u,v)$

vii $d_\infty(u\oplus v,\langle 0\rangle) = d_\infty(u,v)$

viii $d_\infty(u \ominus v, u \ominus w) = d_\infty(v,w)$

ix $d_\infty(\mathrm{u} \ominus \mathrm{v}, \mathrm{w} \ominus \mathrm{z}) \le \mathrm{d}_\infty(\mathrm{u},\mathrm{w}) + \mathrm{d}_\infty(\mathrm{v},\mathrm{z})$

تعريف ٧: $[3,4,6]$بفرض أن التطبيق $\mathrm{x}: \Omega \to \mathscr{F}(\mathbb{R}^\mathrm{d})$ هو تطبيق ضبابي و $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$ فضاء احتمالي نقول عن x أنه متغير عشوائي ضبابي إذا كان: $[\mathrm{x}]^\alpha : \Omega \to \mathscr{F}(\mathbb{R}^\mathrm{d})$من أجل $\alpha \in [0,1]$حيث$\mathcal{A}$ – متغير عشوائي متعدد القيم قابل للقياس.

تعريف ٨: متراجحةDoobلتكن $(X_n)_{n\ge0}$عملية عشوائية متزايدة حيث X_n هو متغير عشوائي لكل $n \ge 0$ و$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ عندئذ فإن متراجحةDoob تعطى بالشكل:

$$P(M_n \ge a) \le \frac{\mathbb{E}[S_n]}{a}\ ;\ a \in \mathbb{R}^+$$

حيث: $M_n = \sup_{k\le n} \{S_k\}$, $\mathbb{E}[S_n]$العشوائيةالمتغيراتلمجموعالرياضيالتوقعهو S_n

تعريف ٩: متراجحةGronwallلتكن$y(t)$ دالة حيث t ينتمي إلى فترة زمنية معينة إذا كانت هناك دوال آخرى $a(t)$ و$b(t)$ و$c(t)$ حيث $y(t) \le a(t) + \int_0^t b(s)y(s)\,ds$ و $0 \le c(t) + \int_0^t b(s)\,ds$ فإنمتراجحةGronwall تعطى كالتالي:

$y(t) \le a(t) + \int_0^t c(s)\,exp(\,y(t) \le \int_0^s b(u)\,du)\,ds$ حيث إن:$y(t)$ هي الحد الأقصى المتوقع للدالة $y(t)$ على الفترة من ٠ إلى t

المناقشة:

أولاً: صياغة الشكل التكاملي للمعادلة التفاضلية العشوائية الضبابية المتناظرة:

إن للمعادلة التفاضلية العشوائية الضبابية شكلين وهما: **[4]**

أولاً: المعادلة التفاضلية العشوائية الضبابية المنحرفة نحو اليمين على المجال $\mathrm{I} = [0,1]$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f\big(s, x(s)\big)ds + \int_0^t g\big(s, x(s)\big)dB(s) \;\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

ثانيا: المعادلة التفاضلية العشوائية الضبابية المنحرفة نحو اليسار على المجال $\mathrm{I} = [0,1]$

$$x(t) + (-1)\int_0^t f\big(s, x(s)\big)ds + (-1)\int_0^t g\big(s, x(s)\big)dB(s) = x_0 \;\ldots.(2)$$

حيث إن: $t \in [0, T]$ ،

fمعامل النجراف العشوائي الضبابي و g معامل الانتشار العشوائي وx_0 متغير عشوائي ضبابي و$B(s)$ حركة براونيةذات m بعد

- الآن سندرس الشكل التفاضلي للمعادلات السابقة على المجال $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$

ملاحظة ٣:الترميز $x \overset{p.1}{=} y$ يشير إلى اختصار $p(x = y) = 1$ حيث x, y هي بغض العناصر العشوائيةوايضاً سنرمز $x(t) \overset{\mathbb{R}^+ p.1}{=} y(t)$ بدلاً من $p(x(t) = y(t)\ \forall t \in \mathbb{R}^+) = 1$ حيث x, y هي عمليات عشوائية

حيث يكون الشكل التفاضلي للمعادلات التفاضلية العشوائية الضبابية المنحرفة نحو اليمين على المجال$\mathbb{R}^+$هو:

$$dx(t) \overset{\mathbb{R}^+ p.1}{=} f\big(t, x(t)\big)dt + \langle g(t, x(t)dB(t)\rangle \;\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$; x(0) \overset{p.1}{=} x_0$$

حيث:$f: \mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathscr{F}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{F}(\mathbb{R}^d)$ و $g: \mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathscr{F}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$

وx_0 ضبابيعشوائيمتغير $\mathrm{x}_0: \Omega \to \mathscr{F}\big(\mathbb{R}^\mathrm{d}\big)$;

$$\mathrm{g} = (\mathrm{g}^1, \ldots, \mathrm{g}^\mathrm{m}); \mathrm{g}^\mathrm{k}: \mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathscr{F}\big(\mathbb{R}^\mathrm{d}\big) \to \mathbb{R}^\mathrm{d} \;, (\mathrm{k} = 1,2, \ldots, \mathrm{m})$$

