مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (8) العدد (1) 2024

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (8) No. (1) 2024

بعض موضوعات الفصل من النمط β_S

أ.د.عدنان ظريف*

د.براءه عفيصه**

رولا عمر عبد الرحيم***

(تاريخ الإيداع ١٨/١٢/ ٢٠٢٣ – تاريخ النشر ١١/٣/ ٢٠٢٤)

□ ملخّص □

ليكن (X, τ) فضاء تبولوجي ولتكن A مجموعة جزئية منه، عندئذٍ: يقال بأنَّ A مجموعة β_S _مفتوحة فيه إذا وفقط إذا تحقق الشرط: $\exists F \epsilon SC(X)\ ; x \in F \subseteq A$

في هذا البحث وبالاعتماد على هذا النمط من المجموعات المفتوحة قمنا بتعريف موضوعات فصل جديدة وهي $\beta_S\ \ T_0-$ و β_S-T_1 و $\beta_S\ -T_2$، كما درسنا العلاقة التي تربط بين هذه الموضوعات وموضوعات الفصل المعروفة سابقاً ومن أهم ما توصلنا إليه هو:

١- إن صفة كون الفضاء (X, τ) هو β_S-T_i ليست صفة وراثية بينما هي صفة تبولوجية حيث $i = 0,1,2$

٢- إن كل فضاء T_i هو فضاء β_S-T_i حيث $i = 1,2$ أما العكس غير صحيح بصورة عامة، وفي حالة $i = 0$ وجدنا أنه ليس من الضروري أن يكون كل فضاء T_0 هو فضاء β_S-T_0 والعكس غير صحيح بصورة عامة.

الكلمات المفتاحية: المجموعة المفتوحة من النوع β_S، المجموعة المغلقة من النوع β_S، الفضاءات β_S-T_i حيث $i = 0,1,2$، الدالة المستمرة من النوع β_S، التطبيق β_S _هومومرفيزم.

*أستاذ – قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية. البريد الإلكتروني:
Dr.AdnanZarif@tishreen.edu.sy

**مدرسة – قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية. البريد الإلكتروني: baraaafisa@tishreen.edu.sy

*** طالبة دراسات عليا(ماجستير) – قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية. البريد الإلكتروني:-roula.abdal
raheem@tishreen.edu.sy

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (8) العدد (1) 2024

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (8) No. (1) 2024

Some of β_s _ Separation Axioms

Dr. Adnan Zarif*
Dr. Baraa Afisa**
Roula Abd Al_Raheem***

(Received 18/12/2023.Accepted 11/3/2024)

□ABSTRACT □

Let (X,τ) be a topological space and let A be a subset of it, A is said to be a β_s – open set if and only if following condition is true: $\exists F \epsilon SC(X); x \in F \subseteq A$.

In this research, and based on this type of open sets, we defined a new Separation axiom, which are: β_s-T_0 , β_s-T_1 , β_s-T_2 . we also studied the relationship between these axioms and Separation axioms are known previously, the most important is:

1. the property of a space being β_s-T_i is not hereditary property, but it is a topological property where i=0,1,2.

2. every space T_i is a space β_s-T_i where $i = 1,2$ but the converse is not right in general, in the case of $i = 0$ we found that it is not necessary for every space T_0 to be a space

β_s-T_0 , and the converse is not right in general.

Keywords: topological space, β_s - open set , β_s - closed set , spaces β_s -T_i where $i = 0,1,2$, β_s- continuous function , β_s- homeomorphism function.

* Professor, Mathematics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria. E-mail:Dr.AdnanZarif@tishreen.edu.sy
**Assistant Professor, Mathematics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria. E-mail: baraaafisa@tishreen.edu.sy
***Postgraduate Student, Mathematics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria. E-mail: roula.abdal-raheem@tishreen.edu.sy

١. مقدمة (introduction):

تعد المجموعات المفتوحة والمغلقة اللبنة الرئيسية في بناء التبولوجيا والفضاء التبولوجي ، فقد قدم الباحثون أنماطاً مختلفة حيث عرف الباحث Levin [1] المجموعة نصف المفتوحة في عام 1963، وعرف Abd EL-Monsef وآخرون مفهوم المجموعة قبل المفتوحة عام 1982 [2] ، وفي عام 1983 عرفوا مفهوم المجموعة المفتوحة من النوع β ، وثم درسوا العلاقة بين هذه المجموعات [3] ، كما عرفت زلوخ محمود وآخرون عام 2022 المجموعة المفتوحة من النوع β_S ودرست العلاقة بينها وبين المجموعات السابقة [15] وفي عام 2007 وضع الباحث shareef تعريف المجموعة المفتوحة من النوع S_p [7] . ووضع الباحث khalaf تعريف المجموعة المفتوحة من النوع S_β عام 2007 [8] بالإضافة لتعريفه المجموعة المفتوحة من النوع p_S عام 2009 [9]. تم تعريف أنماط جديدة من موضوعات الفصل بالاعتماد على هذه الأنواع من المجموعات ودراسة خصائصها والعلاقات فيما بينها و يتضح ذلك في الأعمال [4] ، [5] ، [6] ، [10] ، [11] ، [12] ،[13] ، [14].وفي بحثنا هذا قمنا بتعريف موضوعات فصل جديدة بالاعتماد على المجموعة المفتوحة من النوع β_S ودرسنا أهم خصائصها والعلاقات فيما بينها وبين موضوعات فصل معرفة سابقاً.

٢. أهمية البحث وأهدافه:

تكمن أهمية البحث في كونه يقدم إضافة في مجال موضوعات الفصل في الفضاءات التبولوجية وذلك بالاعتماد على المجموعات المفتوحة من النوع β_S ، ويهدف البحث لدراسة موضوعات الفصل من النوع β_S وإيجاد العلاقة بينها وبين موضوعات الفصل المعروفة سابقاً.

٣. طرائق البحث ومواده:

يعتمد هذا البحث على بعض المفاهيم الأساسية في التبولوجيا العامة ويركز بشكل خاص ما يتعلق بموضوعات الفصل.

١.٣ بعض الرموز والمصطلحات المستخدمة في البحث:

(X,τ) فضاء تبولوجي

β_S O(X) المجموعات المفتوحة من النوع β_S

cl(A) لصاقة المجموعة A

int(A) داخلية المجموعة A

β_S cl(A) اللصاقة من النوع β_S للمجموعة A

β_S int(A) الداخلية من النوع β_S للمجموعة A

β_S D(A) المشتقة من النوع β_S للمجموعة A

β_S V(A) المجاورة من النوع β_S للمجموعة A

$S-T_i$ حيث (i=0,1,2) موضوعات الفصل من النوع S

$\beta -T_i$ حيث (i=0,1,2) موضوعات الفصل من النوع β

$\beta_S -T_i$ حيث (i=0,1,2) موضوعات الفصل من النوع β_S

f _ هومومرفيوم من النوع β_S

٢.٣ التعاريف الأساسية:

تعريف1 [1]: يقال عن المجموعة A في الفضاء التبولوجي (X,τ) إنها مجموعة نصف مفتوحة إذا تحققت العلاقة الآتية: $A \subseteq cl\ (int(A))$ ويرمز لأسرة المجموعات نصف المفتوحة بالرمز SO(X) .

تعريف2 [2]: يقال عن المجموعة A في الفضاء التبولوجي (X,τ) إنها مجموعة مفتوحة من النوع β إذا تحققت العلاقة الآتية: $A \subseteq cl\ (int(cl(A)))$ ويرمز لأسرة المجموعات المفتوحة من النوع β بالرمز β O(X) .

تعريف٣ [15]: يقال عن المجموعة A المفتوحة من النوع β في الفضاء التبولوجي (X,τ) إنها مجموعة مفتوحة من النوع β_S إذا كان: من أجل كل $x \in A$ توجد مجموعة نصف مغلقة ولتكن F بحيث أن: $x \in F \subseteq A$

ونرمز لأسرة المجموعات المفتوحة من النوع β_S بالرمز β_S O(X) .

