مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٨) العدد (٢) ٢٠٢٤
Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (8) No. (2) 2024

دراسة محدودية مؤثر هاردي ليتلوود الأعظمي في فضاءات ليبيغ ذو الأس المتغير

الدكتور محمد علي*

الدكتورة بشرى دراج**

نجدت عيسى***

(تاريخ الإيداع ٦/٣/ ٢٠٢٤ – تاريخ النشر ١٠/٦/٢٠٢٤)

□ ملخّص □

درسنا في هذا البحث الشروط الكافية لمحدودية مؤثر هاردي ليتلوود الأعظمي في فضاء ليبيغ $L^{a+p(.)}(\Omega)$ حيث $a \geq 0$ و$p(.)$ تابع أس، حيث قمنا بوضع شرط على مؤثر هاردي ليتلوود الاعظمي وعلى نظيمه في هذا الفضاء وتمت الدراسة في حالتين : الحالة الأولى $||Mf||_{p(.)} \leq 1$ والحالة الثانية $||Mf||_{p(.)} \geq 1$.

الكلمات المفتاحية: فضاء ليبيغ ذو الأس المتغير، مؤثر هاردي ليتلوود الأعظمي، المحدودية.

*أستاذ– قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة تشرين– اللاذقية– سورية

**مدرس– قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة طرطوس – طرطوس – سورية

***طالب دراسات عليا (ماجستير)- قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة طرطوس – طرطوس - سورية [3]

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٨) العدد (٢) ٢٠٢٤

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (8) No. (2) 2024

Studying the boundedness the Hardy – Littlewood maximal operator in variable exponent Lebesgue spaces

D. Mohamad Ali *
D. Boushra Darrag **
Najdat Issa ***

(Received 6/3/2024.Accepted 10/6/2024)

□ABSTRACT □

We studied in this research the sufficient conditions for the boundedness the Hardy – Littlewood maximal operator in Lebesgue spaces $L^{a+p(.)}(\Omega)$ where $a \geq 0$ and $p(.)$ is exponent function, we set the conditions on the Hardy-Littlewood maximal operator and on the norm of operator in this space. The study was conducted in two cases: the first case $\|Mf\|_{p(.)} \leq 1$ and the second case $\|Mf\|_{p(.)} \geq 1$.

Key words: Variable exponent Lebesgue space, Hardy – Littlewood maximal operator, Boundedness.

***Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
**** Assistant Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tartous University, Tartous, Syria.**
***** Postgraduate Student (Master), Department of Mathematics, Faculty of Science, Tartous University, Tartous, Syria.**

مقدمة

يتم في التحليل التابعي دراسة بنية العديد من الفضاءات التابعية منها (فضاء ليبيغ– فضاء ليبيغ ذو الأس المتغير– فضاء أورليتش – فضاء موري ...)، وقُدمت العديد من المؤثرات منها مؤثر هاردي ليتلوود الأعظمي، حيث نُشرت العديد من الأعمال لمعرفة فيما إذا كان هذا المؤثر محدود أم لا على بعض الفضاءات التابعية، نذكر منها [3,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14].

ندرس في هذا البحث الشروط الكافية لمحدودية مؤثر هاردي ليتلوود الأعظمي في فضاء ليبيغ $L^{a+p(.)}(\Omega)$ حيث $a \geq 0$.

أهمية البحث وأهدافه:

تكمن أهمية دراسة مثل هذه المؤثرات في دراسة العديد من المعادلات التفاضلية، ويهدف هذا البحث إلى دراسة محدودية مؤثر هاردي ليتلوود الأعظمي في فضاء ليبيغ ذو الأس المتغير.

طرائق البحث ومواده:

يقع البحث ضمن اختصاص الرياضيات النظرية (التحليل التابعي) وبشكل خاص ضمن نظرية المؤثرات، لذلك فالطرق المتبعة تعتمد بشكل أساسي على أدبيات نظرية الفضاءات والمؤثرات.

تعاريف ومفاهيم أساسية:

تعريف1: الخاصة تقريبا في كل مكان [1]

إذا كانت $B \subset A \subset \mathbb{R}^n$ و $\mu(B) = 0$ عندئذ أي شرط محقق على المجموعة $A \setminus B$ يقال له محقق تقريباً في كل مكان على A .

تعريف 2: التابع القابل للقياس [1]

التابع f معرف على مجموعة قابلة للقياس ويأخذ القيم في المجموعة $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ يدعى تابع قابل للقياس إذا كانت المجموعة $\{x: f(x) > a\}$ مجموعة قيوسة من أجل كل قيمة حقيقية a.

تعريف 3: الفضاء $L^{\infty}(\Omega)$ [2]

يُعرّف الفضاء $L^{\infty}(\Omega)$ بأنه مجموعة كلّ التوابع f القابلة للقياس على Ω والتي تحقق الشرط:

$$esssup_{x\in\Omega}|f(x)| < \infty$$

وهو فضاء باناخ مع النظيم المعرّف عليه بالشكل:

$$||f||_{L^{\infty}(\Omega)} = esssup_{x\in\Omega}|f(x)|$$

تعريف4: تابع الأس [2,4]

لتكن Ω مجموعة جزئية في $\mathbb{R}^n$، ندعو التابع $p(.): \Omega \longrightarrow [1, \infty]$ القابل للقياس حسب ليبيغ بتابع الأس، ونرمز بـ $\mathcal{P}(\Omega)$ لأسرة جميع توابع الأس المعرفة على Ω

تعريف 5: التابع المعياري [2,4]

لتكن Ω مجموعة جزئية في $\mathbb{R}^n$، $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ و f تابع قابل للقياس، عندئذ يعرف التابع المعياري المرتبط بالأس $p(.)$ بالصيغة التالية:

$$\rho_{p(.),\Omega}(f) = \int_{\Omega\setminus\Omega_{\infty,p(.)}} |f(x)|^{p(x)}\,dx + ||f||_{L^{\infty}(\Omega_{\infty,p(.)})}$$

حيث $\Omega_{\infty,p(.)} = \{x \in \Omega : p(x) = \infty\}$.