ويمكن ان نكتب المعادلة (٣) بالشكل:

$$dx(t) \overset{\mathbb{R}^+ p.1}{=} f\big(t, x(t)\big)dt + \sum_{k=1}^{m} \langle g^k(t, x(t)dB^k(t)\rangle \ldots\ldots\ldots(4)$$

$$x(0) \overset{p.1}{=} x_0$$

أما الشكل التفاضلي للمعادلة التفاضلية العشوائية الضبابية المنحرفة نحو اليسار على المجال $[0, \infty)$ فيأخذ الشكل التالي:

$$dx(t) + (-1)f\big(t, x(t)\big)dt + (-1)\langle g\big(t, x(t)\big)dB(t)\rangle \overset{\mathbb{R}^+ p.1}{=} 0 \ldots\ldots\ldots(5)$$

$$x(0) \overset{p.1}{=} x_0$$

حيث x_0 , g و f تكون معرفة كما عرفت من أجل المعادلة (٣)

ويمكننا أن نكتب المعادلة (٥) بالشكل:

$$dx(t) + (-1)f\big(t,x(t)\big)dt + (-1)\sum_{k=1}^{m}\langle g^k\big(t,x(t)\big)dB^k(t)\rangle \overset{\mathbb{R}_+\ p.1}{=} 0 \ldots (6)$$

وبإخذ الشكل التكاملي للمعادلتين (٤) و(٦) نحصل وعلى التوالي على المعادلتين:

$$x(t) \overset{\mathbb{R}^+\ p.1}{=} x_0 + \int_0^t f\big(s,x(s)\big)\,ds + \sum_{k=1}^{m}\langle\int_0^t g^k(s,x(s))dB^k(s)\rangle \ldots (7)$$

$$x(t) + (-1)\int_0^t f\big(s,x(s)\big)\,ds + (-1)\sum_{k=1}^{m}\langle\int_0^t g^k(s,x(s))dB^k(s)\rangle \overset{\mathbb{R}^+\ p.1}{=} x_0 \ldots (8)$$

بدمج المعادلتين (٥) و (٣) نجد:

$$dx(t) + (-1)f\big(t,x(t)\big)dt + \langle(-1)g\big(t,x(t)\big)dB(t)\rangle \overset{\mathbb{R}^+\ p.1}{=} \tilde{f}\big(t,x(t)\big)dt + \langle\tilde{g}(t,x(t)d\tilde{B}(t)\rangle$$

$$;\quad x(0) \overset{p.1}{=} x_0 \ldots\ldots (9)$$

حيث:

$f\ ,\tilde{f}: I \times \Omega \times \mathscr{F}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{F}(\mathbb{R}^d)$ و $g: I \times \Omega \times \mathscr{F}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ و

$\tilde{g}: I \times \Omega \times \mathscr{F}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n$ و

$x_0: \Omega \to \mathscr{F}(\mathbb{R}^d)$ ضبابيعشوائيهومتغير

ويمكن كتابة المعادلة (٩) الناتجة عن دمج المعادلتين (٦) و(٤) بالشكل:

$$dx(t) + (-1)f\big(t,x(t)\big)dt + \langle\sum_{i=1}^{m}(-1)g^i\,\big(t,x(t)\big)dB^i(t)\rangle$$

$$\overset{\mathbb{R}^+\ p.1}{=} \tilde{f}\big(t,x(t)\big) + \langle\sum_{j=1}^{n}\tilde{g}^j(t,x(t)d\tilde{B}^j(t)\rangle \ldots\ldots (10)$$

$$;\quad x(0) \overset{p.1}{=} x_0$$

حيث إن: حركة براونية ذات m بعد: B

حركة براونية ذات n بعد: $\tilde{B}$

$g: (\,g^1, g^2, \ldots\ldots\ldots, g^m)$
$\tilde{g}: (g^1, g^2, \ldots\ldots\ldots, g^n)$
$\tilde{g}^j, g^i: I \times \Omega \times \mathscr{F}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d$

وذلك من أجل كل $j = (1,2,\ldots,n)\,,\ i(1,2,\ldots\,,m)$

بأخذ الشكل التكاملي لـ (١٠) نجد:

$$\mathrm{x}(t) + \int_0^t (-1)\,f\big(s,x(s)\big)ds + \langle\sum_{i=1}^{m}\int_0^t (-1)\,g^i\big(s,x(s)\big)dB^i(s)\rangle$$

$$\overset{\mathbb{R}^+\ p.1}{=} x_0 + \int_0^t \tilde{f}\big(s,x(s)\big)ds + \langle\sum_{j=1}^{n}\int_0^t \tilde{g}^j\,(s,x(s))d\tilde{B}^j(s)\rangle \ldots\ldots\ldots (١١)$$

باستخدام فرقHukuharaنجد أن:

$$x(t) \oplus (-1)\odot\int_0^t f\big(s,x(s)\big)ds \oplus (-1)\odot\int_0^t g\big(s,x(s)\big)dW(s)$$

$$\overset{\mathbb{R}^+ p.1}{=} x_0 \oplus \int_0^t \tilde{f}\big(s, x(s)\big)ds \oplus \langle \int_0^t \tilde{f}\big(s, x(s)\big)d\widetilde{W}(s)\rangle \,;\, t \in \mathbb{R}^+ \ldots\ldots (12)$$