تعريف4 [4]: يقال عن الفضاء التبولوجي (X,τ) إنه فضاء $S-T_0$ إذا كان من أجل كل نقطتين مختلفتين x, yمن نقاطه توجد مجموعة نصف مفتوحة في (X,τ) بحيث تنتمي لها إحدى النقطتين x أو y دون الأخرى.

تعريف٥ [4]: يقال عن الفضاء التبولوجي (X,τ) إنه فضاء $S-T_1$ إذا كان من أجل كل نقطتين مختلفتين x,y من نقاطه توجد مجموعتين نصف مفتوحتين ولتكن G_x و G_y في (X,τ) يحققان: $x \in G_x$, $y \notin G_x$ و $y \in G_y$, $x \notin G_y$.

تعريف٦ [4]: يقال عن الفضاء التبولوجي (X,τ) إنه فضاء $S-T_2$ إذا كان من أجل كل نقطتين مختلفتين x,y من نقاطه توجد مجموعتين نصف مفتوحتين ولتكن G_x و G_y في (X,τ) بحيث أن: $G_x . \cap G_y = \emptyset$

تعريف٧ [6]: يقال عن الفضاء التبولوجي (X,τ) إنه فضاء $\beta - T_0$ إذا كان من أجل كل نقطتين مختلفتين x,y من نقاطه توجد مجموعة مفتوحة من النوع β في (X,τ) بحيث تنتمي لها إحدى النقطتين x أو y دون الأخرى.

تعريف8 [6]: يقال عن الفضاء التبولوجي (X,τ) إنه فضاء $\beta - T_1$ إذا كان من أجل كل نقطتين مختلفتين x,y من نقاطه توجد مجموعتين مفتوحتين من النوع β في (X,τ) ولتكن G_x و G_y يحققان: $x \in G_x$, $y \notin G_x$ و $y \in G_y$, $x \notin G_y$.

تعريف٩ [6]: يقال عن الفضاء التبولوجي (X,τ) إنه فضاء $\beta - T_2$ إذا كان من أجل كل نقطتين مختلفتين x,y من نقاطه توجد مجموعتين مفتوحتين من النوع β ولتكن G_x و G_y في (X,τ) بحيث أن: $G_x \cap G_y = \emptyset$.

تعريف١٠ [15]: لتكن A مجموعة من نقاط فضاء تبولوجي (X,τ) ، يقال عن النقطة x من نقاطه إنها نقطة لاصقة من النوع β_S بالمجموعة A إذا تحقق الشرط: $u \in \beta_S$ O(X) ; $A \cap u \neq \emptyset$, تسمى مجموعة جميع النقاط اللاصقة من النوع β_S بمجموعة A بلصاقة المجموعة من النوع β_S ويرمز لها بالرمز β_S cl(A) .

تعريف١١ [15]: لتكن A مجموعة من نقاط فضاء تبولوجي (X,τ) ، يقال عن A إنها مجاورة من النوع β_S لنقطة x من نقاط الفضاء إذا وجدت مجموعة مفتوحة من النوع β_S مثل u بحيث يكون: $x \in u \subseteq A$ ويرمز لأسرة جميع المجاورات من النوع β_S بالرمز β_S V(x) .

تعريف١٢ [15]: لتكن A مجموعة من نقاط فضاء تبولوجي (X,τ) ، يقال عن النقطة x من نقاطه إنها نقطة داخلية من النوع β_S للمجموعة A إذا تحقق الشرط: $\exists\ u \in \beta_S$ O(X) ; $x \in u \subseteq A$

تعريف١٣ [15]: ليكن (X,τ) و (Y,σ) فضاءين تبولوجيين، ولتكن الدالة $f: (X,\tau) \rightarrow (Y,\sigma)$ ، عندئذ يقال عن f إنها دالة مستمرة من النوع β_S إذا كانت $f^{-1}(v)$ مجموعة مفتوحة من النوع β_S في (X,τ) من أجل كل v مجموعة مفتوحة في الفضاء (Y,σ) .

٤. النتائج والمناقشة:

تعريف ١.٤: نقول عن الفضاء التبولوجي (X,τ) إنه فضاء β_s-T_0 إذا كان من أجل كل نقطتين مختلفتين x,y من نقاطه توجد مجموعة مفتوحة من النوع β_s في (X,τ) بحيث تنتمي لها إحدى النقطتين x أو y دون الأخرى.

تعريف ٢.٤: نقول عن الفضاء التبولوجي (X,τ) إنه فضاء β_s-T_1 إذا كان من أجل كل نقطتين مختلفتين x,y من نقاطه توجد مجموعتين مفتوحتين من النوع β_s في (X,τ) ولتكن G_x و G_y يحققان: G_x , $x\in G_x$ و $y\notin G_x$, $y\in G_y$, $x\notin G_y$.

تعريف ٣.٤: نقول عن الفضاء التبولوجي (X,τ) إنه فضاء β_s-T_2 إذا كان من أجل كل نقطتين مختلفتين x,y من نقاطه توجد مجموعتين مفتوحتين من النوع β_s في (X,τ) ولتكن G_x و G_y بحيث أن: $G_x\cap G_y=\emptyset$.

تعريف ٤.٤: لتكن A مجموعة من نقاط فضاء تبولوجي (X,τ)، نقول عن النقطة x من نقاطه إنها نقطة تراكم من النوع β_s للمجموعة A إذا تحقق الشرطين الآتيين: $A\cap u\neq\emptyset$ & $A\cap u\neq\{x\}$ من أجل أية مجاورة مفتوحة من النوع β_s u ل x ، نسمي مجموعة جميع نقاط التراكم من النوع β_s للمجموعة A بمشتقة المجموعة من النوع β_s ، ونرمز لها بالرمز $D(A)$ β_s .

تعريف ٥.٤: ليكن (X,τ) و(Y,σ)فضاءين تبولوجيين، ولتكن الدالة $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ ، عندئذ نقول عن الدالة f إنها دالةβ_s_هومومرفيزمية إذا حققت الشروط الآتية:

- f تقابل
- الدالة f مستمرة من النوع β_s على X
- الدالة العكسية f^{-1} للدالة f مستمرة من النوع β_s علىY .

مبرهنة (1): ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي كيفي، عندئذ تكون الشروط الآتية متكافئة:

١- (X,τ) فضاء β_s-T_0

٢- من أجل كل نقطتين مختلفتين x,y من نقاطه يكون: $\beta_s\,cl(\{x\})\neq\beta_s\,cl(\{y\})$

٣- من أجل كل نقطتين مختلفتين x,y من نقاطه إما $y\notin\beta_s\,cl(\{x\})$ أو $x\notin\beta_s\,cl(\{y\})$

البرهان:

$1\Leftarrow 2$: بفرض أن (X,τ) فضاء β_s-T_0 وبالتالي من أجل أي نقطتين مختلفتين x و y من نقاطه، توجد مجموعة β_s _ مفتوحة ولتكن G_x بحيث أن $x\in G_x$, $y\notin G_x$ ومنه $\{y\}\cap G_x=\emptyset$ وبما أن $G_x\in\beta_s O(X)$

و $x\in G_x$ أي أن $G_x\in\beta_s V(x)$ وبحسب تعريف النقطة اللاصقة من النوع β_s بالمجموعة نجد أن

$x\notin\beta_s\,cl(\{y\})$ ، من جهة ثانية $x\in\{x\}\subseteq\beta_s\,cl(\{x\})$ أي أن $x\in\beta_s\,cl(\{x\})$ وبمراعاة الاختيار الكيفي ل x نجد أن: $\beta_s\,cl(\{x\})\neq\beta_s\,cl(\{y\})$