ويمكن كتابة المعادلة (١٢) بالشكل التالي:

$$x(t) \oplus (-1)\odot \int_0^t f\big(s, x(s)\big)ds \oplus \langle \sum_{i=1}^{m} \int_0^t (-1) g^i\big(s, x(s)\big)dB^i(s)\rangle$$

$$\overset{\mathbb{R}^+ p.1}{=} x_0 \oplus \int_0^t \tilde{f}\big(s, x(s)\big)ds \oplus \langle \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \tilde{g}^j\,\big(s, x(s)\big)\,d\tilde{B}^j(s)\rangle \ldots\ldots..(13)$$

حيث:

$$f\,,\tilde{f}\colon \mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathscr{F}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{F}(\mathbb{R}^d)$$

$g\colon \mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathscr{F}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$

$\tilde{g}\colon \mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathscr{F}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n$

$\Omega \to \mathscr{F}(\mathbb{R}^d) x_0$:

هي حركات براونية مستقلة $\{\mathcal{A}_t\}_{t\geq 0}$ أحادية البعد $B^1, B^2, \ldots, B^n$ و$\tilde{B}^1, \tilde{B}^2, \ldots, \tilde{B}^m$

وبتطبيق الخاصتين (**i**) و(**ii**) على المعادلة (١٣) نجد أن:

$$x(t) \overset{\mathbb{R}^+ p.1}{=} [\, x_0 \oplus \int_0^t \tilde{f}\,\big(s, x(s)\big)ds] \,\ominus [(-1)\odot \int_0^t f\big(s, x(s)\big)ds)])$$

$$\oplus \langle \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \tilde{g}^j\,\big(s, x(s)\big)d\widetilde{W}^j(s)\rangle \oplus \langle \sum_{i=1}^{m} \int_0^t g^i\,\big(s, x(s)\big)dW^i(s)\rangle \ldots (14)$$

بتطبيق الخاصتين (**i**) و(**ii**) مرة أخرى نجد أن:

$$x(t) \overset{\mathbb{R}^+ p.1}{=} [\, x_0 \oplus \int_0^t \tilde{f}\,\big(s, x(s)\big)ds] \,\ominus [(-1)\odot \int_0^t f\big(s, x(s)\big)ds)] \oplus \langle \sum_{k=1}^{\ell} \int_0^t h^k\,\big(s, x(s)\big)dW^k(s)\rangle \ldots (15)$$

حيث:

$\ell = n + m$

$h^1, h^2, \ldots, h^l\colon \mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathscr{F}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d$

$h^1 \equiv g^1, \ldots, h^m \equiv g^m, h^{m+1} \equiv \tilde{g}^1, \ldots, h^{m+n} \equiv \tilde{g}^n$

(هي حركات براونية$\{\mathcal{A}_t\}_{t\geq 0}$ أحادية البعد ومستقلة): $W^1, W^2, \ldots, W^l$

$W^1 \equiv B^1, \ldots, W^m \equiv B^m, W^{m+1} \equiv \tilde{B}^1, \ldots, W^{n+m} \equiv \tilde{B}^n$

x_0: متغير عشوائي ضبابي

ثانياً: دراسة وحدانية الحلول للمعادلات التفاضلية العشوائية الضبابية المتناظرة:

تعريف١: ليكن لدينا: $[\mathbf{1, 2, 3, 4}]$ $\tilde{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^+ = [0, \infty), \tilde{I} \in [0, \tilde{T}]$

. نقول إن حل المعادلة التفاضلية العشوائية الضبابية المتناظرة (15)هو

العملية العشوائية الضبابية x المعرفة بالشكل $x\colon \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathscr{F}(\mathbb{R}^d)$ والتي تحقق:

a) العملية العشوائية الضبابية x تنتمي الى $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{N}; \mathscr{F}(\mathbb{R}^d))$

b) العملية العشوائية الضبابيةxهي $d_\infty = continuous\ Fuzzy\ stochastic\ process$

c) العملية العشوائية الضبابية x تحقق (15)

ونقول عن العملية العشوائية الضبابية x أنها حل محلي (local solution) إذا كانت $\tilde{T} < T$

في حين نقول عن العملية العشوائية الضبابية x أنها حل شامل (global solution) إذا كانت $\tilde{T} = T$

تعريف٢:[1] :نقول عن حل المعادلة (15) الذي هو العملية العشوائية الضبابية

$x: \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathscr{F}(\mathbb{R}^d)$ أنه وحيد إذا أخذنا حل آخر للمعادلة التفاضلية العشوائية الضبابية المتناظرة (ثنائية الأطراف) (15) وليكن$y: \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathscr{F}(\mathbb{R}^d)$ وتحقق لدينا $x(t) \overset{\mathbb{R}^+ \; p.1}{=} y(t)$ من أجل كل

$t \in \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$

وبصيغة أخرى: [2] نقول عن y حل المعادلة (8) أنه وحيد إذا كان يحقق لدينا:

$$d_\infty(x(t), y(t)) \overset{\mathbb{R}^+ \; p.1}{=} 0$$

حيث إن $y: \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathscr{F}(\mathbb{R}^\mathrm{d})$ هو أي حل أخر للمعادلة (15) وذلك من أجل كل $t \in \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$

نذكر بعض الفرضيات الهامة التي يتطلبها بحثنا: [1,3]

لتكن $x_0: \Omega \to \mathscr{F}(\mathbb{R}^d)$ و $f, \tilde{f}: (\mathbb{R}_+ \times \Omega) \times \mathscr{F}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{F}(\mathbb{R}^d)$

و $f, \tilde{f}: (\mathbb{R}^+ \times \Omega) \times \mathscr{F}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{F}(\mathbb{R}^d)$ و $h^k: (\mathbb{R}^+ \times \Omega) \times \mathscr{F}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d$ وذلك من أجل $(k = 1,2, \dots, \ell)$

والتي تحقق: $\mathbf{A_0})\ \ x_0 \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}_0, p; \mathscr{F}(\mathbb{R}^d))$

التطبيقات $\mathbf{A_1})\ f, \tilde{f}: (\mathbb{R}_+ \times \Omega) \times \mathscr{F}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{F}(\mathbb{R}^d)$

تكون $(\ \mathcal{N} \otimes \mathfrak{B}_{d_s} \backslash \mathfrak{B}_{d_s} - \text{measurable}\ )$

و $h^k: (\mathbb{R}_+ \times \Omega) \times \mathscr{F}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d$

تكون $(\mathcal{N} \otimes \mathfrak{B}_{d_s} \backslash \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d) - \text{measurable})$

حيث h^k نقصد بها كلاً من $h^1, h^2, \dots, h^\ell$

يوجد ثابت $L > 0$بحيثمن أجل $\gamma \times p - a.a.\,(t, w)$ و$\forall\, t \in \mathbb{R}_+, \forall u, v \in \mathscr{F}(\mathbb{R}^d)$ تحقق $\mathbf{A_2})$

$$max\,\{d_\infty^2(f(t,w,u), f(t,w,v)) \wedge d_\infty^2\left(\tilde{f}(t,w,u), \tilde{f}(t,w,v)\right),$$
$$\|\, (h^k(t,w,u) - h^k(t,w,v))\|^2\} \ \le L(d_\infty^2(u,v))$$
$$(k = 1,2, \dots, \ell)$$

ويوجد ثابت $\mathbf{A_3})\ L^1(\mathbb{R}_+ \times \Omega\,, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{A}, \gamma \times p, \mathbb{R}) \ni K > 0$

من أجل كل $\gamma \times p - a.a.\,(t, w)$

$$max\,\{d_\infty^2\ (f(t,w,\langle 0\rangle), \langle 0\rangle) \wedge d_\infty^2\ (\tilde{f}(t,w,\langle 0\rangle), \langle 0\rangle)\} \ \le K(t,w)$$

من أجل كل$t \in \mathbb{R}^+$ و

$$max\,\{\|\, (h^k(t,w,\langle 0\rangle)\|^2\} \le K(t,w)\ \ ; K = 1,2, \dots, \ell$$

يوجد ثابت,$\tilde{T} \in \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ بحيث أن المتتالية$\mathbf{A_4})\{x_n\}_{n=0}^\infty$

من التطبيقات الضبابية: $x_n: \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathscr{F}(\mathbb{R}^\mathrm{d})$ والمعرفة بالشكل: $x_0(t) \overset{\mathbb{R}^+ \; p.1}{=} x_0$ و

$$y_n(t) \overset{\mathbb{R}^+ \; p.1}{=} [(x_0 \oplus \int_0^t \tilde{f}\left(s, x_{n-1}(s)\right) ds] \ominus [(-1) \odot \int_0^t f\left(s, x_{n-1}(s)\right) ds]$$
$$\oplus \left\langle \sum_{k=1}^{\ell} \int_0^t h^k\left(s, x_{n-1}(s)\right) dW^K(s) \right\rangle \ ; n = 1,2, \dots \quad (16)$$

تكون معرفة جيداً.

ملاحظة: ليكن لدينا $x_0, f, \tilde{f}, h^k$ وذلك من أجل كل $k = 1,2,\dots,\ell$ تحقق الخواص $\mathbf{A_4}, \mathbf{A_3}, \mathbf{A_2}, \mathbf{A_1}, \mathbf{A_0}$ عندئذ فإن التطبيقات x_n الموصوفة في الخاصة $(\mathbf{A_4})$ هي عمليات عشوائية ضبابية و $d_\infty - \text{continuos}$ تنتمي الى $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^+ \times \Omega, \mathcal{N}, \mathscr{F}(\mathbb{R}^d))$

مبرهنة مساعدة: ليكن لدينا $x_0, f, \tilde{f}, h^k$ تحقق الخواص $\mathbf{A_4}, \mathbf{A_3}, \mathbf{A_2}, \mathbf{A_1}, \mathbf{A_0}$ ، عندئذٍ من أجل المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ المعرفة كما في (١٦)