$2 \Leftarrow 3$: بفرض أن β_S cl({x})≠ β_S cl({y}) من أجل كل نقطتين مختلفتين x,y من نقاط (X,τ) نفرض جدلا أن β_S cl({y}) x∈ و β_S cl({x}) ∈y هذا يعني أن: (*)_ {y} ⊆ β_S cl({x}) &
{x} ⊆ β_S cl({y}) وبأخذ اللصاقة من النوع β_S للعلاقة (*) نحصل على:
β_S cl({y}) ⊆ β_S cl(β_S cl({x}))_(**) وبما أن β_S cl({x}) مجموعة β_S _مغلقة فإن
β_S cl(β_S cl({x})) = β_S cl({x}) بالعودة للعلاقة (**)
نجد أن β_S cl({y}) ⊆ β_S cl({x})_ (I) بطريقة مشابهة نجد أن β_S cl({x}) ⊆ β_S cl({y}) _(II) من العلاقتين (I) و (II) نجد أن β_S cl({x})= β_S cl({y}) وهذا تناقض مع الفرض الجدلي الخاطئ ومنه إما β_S cl({x}) ∌ y أو x ∉ β_S cl({y})

$3 \Leftarrow 1$: بفرض أن إما y ∉ β_S cl({x}) أو x ∉ β_S cl({y}) من أجل كل نقطتين مختلفتين x,y من نقاط (X,τ) ولنبرهن أن (X,τ) فضاء $\beta_S -T_0$ الآن لنأخذ x ∉ β_S cl({y}) عندئذ x ∈ X \ β_S cl({y}) وبما أن β_S cl({y}) مجموعة β_S _مغلقة فإن X \ β_S cl({y}) مجموعة β_S _ مفتوحة وبوضع
G_x = X \ β_S cl({y}) نجد أن x∈ G_x , y∉ G_x بالتالي (X,τ) فضاء $\beta_S -T_0$

ملاحظة (1): إن صفة كون الفضاء (X,τ) فضاء $\beta_S -T_0$ ليست صفة وراثية
سنوضح ذلك من خلال عرض المثال الآتي:
مثال(1): لنأخذ المجموعة X ={a,b,c} مع التبولوجيا τ ={ X, ∅, {a},{b},{a,b}} نجد أن :
β_S O(X) ={ X, ∅, {a},{b},{a,b},{a,c},{b,c}} الفضاء X فضاء $\beta_S -T_0$
الآن لنأخذ المجموعة y={b,c} عندئذ τ_y ={y, ∅ ،{b}} و β_S O(y)= {y, ∅ }
الفضاء (y, τ_y) ليس فضاء $\beta_S -T_0$.

مبرهنة (2): إن صفة كون الفضاء (X,τ) فضاء $\beta_S -T_0$ هي صفة تبولوجية
البرهان:
نفرض أن (X,τ) فضاء تبولوجي كيفي بحيث أنه فضاء $\beta_S -T_0$ و (Y,σ) فضاء تبولوجي كيفي بحيث أن (X,τ) و (Y,σ) فضاءين هوميومورفيين من النوع β_S ولنبرهن أن الفضاء (Y,σ) فضاء $\beta_S -T_0$ ، لتكن x^* و y^* نقطتين كيفيتين من نقاط الفضاء (Y,σ) ولتكن G^* مجموعة β_S _ مفتوحة فيه بحيث تنتمي لها إحدى النقطتين x^* أو y^* دون الأخرى وبما أن (X,τ) و (Y,σ) فضاءين هوميومورفيين من النوع β_S فإنه يوجد هومومرفيزم من النوع β_S مثل $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ ، وبما أن $x^*, y^* \in$ Y و f غامر فإنه يوجد
y، x ∈ X بحيث يكون $f(x)=x^*$ و $f(y)=y^*$ وبما أن $x^*\neq y^*$ فإن $f(x)\neq f(y)$ وبما أن f متباين فإن $x\neq y$ ، ومنه حصلنا على $x\neq y$ من نقاط X والذي هو $\beta_S -T_0$ فرضا لذلك توجد مجموعة β_S _ مفتوحة ولتكن G_x بحيث أن x∈ G_x, y∉ G_x وبالتالي فإن $f(x)\epsilon f(G_x)$ و $f(y)\notin f(G_x)$ هذا يعني أن $x^*\in f(G_x)$ و $y^*\notin f(G_x)$ وبما أن f هومومرفيزم من النوع β_S فإن f مفتوح من النوع β_S و G_x مجموعة β_S _ مفتوحة في X لذلك نجد أن $f(G_x)$ مجموعة β_S _ مفتوحة في Y ومنه وجدت مجموعة β_S _ مفتوحة ولتكن $f(G_x)$ بحيث أن $x^*\in f(G_x)$ و $y^*\notin f(G_x)$ وبالتالي نجد أن (Y,σ) فضاء $\beta_S -T_0$ أيضا

مبرهنة(3): ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً كيفياً ، عندئذ:

يكون الفضاء (X,τ) فضاء $\beta_s -T_1$ إذا وفقط إذا كانت $\{x\}$ مجموعة مغلقة من النوع β_s من أجل كل $x \in X$

البرهان: $\Leftarrow$): لزوم الشرط

لتكن $x \in X$ نقطة كيفية وy نقطة كيفية من المجموعة $X \setminus \{x\}$ عندئذ نجد أن $x \neq y$ وبحسب الفرض فإنه توجد مجموعتين β_s _ مفتوحتين مثل G_x و G_y تحققان: $x\in G_x$, $y\notin G_x$ & $y \in G_y$, $x\notin G_y$

بالتالي إن $y \in G_y \subseteq X \setminus \{x\}$ وهذا يعني أن $y \in \beta_s \operatorname{in} t(X \setminus \{x\})$ وبمراعاة الاختيار الكيفي للنقطة y نجد أن $X \setminus \{x\} \subseteq \beta_s \operatorname{in} t(X \setminus \{x\})$ وبما أن $\beta_s \operatorname{in} t(X \setminus \{x\}) \subseteq X \setminus \{x\}$ علاقة محققة دوما

فإن $\beta_s \operatorname{in} t(X \setminus \{x\}) = X \setminus \{x\}$ وعليه نجد أن $X \setminus \{x\}$ مجموعة β_s _ مفتوحة وبالتالي $\{x\}$ مجموعة β_s _مغلقة من أجل كل $x \in X$

$\Rightarrow$): كفاية الشرط

لتكن x و y نقطتين مختلفتين من نقاط X ، عندئذ وبحسب الفرض $\{x\}$ مجموعة مغلقة من النوع β_s من أجل كل $x \in X$ ، وبما أن $x \neq y$ فإن $y \notin \{x\}$ ومنه $y \in X \setminus \{x\}$ و $x \notin X \setminus \{x\}$ وبالمثل نجد أن

$x \in X \setminus \{y\}$ و $y \notin X \setminus \{y\}$ وبملاحظة أن $X \setminus \{y\}$ و $X \setminus \{x\}$ مجموعتين β_s _ مفتوحتين نجد أن الفضاء (X,τ) فضاء $\beta_s -T_1$

ملاحظة (2): إن صفة كون الفضاء (X,τ) فضاء $\beta_s -T_1$ ليست صفة وراثية

سنوضح ذلك من خلال عرض المثال الآتي:

مثال (2): لنأخذ المجموعة $X = \{1,2,3,4\}$ مع التبولوجيا

$\tau = \{ X, \emptyset, \{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$ نجد أن:

$\beta_s O(X)= \{ X, \emptyset, \{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\},\{1,4\},\{2,4\},\{3,4\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}$،

الفضاء (X,τ) فضاء $\beta_s -T_1$ ، لنأخذ المجموعة $y = \{3,4\}$ عندئذ:

$\tau_y = \{y, \emptyset , \{3\}\}$ و $\beta_s O(y) = \{ y, \emptyset \}$ ومنه الفضاء (y , τ_y) ليس فضاء $\beta_s -T_1$

نتيجة (1): ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً كيفياً، عندئذٍ:

إذا كان X فضاء $S-T_1$ بالتالي فإن $\beta_S O(X) = \beta O(X)$

البرهان:

لدينا (I) _ $\beta_S O(X) \subseteq \beta O(X)$ علاقة محققة دوما، لنبرهن الاحتواء المعاكس

لتكن $A \in \beta O(X)$ ، نميز حالتين:

- إذا كانت $A = \phi$ فإن $A \in \beta_S O(X)$ ومنه تم المطلوب

▪ إذا كانت $A \neq \phi$ ، بالتالي من أجل كل $x \in \mathrm{X}$ وبما أن X فضاء $\mathrm{S}-T_1$ ومنه وحسب مبرهنة [14] نجد أن $\{x\}$ مجموعة S _ مغلقة ومنه $x \in \{x\} \subseteq A$ وعليه فإن A مجموعة β_S _مفتوحة

وبمراعاة الاختيار الكيفي لA نجد أن (II) _ $\beta O(\mathrm{X}) \subseteq \beta_S O(\mathrm{X})$ بالتالي ومن العلاقتين (I) و (II) نجد أن $\beta_S O(\mathrm{X}) = \beta O(\mathrm{X})$ وهو المطلوب

تمهيدية (1): ليكن $f: (\mathrm{X}, \tau) \to (Y, \sigma)$ تابعاً كيفياً، عندئذٍ:

f تابع مغلق من النوع β_S إذا وفقط إذا كان $\forall A \subseteq \mathrm{X} : \beta_S cl\big(f(A)\big) \subseteq f\big(\beta_S cl(A)\big)$

البرهان: $\Leftarrow$): بفرض أن f تابع مغلق من النوع β_S وأن A مجموعة كيفية من نقاط (X, τ) ولنبرهن أن $\beta_S cl\big(f(A)\big) \subseteq f\big(\beta_S cl(A)\big)$ وبما أن (*) _ $A \subseteq \beta_S cl(A)$ علاقة محققة دوما

بالتالي بأخذ الصورة المباشرة لطرفي العلاقة * نجد أن: (I) _ $\beta_S cl\big(f(A)\big) \subseteq \beta_S cl\big(f(\beta_S cl(A))\big)$ وبما أن $\beta_S cl(A)$ مجموعة β_S _مغلقة في (X, τ) والتابع f مغلق من النوع β_S فرضا فإن المجموعة $f\big(\beta_S cl(A)\big)$ مجموعة β_S _مغلقة في (Y, σ) لذلك نجد أن $\beta_S cl\big(f(\beta_S cl(A))\big) = f\big(\beta_S cl(A)\big)$ بالتعويض في العلاقة (I) نجد أن $\beta_S cl\big(f(A)\big) \subseteq f\big(\beta_S cl(A)\big)$

$\Rightarrow$): لتكن A مجموعة β_S _مغلقة كيفية في (X, τ) عندئذ نجد أن $\beta_S cl(A) = A$ حسب النظرية (٢.٣.١) في [15] وبالتالي

(II)_ $f(A) = f\big(\beta_S cl(A)\big)$ وبتطبيق الفرض على المجموعة A نجد أن

(III)_ $\big(\beta_S cl\big(f(A)\big) \subseteq f\big(\beta_S cl(A)\big)$ ومنه نعوض العلاقة (II) في العلاقة (III) فنجد أن

$\beta_S cl\big(f(A)\big) \subseteq f(A)$ ولكن $f(A) \subseteq \beta_S cl\big(f(A)\big)$ علاقة محققة دوما وعليه فإن

$f(A) = \beta_S cl\big(f(A)\big)$ هذا يعني أن $f(A)$ مجموعة β_S _مغلقة في (Y, σ) وبمراعاة الاختيار الكيفي ل A نجد أن التابع f مغلق من النوع β_S

تمهيدية (2): ليكن $f: (\mathrm{X}, \tau) \to (Y, \sigma)$ تقابلاً عندئذٍ:

f هومومرفيزم من النوع β_S إذا وفقط إذا كان f مستمر من النوع β_S ومغلق من النوع β_S

البرهان: $\Leftarrow$): لزوم الشرط

من شروط f أنه هومومرفيزم من النوع β_S نجد أنه مستمر من النوع β_S ، الآن لنبرهن أنه مغلق من النوع β_S لتكن A مجموعة مغلقة من النوع β_S في (X, τ)

بالتالي فإن $\beta_S cl(A) = A$ ولنبرهن أن (*) _ $f(A) = \beta_S Cl[f(A)]$

لدينا (I)_ $f(A) \subseteq \beta_S cl[f(A)]$ علاقة محققة دوما بقي أن نبرهن الاحتواء المعاكس:

$$A \subseteq \beta_S cl(A) \Rightarrow f(A) \subseteq f\big(\beta_S cl(A)\big) \Rightarrow \beta_S cl\big(f(A)\big) \subseteq \beta_S cl\Big(f\big(\beta_S cl(A)\big)\Big) \subseteq \beta_S cl\Big(\beta_S cl\big(f(A)\big)\Big) = f(A)$$

بالتالي (II) _ $\beta_S cl[f(A)] \subseteq f(A)$ من العلاقتين (I) و (II) نجد أن العلاقة (*) محققة ومنه $f(A)$ مجموعة مغلقة من النوع β_S في (Y, σ) وعليه فإن f مغلق من النوع β_S

$\Rightarrow$): كفاية الشرط

لدينا بالفرض f تقابل و f مستمر من النوع β_S على X بقي أن نبرهن أن f^{-1} مستمر من النوع β_S على Y لتكن B مجموعة β_S _مغلقة في (X, τ) عندئذ $f(B) = (f^{-1})^{-1}(B)$ علينا أن نبرهن أن $f(B)$ مجموعة

β_s _ مغلقة في (Y,σ) بما أن B مجموعة β_s _مغلقة في (X,τ) فإن $\beta_s cl(B)=B$ حسب النظرية

(٢.٣.١) في [15] والتمهيدية (1) نجد أن $f(B)=\beta_s Cl[f(B)]$ بالتالي فإن $f(B)$ مجموعة β_s _ مغلقة في (Y,σ) وبمراعاة الاختيار الكيفي ل Bنجد أن f^{-1} مستمر من النوع β_s على Y وعليه فإن f هومومرفيزم من النوع β_s

مبرهنة (4): إن صفة كون الفضاء التبولوجي (X,τ) فضاء $\beta_s - T_1$ هي صفة تبولوجية

البرهان:

بفرض أن (X,τ) و (Y,σ) فضاءين تبولوجيين كيفيين هوميومورفيين من النوع β_s أي بينهما هومومرفيزم من النوع β_s واحد على الأقل بحيث أن (X,τ) مثلا فضاء $\beta_s - T_1$ ولنبرهن أن (Y,σ) فضاء $\beta_s - T_1$ ، لتكن $A=\{x\}$

مجموعة كيفية من نقاط الفضاء (Y,σ) ، عندئذ وبما أن (X,τ) و (Y,σ) فضاءين هوميومورفيين من النوع β_s فإنه يوجد هومومرفيزم من النوع β_s مثل $f:(\mathrm{X},\tau)\to(\mathrm{Y},\sigma)$ ، وبما أن f تقابل فإنه توجد مجموعة وحيدة العنصر $B=\{t\}$ في (X,τ) بحيث يكون $f(B)=A$ ولكن (X,τ) فضاء $\beta_s - T_1$ فرضاً لذلك حسب المبرهنة (3) نجد أن $B=\{t\}$ مجموعة مغلقة من النوع β_s في (X,τ) ، وبما أن f هومومرفيزم من النوع β_s وحسب التمهيدية (2) نجد أن f مغلق من النوع β_s ومنه تكون المجموعة $f(B)$ مجموعة مغلقة من النوع β_s في (Y,σ) أي أن $A=\{x\}$ مجموعة β_s _ مغلقة في (Y,σ) لذلك حسب المبرهنة (3) نجد أن (Y,σ) فضاء $\beta_s - T_1$

مبرهنة (5): ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً كيفياً عندئذٍ الشروط الآتية متكافئة:

١. (X,τ) فضاء $\beta_s - T_2$

٢. من أجل كل نقطة $x\in \mathrm{X}$ تتحقق العلاقة الآتية: $\{x\}=\cap\{\beta_s cl(v_x)\}$ حيث $v_x \epsilon \beta_s V(x)$