فإن $\mathbb{E}\sup_{t\in\mathbb{R}^+} d_\infty^2(x_n(t), \langle 0\rangle) \le (C_1 + C_2\tilde{T}\mathbb{E}d_\infty^2(x_0, \langle 0\rangle))e^{C_2\tilde{T}}, n \in \mathbb{N}$

حيث $\int_{\mathbb{R}^+} K(s)ds]\, \mathbb{E}4(\tilde{T} + 2\ell) + C_1 = (\ell + 3)[\mathbb{E}d_\infty^2(x_0, \langle 0\rangle)$

و $C_2 = 4L(\ell + 3)(\tilde{T} + 2\ell)$

البرهان: بفرض أن $z_n(t) = \mathbb{E}\sup_{u\in[0,\infty)} d_\infty^2(x_n(u), \langle 0\rangle)$ حيث $t \in \mathbb{R}^+$ و $n \in \mathbb{N}$

وبتطبيق الخواص $\text{iv}, \text{iiv}, \text{v}$ على طرفي المساواة السابقة نجد أن:

$$z_n(t) = \mathbb{E}\sup_{u\in[0,\infty)} \; d_\infty^2([\,(x_0 \oplus \int_0^u \tilde{f}(s, x_{n-1}(s))ds$$

$$\ominus [(-1)\odot \int_0^u f\big((s, x_{n-1}(s)\big)ds \oplus \langle \sum_{k=1}^{\ell} \int_0^u h^k(s, x_{n-1}(s))dW^k(s)\rangle, \langle 0\rangle)$$

$$\le (\ell + 3)[\mathbb{E}d_\infty^2(x_0, \langle 0\rangle) \;\oplus \mathbb{E}\sup_{u\in[0,\infty)} d_\infty^2(\int_0^u \tilde{f}(s, x_{n-1}(s))ds\,, \langle 0\rangle)$$

$$\oplus\, \mathbb{E}\sup_{u\in[0,\infty)} d_\infty^2(\int_0^u f(s, x_{n-1}(s))ds\,, \langle 0\rangle)$$

$$\oplus \sum_{k=1}^{\ell} \mathbb{E} \sup_{u\in[0,\infty)} \left\| \int_0^u h^k(s, x_{n-1}(s)dW^k(s) \right\|^2]$$

وذلك من أجل $n \in \mathbb{N}, t \in [0, \infty)$ بالإضافة إلى ذلك فإن:

$$z_n(t)) \le (\ell + 3)[\mathbb{E}d_\infty^2(x_0, \langle 0\rangle) \oplus 2\mathbb{E}\sup_{u\in[0,\infty)} d_\infty^2(\int_0^u \tilde{f}(s, x_{n-1}(s))ds)\,, \int_0^u \tilde{f}(s, \langle 0\rangle)ds)$$

$$\oplus\, 2\mathbb{E}\sup_{u\in[0,\infty)} d_\infty^2(\int_0^u \tilde{f}(s, \langle 0\rangle)ds, \langle 0\rangle)$$

$$\oplus\, 2\mathbb{E}\sup_{u\in[0,\infty)} d_\infty^2(\int_0^u f(s, x_{n-1}(s))ds\,, \int_0^u f(s, \langle 0\rangle)ds)$$

$$\oplus\, 2\mathbb{E}\sup_{u\in[0,\infty)} d_\infty^2(\int_0^u f(s, \langle 0\rangle)ds, \langle 0\rangle)$$

$$\oplus\, 2\sum_{k=1}^{\ell} \mathbb{E} \sup_{u\in[0,\infty)} \left\| \int_0^u (h^k(s, x_{n-1}(s)) - h^k(s, \langle 0\rangle)dW^k(s) \right\|^2$$

$$\oplus\, 2\sum_{k=1}^{\ell} \mathbb{E} \sup_{u\in[0,\infty)} \left\| \int_0^u h^k(s, \langle 0\rangle)dW^k(s) \right\|^2]$$

وباستخدام الفرضية التالية: (ليكن $p \geq 1$ إذا كانت $x, y \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, P, \mathcal{K}(\mathbb{R}^d))$ حيث إن $\mathcal{L}^p\left(\Omega, \mathcal{A}, P, \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)\right) = \{F \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)\right): L^p - \text{integrally bounded} \text{هو} F\}$ حيث أن $t \in \mathbb{R}^+$

I تنتمي إلى $\mathscr{F}(\mathbb{R}^d)$ $\mathbb{R}^+ \times \Omega \ni (t, w) \mapsto \int_0^t x(s, w)ds \in$ $:\mathcal{L}^p\left(\Omega, \mathcal{A}, P, \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)\right)$

II العملية العشوائية الضبابية $(t, w) \mapsto \int_0^t x(s, w)ds$ هي $d_\infty - continuos$

III $\sup_{u\in[0,\infty)} d_\infty^p(\int_0^u x(s)ds , \int_0^u y(s)ds \overset{\mathbb{R}^+\ P.1}{\leq} t^{P-1} \int_0^t d_\infty^P\left(x(s), y(s)\right)ds$

IV $\sup_{u\in[0,\infty)} d_\infty^p(\int_0^u x(s)ds , \int_0^u y(s)ds \leq t^{P-1} \mathbb{E} \int_0^t d_\infty^P\left(x(s), y(s)\right)ds($

وتطبيق متراجحةDoob على طرفي المتراجحة الأخيرة نجد أن:

$$z_n(t)) \leq \left(\ell + 3\right)[\mathbb{E}d_\infty^2(x_0, \langle 0\rangle) \oplus 2t\mathbb{E} \int_0^t d_\infty^2(\tilde{f}(s, x_{n-1}(s)) , (\tilde{f}(s, \langle 0\rangle)ds$$

$$\oplus\, 2t\mathbb{E} \int_0^t d_\infty^2\, (\tilde{f}\, (s, \langle 0\rangle), \langle 0\rangle)ds, \oplus\, 2t\mathbb{E} \int_0^t d_\infty^2(f(s, x_{n-1}(s)) , (f(s, \langle 0\rangle))ds$$

$$\oplus\, 2t\mathbb{E} \int_0^t d_\infty^2\, (f(s, \langle 0\rangle, \langle 0\rangle))ds$$

$$\oplus\, 8 \sum_{k=1}^{\ell} \mathbb{E} \int_0^t \|h^k(s, x_{n-1}(s)) - h^k(s, \langle 0\rangle)\|^2\, ds$$

$$\oplus\, 8 \sum_{k=1}^{\ell} \mathbb{E} \int_0^t \|h^k(s, \langle 0\rangle)\|^2\, ds]$$

بتطبيق الخاصتين $(\mathbf{A_3})$ و$(\mathbf{A_2})$ نحصل على:

$$z_n(t)) \leq \left(\ell + 3\right)[\mathbb{E}d_\infty^2(x_0, \langle 0\rangle) \oplus 4(t + 2\ell)\mathbb{E} \int_0^t K(s)\, ds \oplus 4(t$$

$$+\, 2\ell)L\mathbb{E} \int_0^t d_\infty^2\, (x_{n-1}(s), \langle 0\rangle)ds] \oplus \leq C_1 \oplus C_2 \int_0^t z_{n-1}(s)\, ds$$

بواسطة المتراجحة الأخيرة يمكن أن نكتب:

$$\leq M_1 \oplus M_2 \int_0^t max_{1\leq n\leq k} z_{n-1}(s)ds \quad ; t \in \mathbb{R}^+ max_{1\leq n\leq k} z_n(t)$$

$$\leq (C_1 \oplus C_2\tilde{T}\mathbb{E}d_\infty^2\, (x_0, \langle 0\rangle) \oplus C_2 \int_0^t max_{1\leq n\leq k} z_n(s)ds\ ;\ t \in \mathbb{R}^+ max_{1\leq n\leq k} z_n(t)$$

من أجل $k \in \mathbb{N}$

بتطبيق متراجحةCornwall's نحصل على:

$$\leq [C_1 \oplus C_2\tilde{T}\mathbb{E}d_\infty^2\, (x_0, \langle 0\rangle)e^{C_2 t}\ ;\ t \in \mathbb{R}^+ max_{1\leq n\leq k} z_n(t)$$

وهذا يسمح لنا أن نشير أن $\leq [C_1 \oplus C_2\tilde{T}\mathbb{E}d_\infty^2\, (x_0, \langle 0\rangle)e^{C_2\tilde{T}} max_{1\leq n\leq k} z_n\left(\tilde{T}\right)$

<u>مبرهنة</u>: إذا كانتالشروط $\mathbf{A_0}, \mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \mathbf{A_3}, \mathbf{A_4}$ محققةمن أجل $x_0, f, \tilde{f}, h^k$ من أجل: $k = 1,2, \dots, \ell$ فإن المعادلة التفاضلية العشوائية الضبابية المتناظرة (١٦) تملك حل محلي وحيد.

البرهان: $\mathbb{E} \sup_{u\in[0,\infty)} d_\infty^2\left(x_n(u), x_{n-1}(u)\right) = z_n(t)$ من أجل $n \in \mathbb{N}$ و $t \in \mathbb{R}^+$

بتعويض كل بقيمته واستخدام الخواصiv،ix, v يمكن أن نكتب:

$$z_1(t) = \mathbb{E}\sup_{u\in[0,\infty)} d_\infty^2([(x_0 \oplus \int_0^u \tilde{f}(s,x_0)ds)$$

$$\ominus ((-1)\odot \int_0^u f(s,x_0)ds)] \oplus \langle \sum_{k=1}^{\ell} \int_0^u h^k(s,x_0)dW^k(s)\rangle , x_0)$$

$$\leq 2\mathbb{E}\sup_{u\in[0,\infty)} d_\infty^2(x_0 \oplus \int_0^u \tilde{f}(s,x_0)ds) \ominus ((-1)\odot \int_0^u f(s,x_0)ds) , x_0)$$

$$\oplus 2\mathbb{E}\sup_{u\in[0,\infty)} \left\| \sum_{k=1}^{\ell} \int_0^u h^k(s,x_0)dW^k(s) \right\|^2$$

$$\leq 4\mathbb{E}\sup_{u\in[0,\infty)} d_\infty^2(\int_0^u \tilde{f}(s,x_0)ds , \langle 0\rangle) \oplus 4\mathbb{E}\sup_{u\in[0,\infty)} d_\infty^2(\int_0^u f(s,x_0)ds , \langle 0\rangle)$$

$$\oplus 2\ell \sum_{k=1}^{\ell} \mathbb{E}\sup_{u\in[0,\infty)} \left\| \int_0^u h^k(s,x_0)dW^k(s) \right\|^2$$