٣. من أجل كل x و y نقطتين مختلفتين من نقاط X توجد مجاورتين $v\in\beta_s V(x), u\in\beta_s U(y)$ بحيث يكون $x\notin\beta_s cl(u)$ و $y\notin\beta_s cl(v)$

البرهان:

$1\Leftarrow 2$: بفرض أن (X,τ) فضاء $\beta_s - T_2$ ولتكن $x\in \mathrm{X}$ وحسب تعريف المجاورة من النوع β_s ل x نجد أن $x\in v_x$ وبما أن $v_x\subseteq\beta_s cl(v_x)$ فإن $x\in\beta_s cl(v_x)\Leftarrow\{x\}\subseteq\beta_s cl(v_x)\Leftarrow$

(*) _ $\{x\}\subseteq\cap\{\beta_s cl(v_x)\}$ حيث $v_x\epsilon\beta_s V(x)$ ، من جهة ثانية لتكن y نقطة كيفية من نقاط المجموعة $\mathrm{X}\setminus\{x\}$ وبما أن $x\neq y$ ومنه وحسب الفرض توجد مجموعتين β_s – مفتوحتين v_x و u_y بحيث يكون

$v_x \cap u_y=\emptyset$ ومنه وحسب تعريف النقطة اللاصقة من النوع β_s بمجموعة نجد أن $y\notin\beta_s cl(v_x)$ ولكن v_x هي إحدى المجاورات من النوع β_s ل x ومنه نجد أن $y\notin\cap\beta_s cl(v_x)$ وبالتالي $y\in \mathrm{X}\setminus\cap\beta_s cl(v_x)$ وبمراعاة الاختيار الكيفي ل y نجد أن $\mathrm{X}\setminus\{x\}\subseteq \mathrm{X}\setminus\cap\beta_s cl(v_x)\Leftarrow$ (**) _ $\cap\{\beta_s cl(v_x)\}\subseteq\{x\}$

من العلاقتين (*) و (**) نجد أن $\{x\} = \cap\{\beta_s cl(v_x)\}$

$2 \Leftarrow 3$: بفرض أن $\{x\} = \cap\{\beta_s cl(v_x)\}$ و لتكن $x \neq y$ من نقاط (X,τ) ومنه نجد أن

$\{x\} = \cap\{\beta_s cl(v)\}$ & $\{y\} = \cap\{\beta_s cl(u)\}$ ، وبما أن $x \neq y$ فإن $y \notin \{x\}$ وبالتالي

$y \notin \cap\{\beta_s cl(v)\}$ ومنه $\exists v_0 \in \beta_s V(x)$; $y \notin \beta_s cl(v_0)$

وبما أن $x \neq y$ فإن $x \notin \{y\}$ وبالتالي $x \notin \cap\{\beta_s cl(u)\}$ ومنه $\exists u_0 \in \beta_s U(y)$; $x \notin \beta_s cl(u_0)$

$1 \Leftarrow 3$: من أجل كل نقطتين $x \neq y$ من نقاط (X,τ) ومن الفرض نجد أن $y \notin \beta_s cl(v)$ ومنه توجد مجاورة من النوع β_s ل y مثل v_y بحيث يكون $v_y \cap v = \emptyset$ وبما أن v مجاورة من النوع β_s ل x وعليه فإنه من أجل $x \neq y$ وجدت مجاورتان من النوع β_s بحيث يكون $v_y \cap v = \emptyset$

الآن: لنأخذ $x \notin \beta_s cl(u)$ ومنه توجد مجاورة من النوع β_s ل x مثل v_x بحيث يكون $v_x \cap u = \emptyset$ وبما أن u مجاورة من النوع β_s ل y وعليه فإنه من أجل $x \neq y$ وجدت مجاورتان من النوع β_s بحيث أن $v_x \cap u = \emptyset$

وفي الحالتين نجد أن (X,τ) فضاء $\beta_s - T_2$ وهو المطلوب

ملاحظة (3): إن صفة كون الفضاء (X,τ) فضاء $\beta_s - T_2$ ليست صفة وراثية

سنوضح ذلك من خلال عرض المثال الآتي:

مثال (3): لنأخذ المجموعة X ={ a ،b ،c ,d} مع التبولوجيا

$\tau = X\{ \,،\, \emptyset$ ،{a},{b},{c},{a,b},{a,c},{b,c},{a,b,c}}

$$SO(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}$$

ومنه نجد أن:

$$\beta_s O(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,d\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}\}$$

الفضاء (X,τ) فضاء $\beta_s - T_2$ لنأخذ المجموعة y = {c,d} مع التبولوجيا،{{c} $\tau = \{\, y \,,\, \phi$

نجد أن $\beta_s O(y) = \{\, y \,,\, \phi\}$ ومنه نجد أن $(\,y, \tau_y)$ ليس فضاء $\beta_s - T_2$

مبرهنة (6): إن صفة كون الفضاء (X,τ) فضاء $\beta_s - T_2$ هي صفة تبولوجية

البرهان: بفرض أن (X,τ) و (Y,σ) فضاءين تبولوجيين كيفيين هوميومورفيين أي يوجد بينهما هومومرفيزم من النوع β_s واحد على الأقل بحيث أن أحدهما وليكن (X,τ) فضاء $\beta_s - T_2$ ولنبرهن أن الفضاء (Y,σ) فضاء $\beta_s - T_2$ ، لتكن y_1 , y_2 نقطتين كيفيتين من نقاط (Y,σ) و $x_1, x_2 \in X$ حيث أن $x_1 \neq x_2$ ، لنبحث عن

مجموعتين β_s _ مفتوحتين وغير متقاطعتين مثل v_{y_1}, v_{y_2} ل y_2 و y_1 على الترتيب، بما أن (X,τ) و (Y,σ) يوجد بينهما هومومرفيزم من النوع β_s واحد على الأقل مثل $f: (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ وبما أن f تقابل و y_1 , y_2 من(Y,σ) و f غامر فتوجد $x_1, x_2 \in X$ بحيث أن: $f(x_1) = y_1$ ،$f(x_2) = y_2$ وبما أن $y_1 \neq y_2 \Leftarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ و f متباين إذا $x_1 \neq x_2$ وبالتالي لدينا نقطتين x_1, x_2 مختلفتين من نقاط (X,τ) الذي يحقق موضوعة الفصل $\beta_s - T_2$ ومنه توجد مجموعتين β_s _ مفتوحتين مثل v_{x_1}, v_{x_2} بحيث أن $v_{x_1} \cap v_{x_2} = \phi$ بالتالي $f(v_{x_1} \cap v_{x_2}) = f(\phi) \Leftarrow f(v_{x_1}) \cap f(v_{x_2}) = \phi$ ومنه نجد أن $f(v_{x_1})$ و $f(v_{x_2})$ مجموعتين β_s _ مفتوحتين ل $f(x_1)$ و $f(x_2)$ على الترتيب في (Y,σ) بوضع $v_{y_1} = f(v_{x_1})$ و

$v_{y_2} = f(v_{x_2})$ تكون v_{y_1} و v_{y_2} مجموعتين β_s _ مفتوحتين ل y_1 , y_2 المختلفتين في (Y,σ) بحيث أن $v_{y_1} \cap v_{y_2} = \phi$ إذا الفضاء (Y,σ) فضاء $\beta_s - T_2$

نتيجة (2): كل فضاء T_0 ليس بالضرورة فضاء $\beta_s - T_0$ وكذلك العكس غير محقق بصورة عامة

سنوضح ذلك من خلال عرض المثال الآتي:

مثال (4): لنعرف على المجموعة X= {a,b,c,d}

التبولوجيا τ = { X, ϕ , {c},{b,c},{c,d},{a,b,c},{b,c,d}} عندئذ فإن

$SO(X)$ = { X ، ϕ ، {c},{a,c},{b,c}{c,d},{a,b,c },{a,c,d},{b,c,d}}

و $SC(X)$ = { X ، ϕ ، {a},{b},{d},{a,b},[a,d} ,{b,d},{a,b,d}}

و $\beta O(X)$ ={ X ، ϕ ، {c}, {a,c},{b,c},{c,d},{a,b,c},{a,c,d},{b,c,d}}

و $\beta_s O(X)$ ={X , ϕ }

الفضاء (X,τ) فضاء T_0 لأنه من أجل $a \neq b$ توجد {b ,c} بحيث تنتمي لها b ولا تنتمي لها a وكذلك بالنسبة لكل نقطتين مختلفتين من نقاط الفضاء أما الفضاء (X,τ) ليس فضاء $\beta_s - T_0$ لأنه من أجل $\{c\} \in \beta O(X)$ نلاحظ أنه لا توجد مجموعة $F \epsilon SC(X)$ تحقق أن $c \epsilon F \subseteq \{c\}$ ومنه $\{c\} \notin \beta_s O(X)$ وكذلك بالنسبة للمجموعات الأخرى ما عدا ϕ و X

أما من أجل العكس: نعرف على المجموعة السابقة التبولوجيا τ = { X ، ϕ ، {a},{b},{a,b}} عندئذ فإن

$SO(X)$ = { X ، ،{a},[b},{a,b},{a,c},{a,d},{b,c},{b,d},{a,b,c},{a,b,d},{a,c,d},{b,c,d}}

و $SC(X)$ = { X ، ϕ ، {a},{b},{c},{d},{a,c},{a,d},{b,c},{b,d},{c,d},{a,c,d},{b,c,d}}

و $\beta O(X)$ = { X ، ،{a},{b},{a,b},{a,c},{a,d},{b,c},{b,d},{a,b,c},{a,b,d},{a,c,d},{b,c,d}}

و $\beta_s O(X) = \beta O(X)$ ، الفضاء (X,τ) فضاء $\beta_s - T_0$ لأنه من أجل $a \neq b$ توجد {a} بحيث تنتمي لها a ولا تنتمي لها b وكذلك بالنسبة لكل نقطتين مختلفتين من نقاط الفضاء أما الفضاء (X,τ) ليس فضاء T_0

لأنه من أجل $c \neq d$ لا توجد مجموعة مفتوحة تنتمي لها إحدى النقطتين c أو d دون الأخرى

نتيجة (3): كل فضاء $\beta_s - T_0$ هو فضاء S−T_0 أما العكس ليس صحيح بصورة عامة

البرهان: ليكن (X,τ) فضاء $\beta_s - T_0$ ولتكن x و y نقطتين مختلفتين كيفيتين من نقاطه، عندئذ توجد مجموعة

β_s _ مفتوحة ولتكن G بحيث أن $x \epsilon G, y \notin G$ وبما أن $\beta_s O(X) \subseteq SO(X)$ & $G \epsilon \beta_s O(X)$ فإن $G \in SO(X)$ وبمراعاة الاختيار الكيفي ل x وy نجد أن (X,τ) فضاء S−T_0

سنوضح أن العكس غير محقق بصورة عامة كالآتي:

مثال (5): لنعرف على المجموعة X ={a,b,c} التبولوجيا τ ={ X, ϕ , {b},{a,b},{b,c}}

عندئذ فإن $SO(X)$ = { X, ϕ,{b},{a,b},{b,c}}

و $SC(X)$ ={ X, ϕ , {c},{a},{a,c}} و $\beta O(X)$ = { X, ϕ,{b},{a,b},{b,c}}

و $\beta_s O(X)$ ={X , ϕ } ،

الفضاء (X,τ) فضاء $S-T_0$ لأنه من أجل $a \neq b$ توجد المجموعة {b} بحيث تنتمي لها b ولا تنتمي a وكذلك بالنسبة لكل نقطتين مختلفتين من نقاط الفضاء، لكنه ليس فضاء $\beta_s -T_0$ لأنه من أجل النقطتين a وb لا توجد مجموعة β_s _مفتوحة بحيث تنتمي لها a أو b دون الأخرى وكذلك بالنسبة لكل نقطتين مختلفتين من نقاط الفضاء

نتيجة (4): كل فضاء $\beta_s -T_0$ هو فضاء $\beta -T_0$ والعكس ليس صحيح بصورة عامة

البرهان: ليكن (X,τ) فضاء $\beta_s -T_0$ ولتكن x وy نقطتين مختلفتين كيفيتين من نقاطه، عندئذ توجد مجموعة β_s _ مفتوحة ولتكن G بحيث أن $x\epsilon G, y \notin G$ وبما أن $G\epsilon\beta_s O(X)$ & $\beta_s O(X) \subseteq \beta O(X)$

فإن $G \in \beta O(X)$ وبمراعاة الاختيار الكيفي ل x وy نجد أن (X,τ) فضاء $\beta -T_0$

سنوضح أن العكس غير صحيح بصورة عامة كالآتي:

وجدنا في المثال (5) أن (X,τ) ليس فضاء $\beta_s -T_0$ لكنه فضاء $\beta -T_0$ لأنه من أجل $a \neq b$ توجد المجموعة {b} بحيث تنتمي لها b ولا تنتمي a وكذلك بالنسبة لكل نقطتين مختلفتين من نقاط الفضاء

نتيجة (5): (X,τ) فضاء $\beta_s -T_1$ إذا وفقط إذا كان (X,τ) فضاء $S-T_1$

البرهان: $\Leftarrow$): بفرض أن (X,τ) فضاء $\beta_s -T_1$ ولتكن x وy نقطتين مختلفتين من نقاطه، عندئذ توجد مجموعتين β_s _ مفتوحتين ولتكن G_x و G_y تحققان: $x\in G_x$, $y\notin G_x$ & $y \in G_y$, $x\notin G_y$

وبما أن $\beta_s O(X) \subseteq SO(X)$ & $G_x, G_y\epsilon\beta_s O(X)$ فإن $G_x, G_y \in SO(X)$ وبمراعاة الاختيار الكيفي ل x وy نجد أن (X,τ) فضاء $S-T_1$

$\Rightarrow$): بفرض أن (X,τ) فضاء $S-T_1$ ولتكن x وy نقطتين مختلفتين من نقاطه، عندئذ توجد مجموعتين S_مفتوحتين ولتكن G_x و G_y يحققان: $x\in G_x$, $y\notin G_x$ & $y \in G_y$, $x\notin G_y$ وبما أن

$SO(X) \subseteq \beta O(X)$ & $G_x, G_y\epsilon SO(X)$ فإن $G_x, G_y\epsilon\beta O(X)$ ويقال انهما مجموعتين β_s _ مفتوحتين إذا كان من أجل كل $x\in G_x$ و $y \in G_y$ توجد مجموعتين S_مغلقتين ولتكن F_x, F_y بحيث أن $F_x = \{x\}$ و $F_y = \{y\}$ وبما أن (X,τ) فضاء $S-T_1$ حسب [14] نجد أن المجموعتين $\{x\}$ و $\{y\}$ مجموعتين S_مفتوحتين وعليه نجد أن $G_x, G_y\epsilon\beta_s O(X)$ وبمراعاة الاختيار الكيفي ل x وy نجد أن (X,τ) فضاء $\beta_s -T_1$

نتيجة (6): كل فضاء $\beta_s -T_1$ هو فضاء $\beta -T_1$ والعكس ليس صحيح بصورة عامة

البرهان: ليكن (X,τ) فضاء $\beta_s -T_1$ ولتكن x وy نقطتين مختلفتين كيفيتين من نقاطه، عندئذ توجد مجموعتين β_s _ مفتوحتين ولتكن G_x و G_y تحققان: $x\in G_x$, $y\notin G_x$ & $y \in G_y$, $x\notin G_y$ وبما أن

$\beta_s O(X) \subseteq \beta O(X)$ & $G_x, G_y\epsilon\beta_s O(X)$ فإن $G_x, G_y\epsilon\beta O(X)$ وبمراعاة الاختيار الكيفي ل x وy نجد أن (X,τ) فضاء $\beta -T_1$

سنوضح أن العكس غير محقق بصورة عامة كالآتي:

مثال (6): لنعرف على المجموعة $X = \{1,2,3\}$ التبولوجيا $\tau = \{ X, \phi , \{1\},\{2,3\}\}$