باستخدام المبرهنة المساعدومتراجحةDoob's والخاصتين$(\mathbf{A_1}), (\mathbf{A_3})$من **تعريف ٢**نحصل على:

$$z_1(t) \leq 16L(t+l^2)t\mathbb{E}d_\infty^2(x_0,\langle 0\rangle) \oplus 16(t+l^2)\mathbb{E}\int_0^u K(s)ds \leq C_3$$

حيث$C_3 = 16\left(\tilde{T}+\ell^2\right)[L\tilde{T}\mathbb{E}d_\infty^2(x_0,\langle 0\rangle) + \mathbb{E}\int_{\mathbb{R}_+} K(s)ds] < \infty$

بالإضافة لذلك فإنه من أجل $n \in \mathbb{N}$ نحصلعلى:

$$z_{n+1}(t) \leq 8L\left(\tilde{T}+\ell^2\right)\int_0^t z_n(s)ds \; \ldots .(17)$$

وبالتالي يمكن أن نجد أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$فإن:

$$z_n(t) \leq C_3 \frac{\left[8L(\tilde{T}+l^2)t\right]^{n-1}}{(n-1)!} \quad ; t \in \mathbb{R}^+ \ldots \ldots .(18)$$

باستخدام متراجحةChebyshev'sوالمتراجحة (١٨) نحصل على:

$$P\left(\sup_{u\in[0,\infty)} d_\infty^2(x_n(u),x_{n-1}(u)) > \frac{1}{4^n}\right) \leq 4^n z_n(\tilde{T}) \leq 4C_3 \frac{[32L(\tilde{T}+l^2)\tilde{T}]^{n-1}}{(n-1)!}$$

وبما أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}[[32L(\tilde{T}+l^2)\tilde{T}]^{n-1}/(n-1)!$ متقاربة وبالتالي نجد أن:

$P\left(\sup_{u\in[0,\infty)} d_\infty(x_n(u),x_{n-1}(u) > \frac{1}{2^n}\right)$=٠

بشكل مشابه لما سبق نجد أنه يوجدعملية عشوائية ضبابيةxبحيث أن(لبالنسبةمستمرةعملية d_∞) x و $x \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega , \mathcal{N}, \mathscr{F}(\mathbb{R}^d))$ بحيث$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} d_\infty(x_n(t,w),x(t,w)) \xrightarrow{P.1} 0$ عندما $n \to$ ∞وتحقق $\mathbb{E}d_\infty^2(x_n(t),x(t)) \to 0$ من أجل$t \in \mathbb{R}^+$

الآن يجب أن نثبت أن x هو حل للمعادلة (١٦) لدينا:

$$\mathbb{E}d_\infty^2(x_n,[(x_0 \oplus \int_0^t \tilde{f}(s,x(s))ds)$$

$$\ominus\,((-1)\odot\int_0^t f\big(s,x(s)\big)ds)]\oplus\langle\sum_{k=1}^{\ell}\int_0^t h^k\big(s,x(s)\big)dW^k(s)\rangle)$$

$$\le 2\mathbb{E}d_\infty^2(x_0\oplus\int_0^t\tilde f\big(s,x_{n-1}(s)\big)ds)\ominus((-1)\odot\int_0^t f\big(s,x_{n-1}(s)\big)ds),(x_0$$

$$\oplus\int_0^t\tilde f\big(s,x(s)\big)ds)\ominus((-1)\odot\int_0^t f\big(s,x(s)\big)ds))$$

$$\le 4\mathbb{E}d_\infty^2(\int_0^t\tilde f\big(s,x_{n-1}(s)\big)ds\,,\int_0^t\tilde f\big(s,x(s)\big)ds)$$

$$\oplus\,4\mathbb{E}d_\infty^2(\int_0^t f\big(s,x_{n-1}(s)\big)ds\,,\int_0^t f\big(s,x(s)\big)ds)$$

$$\oplus\,2\ell\sum_{k=1}^{\ell}\mathbb{E}\left\|\int_0^t\Big(h^k\big(s,x_{n-1}(s)\big)-h^k\big(s,x(s)\big)\Big)dW^k(s)\right\|^2$$

عندئذ وفقاً للمبرهنة المساعدةوالخاصة $(\mathbf{A_2})$ونظريةتقارب Lebesgue's نحصل على:

$$\mathbb{E}d_\infty^2(x_n,[\Big(x_0\oplus\int_0^t\tilde f\big(s,x(s)\big)ds\Big)$$

$$\ominus\,((-1)\odot\int_0^t f\big(s,x(s)\big)ds)]\oplus\langle\sum_{k=1}^{\ell}\int_0^t h^k\big(s,x(s)\big)dW^k(s)\rangle)$$

$$\le 2L\left(4\tilde T+\ell^2\right)\int_{\mathbb{R}_+}\mathbb{E}d_\infty^2\big(x_{n-1}(s),x(s)\big)ds\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

وبالتالي من أجل $t\in\mathbb{R}^+$ نجد أن:

$$\mathbb{E}d_\infty^2(x(t),[(x_0\oplus\int_0^t\tilde f(s,x(s))ds)$$

$$\ominus\,((-1)\odot\int_0^t f\big(s,x(s)\big)ds)]\oplus\langle\sum_{k=1}^{\ell}\int_0^t h^k\big(s,x(s)\big)dW^k(s)\rangle)=0$$

إذاً من أجل كل $t\in\mathbb{R}^+$ نكتب:

$$d_\infty(x(t),[(x_0\oplus\int_0^t\tilde f(s,x(s))ds)$$

$$\ominus\,((-1)\odot\int_0^t f\big(s,x(s)\big)ds)]\oplus\langle\sum_{k=1}^{\ell}\int_0^t h^k\big(s,x(s)\big)dW^k(s)\rangle)\overset{P.1}{=}0$$

وبما أن العملية$\big($لبالنسبةمستمرةعملية$d_\infty\big)$ x نحصل على:

$$d_\infty(x(t),[(x_0\oplus\int_0^t\tilde f(s,x(s))ds)$$

$$\ominus\,((-1)\odot\int_0^t f\big(s,x(s)\big)ds)]\oplus\langle\sum_{k=1}^{\ell}\int_0^t h^k\big(s,x(s)\big)dW^k(s)\rangle)\overset{\mathbb{R}^+\,P.1}{=}0$$

وهذا يثبتأن $x:\mathbb{R}^+\times\Omega\to\mathscr{F}(\mathbb{R}^d)$ هو حل محلي لـ (١٦)

الآنلنبرهن هذا الحل وحيد من أجل ذلك لنفرضأن $y:\mathbb{R}^+\times\Omega\to\mathscr{F}(\mathbb{R}^d)$ حل آخر للمعادلة التفاضلية العشوائية الضبابية المتناظرة (١٦)

ولنكتب: $z(t)=\mathbb{E}\sup_{u\in[0,\infty)} d_\infty^2\big(x(u),y(u)\big)$ من أجل $t\in\mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} z(t) \le\ & 4\mathbb{E}d_\infty^2\Big(\int_0^t \tilde{f}\big(s,x(s)\big)ds\,,\int_0^t \tilde{f}\big(s,y(s)\big)ds\Big)\\ & \oplus 4\mathbb{E}d_\infty^2\Big(\int_0^t f\big(s,x(s)\big)ds\,,\int_0^t f\big(s,y(s)\big)ds\Big)\\ & \oplus 2l\sum_{k=1}^{\ell}\mathbb{E}\left\|\int_0^t \Big(h^k\big(s,x(s)\big)-h^k\big(s,y(s)\big)\Big)dW^k(s)\right\|^2\\ & \le 8L\left(\tilde{T}+\ell^2\right)\int_0^t K(s)ds \end{aligned}$$

باستخدام متراجحةGronwall's نحصل على $z(t)\le 0$ من أجل $t\in\mathbb{R}^+$نستنتج أن:

$\mathbb{E}\sup_{t\in\mathbb{R}^+} d_\infty^2\big(x(t),y(t)\big)\overset{P.1}{=}0$أي أن الحل x وحيد.

النتائج والتوصيات:

توصلنا في هذا البحث لكتابة المعادلة التفاضلية العشوائية الضبابية المتناظرة بشكلها التفاضلي والتكاملي وأثبتنا أنه في حالة كانت متغيرات هذه المعادلة عشوائية ضبابية متعددة القيم ومعاملاتها خاضعة لشرط ليبتشز الشامل فإن لها حل وحيد على$[0,\infty)$.ونوصي بأن يتم دراسة حلول هذه المعادلات عندما تكون معاملاتها تخضع لشرط ليبتشز المحلي والمعمم على $[0,\infty)$.

المراجع:

[1] M.T. Malinowski, *symmetric Fuzzystochastic differential equations*, (2020), symmetry 2020,12,819.

[2] M.T. Malinowski and R.P. Agarwal, *On solutions to set-valued and fuzzy stochastic differential equations*, J Franklin Inst 352. (2015).

[3] Malinowski, M.T. *Strong Solutions to Stochastic Fuzzy Differential Equations of Itô Typ*e. Math. (2012), Comput. Model,55, 918–928.

[4] M.T. Malinowski, *Fuzzy and set-valued stochastic differential equations with local Lipschitz condition*. (2015), IEEE Trans Fuzzy Syst 23, 1891–1898.

[5] M.T. Malinowski, *Fuzzy and stochastic differential equations of decreasing fuzziness: Non-Lipschitz coefficients*, (2016), Journal of Intelligent & Fuzzy systems 31,13-25.

[6] Malinowski, M.*T. Some Properties of Strong Solutions to Stochastic Fuzzy Differential Equations*. (2013) Inf. Sci., 252, 62–80.