عندئذ فإن $SO(X) = \{ X, \phi ,\{1\},\{2,3\}\}$ و $SC(X) = \{ X, \phi ,\{1\},\{2,3\}\}$

و $\beta O(X) = \{ X, \phi ,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$ و $\beta_s O(X) = \{ X, \phi , \{1\},\{2,3\}\}$

ومنه الفضاء (X,τ) ليس فضاء $\beta_s -T_1$ لأنه من أجل $3 \neq 2$ توجد المجموعة {2,3} تنتمي لها النقطتين ومنه اختل تعريف الفضاء $\beta_s -T_1$ لكنه فضاء $\beta -T_1$ لأنه من أجل $3 \neq 2$ توجد مجموعتين β_s _مفتوحتين هما

G_2 = {2} و G_3 = {3} تحققان $2\in G_2$, $3\notin G_2$ & $3\in G_3$, $2\notin G_3$ وكذلك بالنسبة لكل نقطتين مختلفتين من نقاط الفضاء

نتيجة (7): كل فضاء T_1 هو فضاء $\beta_s - T_1$ والعكس ليس صحيح بصورة عامة

البرهان: كل فضاء T_1 هو فضاء $S{-}T_1$ [14] وحسب النتيجة (5)

سنوضح أن العكس غير محقق بصورة عامة كالآتي:

مثال (7): لنعرف على المجموعة X= {1,2,3} التبولوجيا τ = { X, ϕ , {1},{2},{1,2}}

عندئذ فإن $SO(X)$ ={ X, ϕ,{1},{2},{1,2},{1,3},{2,3}}

و $SC(X)$ = { X , ϕ ,{1},{2},{3},{1,3},{2,3}} و $\beta O(X)$ = $SO(X)$ و $\beta O(X)$ = $\beta_s O(X)$

ومنه (X,τ) ليس فضاء T_1 لأنه من أجل $3 \neq 2$ لا توجد مجموعة مفتوحة تنتمي لها النقطة 3 ولا تنتمي لها النقطة 2 ، لكنه فضاء $\beta_s - T_1$ لأنه من أجل $3 \neq 2$ توجد مجموعتين β_s_مفتوحتين هما {2} = G_2 و

G_3 = {3} تحققان $2\in G_2$, $3\notin G_2$ & $3\in G_3$, $2\notin G_3$ وكذلك بالنسبة لكل نقطتين مختلفتين من نقاط الفضاء

نتيجة (8): كل فضاء $\beta_s - T_1$ هو فضاء $\beta_s - T_0$ والعكس ليس صحيح بصورة عامة

البرهان: ليكن (X,τ) فضاء $\beta_s - T_1$ ولتكن x وy نقطتين مختلفتين كيفيتين من نقاطه، عندئذ توجد مجموعتين

β_s _ مفتوحتين ولتكن G_x و G_y تحققان: $x\in G_x$, $y\notin G_x$ & $y\in G_y$, $x\notin G_y$ ومنه وبمراعاة الاختيار الكيفي ل x و y نجد أن (X,τ) فضاء $\beta_s - T_0$

سنوضح أن العكس غير صحيح بصورة عامة كالآتي:

مثال (8): لنعرف على المجموعة X ={a,b,c} التبولوجيا τ ={ X, ϕ ,{a},{c},{a,c},{b,c}}

عندئذ فإن $SO(X)$ = { X, ϕ ,{a},{c},{a,c},{b,c}} و $SC(X)$ = { X, ϕ,{a},[b},{a,b},{b,c}}

$\beta O(X)$ ={ X, ϕ ,{a},{c},{a,c},{a,b},{b,c}} و $\beta_s O(X)$ = { X, ϕ,{a},{a,b},{b,c}} ومنه

(X,τ) فضاء $\beta_s - T_0$ لأنه من أجل $a \neq b$ توجد المجموعة {a} تنتمي لها a ولا تنتمي لها b وكذلك بالنسبة لكل نقطتين مختلفتين من نقاط الفضاء لكنه ليس فضاء $\beta_s - T_1$ لأنه من أجل $c \neq b$ توجد مجموعة

β_s _مفتوحة {b,c} تنتمي لها النقطتين b وc معا ومنه اختل تعريف الفضاء $\beta_s - T_1$

نتيجة (9): (X,τ) فضاء $\beta_s - T_2$ إذا وفقط إذا كان (X,τ) فضاء $S{-}T_2$

البرهان: $\Leftarrow$): ليكن (X,τ) فضاء $\beta_s - T_2$ ولتكن x وy نقطتين مختلفتين كيفيتين من نقاطه، عندئذ توجد مجموعتين β_s_مفتوحتين مثل G_x و G_y تحققان: $G_x \cap G_y = \emptyset$ ، وبما أن $\beta_s O(X) \subseteq SO(X)$ & $G_x, G_y \epsilon \beta_s O(X)$ فإن $G_x, G_y \epsilon SO(X)$ وبمراعاة الاختيار الكيفي ل x وy نجد أن (X,τ) فضاء $S{-}T_2$

$\Rightarrow$): ليكن (X,τ) فضاء $S{-}T_2$ ولتكن x وy نقطتين مختلفتين كيفيتين من نقاطه، عندئذ توجد مجموعتين S_مفتوحتين ولتكن G_x و G_y يحققان: $G_x \cap G_y = \emptyset$ ، وبما أن $SO(X) \subseteq \beta O(X)$ &

و $x\in G_x$ فإن $G_x, G_y \epsilon SO(X)$ ويقال انهما مجموعتين β_S _ مفتوحتين إذا كان من أجل كل $x\in G_x$ و $y \in G_y$

توجد مجموعتين S_مغلقتين ولتكن F_x, F_y بحيث أن $F_x = \{x\}$ و $F_y = \{y\}$ ومنه وحسب [14] نجد أن $\{x\}$ و $\{y\}$ مجموعتين S_مغلقتين وعليه فإن $G_x, G_y \epsilon \beta_S O(X)$ وبمراعاة الاختيار الكيفي ل x و y

نجد أن (X,τ) فضاء $\beta_S - T_2$

نتيجة (10): كل فضاء $\beta_S - T_2$ هو فضاء $\beta - T_2$ والعكس ليس بالضرورة صحيح

البرهان: ليكن (X,τ) فضاء $\beta_S - T_2$ ولتكن x و y نقطتين مختلفتين كيفيتين من نقاطه، عندئذ توجد مجموعتين β_S _ مفتوحتين ولتكن G_x و G_y تحققان: $G_x \cap G_y = \emptyset$ ، وبما أن $\beta_S O(X) \subseteq \beta O(X)$ & $G_x, G_y \epsilon \beta_S O(X)$ فإن $G_x, G_y \epsilon \beta O(X)$ وبمراعاة الاختيار الكيفي ل x و y نجد أن (X,τ) فضاء $\beta - T_2$

سنوضح أن العكس غير صحيح بصورة عامة كالآتي:

وجدنا في المثال(6) أن (X,τ) فضاء $\beta - T_2$ لأنه من أجل $3 \neq 2$ توجد مجموعتين β_S _مفتوحتين هما $G_2 = \{2\}$ و $G_3 = \{3\}$ تحققان $\{2\} \cap \{3\} = \phi$ وكذلك بالنسبة لكل نقطتين مختلفتين من نقاط الفضاء لكنه ليس فضاء $\beta_S - T_2$ لأنه من أجل $3 \neq 2$ لا توجد مجموعتين β_S _مفتوحتين تنتمي لأحدهما النقطة 3 ولا تنتمي النقطة 2 وللأخرى تنتمي النقطة 2 ولا تنتمي النقطة 3

نتيجة (11): كل فضاء T_2 هو فضاء $\beta_S - T_2$ والعكس ليس صحيح بصورة عامة

البرهان: كل فضاء T_2 هو فضاء $S-T_2$ [14] وحسب النتيجة (9)

سنوضح أن العكس غير صحيح بصورة عامة كالآتي:

مثال (9): لنعرف على المجموعة X ={a,b,c} التبولوجيا τ ={ X, ϕ,{a},{b},{a,b}}

عندئذ فإن $SO(X)$ = { X, ϕ ,{a},{b},{a,b},{a,c},[b,c}} و

$SC(X)$ = { X, ϕ ,{a},{b},{c},{a,c},{b,c}}

و $\beta O(X)$ = { X, ϕ ,{a},{b},{a,b},{a,c},{b,c}} و $\beta_S O(X) = \beta O(X)$ ومنه (X,τ) فضاء $\beta_S - T_2$ لأنه من أجل $a \neq b$ توجد مجموعتين β_S _مفتوحتين هما {a} و {b} تحققان $\{b\} \cap \{a\} = \phi$ وكذلك بالنسبة لكل نقطتين مختلفتين من نقاط الفضاء لكنه ليس فضاء T_2 لأنه من أجل $a \neq c$ لا توجد مجموعة مفتوحة تنتمي لها النقطة c ولا تنتمي لها النقطة a

نتيجة (12): كل فضاء $\beta_S - T_2$ هو فضاء $\beta_S - T_1$ والعكس ليس صحيح بصورة عامة

البرهان: ليكن (X,τ) فضاء $\beta_S - T_2$ ولتكن x و y نقطتين مختلفتين كيفيتين من نقاطه، عندئذ توجد مجموعتين β_S _ مفتوحتين ولتكن G_x و G_y تحققان: $G_x \cap G_y = \emptyset$ ، وبما أن $x \epsilon G_x$ و $G_x \cap G_y = \emptyset$ فإن $x \epsilon G_x \subseteq X \setminus G_y$ بالتالي $x \notin G_y$ وبما أن $y \in G_y$ و $G_x \cap G_y = \emptyset$ فإن $y \in G_y \subseteq X \setminus G_x$ بالتالي $y \notin G_x$ ومنه حصلنا على أن $x \in G_x$, $y \in G_y$ & $y \notin G_x$, $x \notin G_y$ وعليه فإن (X,τ) فضاء $\beta_S - T_1$

سنوضح أن العكس غير صحيح بصورة عامة كالآتي:

مثال (10): لنعرف على المجموعة $X = \mathbb{Z}$ التبولوجيا $\tau = \left\{T \epsilon P(\mathbb{Z}); X|T \text{ مجموعة منتهية} \right\} \cup \{\phi\}$

بما أن كل مجموعة منتهية هي مجموعة β_S _ مغلقة حسب المبرهنة (٣) نجد أن (X,τ) فضاء $\beta_S - T_1$ ، الآن نفرض جدلا أن (X,τ) فضاء $\beta_S - T_2$ من أجل كل x و y نقطتين مختلفتين كيفيتين من نقاطه عندئذ توجد

مجموعتين β_s _ مفتوحتين ولتكن G_x و G_y ل x وy على الترتيب بحيث أن (*)_ $G_x \cap G_y = \emptyset$
وبأخذ متمم الطرفين للعلاقة * نحصل على:
$\mathbb{Z}|(G_x \cap G_y) = \mathbb{Z}|\phi \Leftarrow$ (I)_ $(Z|G_x) \cup (\mathbb{Z}|G_y) = \mathbb{Z}$ وبما أن $Z|G_x$ مجموعة منتهية
فحسب تعريف تبولوجيا المتممات المنتهية نجد أن اتحاد مجموعتين منتهيتين هو مجموعة منتهية ومن المساواة (I)

نجد أن $\mathbb{Z}$ منتهية وهذا تناقض سببه الفرض الجدلي الخاطئ وعليه فإن (X,τ) ليس فضاء $\beta_s - T_2$

نتيجة (13): كل فضاء $\beta_s - T_2$ هو فضاء $\beta_s - T_0$ والعكس ليس صحيح بصورة عامة

البرهان: يتم حسب النتيجتين (8) و (12)

سنوضح أن العكس غير صحيح بصورة عامة كالآتي:

وجدنا في المثال (8) أن (X,τ) فضاء $\beta_s - T_0$ لكنه ليس فضاء $\beta_s - T_2$ لأنه من أجل $c \neq b$ توجد مجموعة

β_s _مفتوحة {b,c} تنتمي لها النقطتين b وc معاً

الاستنتاجات والتوصيات :

قمنا في هذا البحث بدراسة الصفات الوراثية والتبولوجية للفضاءات $\beta_s - T_i$ حيث i=0,1,2 وتوصلنا إلى الآتي:

١- صفة كون الفضاء (X, τ) هو $\beta_s - T_i$ ليست صفة وراثية بينما هي صفة تبولوجية حيث i=0,1,2

٢- إن كل فضاء T_i هو فضاء $\beta_s - T_i$ حيث i=1,2 أما العكس غير صحيح بصورة عامة، أما حالة i=0 وجدنا أنه ليس من الضروري أن يكون كل فضاء T_0 هو فضاء $\beta_s - T_0$ وكذلك العكس غير صحيح بصورة عامة.

نوصي بالآتي: دراسة موضوعات الفصل $\beta_s - T_4$ و $\beta_s - T_5$ ، ودراسة مفهوم التراص وفق المجموعات المفتوحة من النوع β_s

المراجع:

[1]- Levin N .*Semi-open Sets and Semi-continuous in topological spaces* . The American Mathematical Monthly., 70(1)(1963),pp. 36 – 41

[2]- Mashhour .A.S,M.E.Abd-EL-Monsef and S.N.EL-Deeb, *On pre-continuous and weak pre-continuous mappings*,proc.Math.and phys.Soc.Egypt., 53(1982),47-53.

[3]- Abd-EL-Monsef , M.E,S.N.EL-Deeb and R.A.Mahmoud,*β-Open Sets and β-continuous mappings* , Bull .Fac .Sci. Assiut Univ.,(1983) ,pp.77 – 90.

[4]- Maheshwari. S.N and R.Prasad.*Some new Separation axioms* , Ann.Soc.Sci.Bruxelles., 89(1975),pp.395-402.

[5]- Kar .A ,P.Bhattacharyya ,*Some week Separation axioms*,Bull.Calcutta Math.Soc., 82(1990),pp.415-422.

[6]- Ahmed, N.K , *On Some Types of Separation axioms* , M.Sc.thesis, University Of Salahddin.,(1990).

[7]- Shareef ,H.A , S_p *-Open Sets* , S_p *-continuity and* S_p *-compactness in topological spases* , M.Sc.thesis,Sulaimani University,(2007).
[8]- Khalaf,A.B and Ahmed,N.K, S_β *-Open Sets and* S_β *--continuous in topological spaces*, Thai Journal of Mathematics., 11(2)(2013),pp. 319-335.
[9]- Khalaf,A.B and Asaad,A.B, p_S *-Open Sets and* p_S *-continuous in topological spaces*,Journal.Duhok University .,12(2)(2009),pp. 183-192.
[10]-Khalaf,A.B and Sharref,A.H, S_p *-Separation axioms*,International Journal of Scientific ., 10(1)(2012),pp.2229-5518.
[11]-Khalaf,A.B and Ahmed,N.K,*week Separation axioms and functions with* S_β*-closed graphs* , International J of Math.Sci.,6(2012),pp.1-13.

[12] – ظريف ، عدنان .، الجرادي ، مجيدة . *المجموعات المفتوحة من النوع* β *والدوال المستمرة من النوع* β ، رسالة ماجستير . ٢٠١٤. جامعة تشرين .

[13] – ظريف ، عدنان .، العسلي ، نوره . *دراسة المجموعات المفتوحة من النوع* β *والفضاءات المتراصة* ، رسالة ماجستير . ٢٠١٦ . جامعة تشرين .

[14]- Kumari,P.and Das,K.S, *Semi-* T_1 *spaces of Semi- Separation axioms in topological space* , International Journal of Engineering , Science and Math., 7(2018),pp .153-158.

[15] – ظريف ، عدنان .، عفيصه ، براءه.، محمود، زلوخ . *المجموعات المفتوحة من النوع* β *والفضاءات المترابطة* ، رسالة ماجستير . ٢٠٢٢ . جامعة تشرين .