ملاحظة1:[2,4]

ليكن Ω مجموعة جزئية في $\mathbb{R}^n$ و $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ عندئذٍ إذا كانت المتراجحة $|f(x)| \geq |g(x)|$ محققة تقريباً في كلّ مكان بالتالي $\rho_{p(.),\Omega}(f) \geq \rho_{p(.),\Omega}(g)$

تمهيدية1: [2,4]

ليكن Ω مجموعة جزئية في $\mathbb{R}^n$، و f تابع قابل للقياس حسب ليبيغ عندئذٍ

- إذا كان $\alpha > 1$ عندئذ $\alpha\rho_{p(.),\Omega}(f) \leq \rho_{p(.),\Omega}(\alpha f)$
- إذا كان $1 > \alpha > 0$ عندئذ $\alpha\rho_{p(.),\Omega}(f) \geq \rho_{p(.),\Omega}(\alpha f)$

تعريف6: فضاء ليبيغ ذو الأس المتغير $L^{p(.)}(\Omega)$ والنظيم المعرف عليه [2,4]:

ليكن Ω مجموعة جزئية في $\mathbb{R}^n$، $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ ، يُعرّف فضاء ليبيغ ذو الأس المتغير $L^{p(.)}(\Omega)$ على أنه مجموعة كلّ التوابع f القابلة للقياس حسب ليبيغ بحيث

$$\rho_{p(.),\Omega}\left(\frac{f}{\lambda}\right) < \infty \qquad for\ some\ \lambda > 0$$

وهو فضاء باناخ مع النظيم المعرّف عليه بالشكل :

$$\|f\|_{p(.)} = inf\left\{\lambda > 0 :\ \rho_{p(.),\Omega}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1\right\}$$

❖ نذكر من خلال التمهيدية التالية علاقة التداخل بين فضاءات ليبيغ ذو الاس المتغير.

تمهيدية 2:[4]

ليكن Ω مجموعة جزئية في $\mathbb{R}^n$ و $p(.), q(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ عندئذ $L^{q(.)}(\Omega) \subset L^{p(.)}(\Omega)$ ويوجد $k > 1$ من أجل كل $f \in L^{q(.)}(\Omega)$ بحيث $\|f\|_{p(.)} \leq k\|f\|_{q(.)}$ إذا وفقط إذا كان

- $p(x) \leq q(x)$ تقريباً من أجل كل $x \in \Omega$
- يوجد $\lambda > 1$ بحيث يحقق $\int_D \lambda^{-r(x)} dx < \infty$

حيث $D = \{x \in \Omega : p(x) \leq q(x)\}$ و $r(x)$ يعرّف بالعلاقة $\frac{1}{p(x)} = \frac{1}{q(x)} + \frac{1}{r(x)}$

❖ نذكر من خلال التمهيدية التالية العلاقة بين النظيم في فضاء ليبيغ ذو الأس المتغير والتابع المعياري المرتبط بتابع الأس.

تمهيدية 3:[2,4]

ليكن $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ عندئذ:

- إذا كان $\|f\|_{p(.)} \leq 1$ فإنّ $\rho_{p(.),\Omega}(f) \leq \|f\|_{p(.)}$.
- إذا كان $\|f\|_{p(.)} > 1$ فإنّ $\rho_{p(.),\Omega}(f) \geq \|f\|_{p(.)}$.

تعريف 7: الفضاء $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ [2]

يدعى التابع

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$

تابع قابل للمكاملة محلياً إذا حقق الشرط:

$$\int_K |f(x)|\,dx < \infty$$

من أجل كل المجموعات المتراصة K المحتواة في $\mathbb{R}^n$، ونرمز بالرمز $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ لفضاء كلّ التوابع القابلة للمكاملة محلياً.

تعريف 8: مؤثر هاردي ليتلوود الأعظمي [2,4]

ليكن $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

عندئذ يُعرّف مؤثر هاردي ليتلوود الأعظمي لتابع f من أجل $x \in \mathbb{R}^n$ بالصيغة:

$$Mf: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\,dy$$

حيث $supremum$ مأخوذ على كلّ الكرات B المحتواة في $\mathbb{R}^n$ التي مركزها x ونصف قطرها r و $|B(x,r)|$ هو قياس لبييغ للكرة .

- ❖ ننوه إلى أنّ

$$0 \leq Mf(x) \leq \infty$$

- ❖ يقال عن مؤثر هاردي ليتلوود الأعظمي أنه محدود في الفضاء $L^{t(.)}(\Omega)$ حيث $t(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$، إذا وجد ثابت $c > 0$ بحيث:

$$\|Mf\|_{t(.)} \leq c\|f\|_{t(.)}$$

ملاحظة 2:[2,4]

ليكن $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ عندئذ المتراجحة

$Mf(x) \geq |f(x)|$ محققة تقريباً في كل مكان.

النتائج والمناقشة:

- ❖ في المبرهنتين التاليتين سوف ندرس شروط كافيه لمحدودية مؤثر هاردي ليتلوود الأعظمي في فضاءات ليبيغ ذو الأس المتغير $L^{a+p(.)}(\Omega)$ حيث $a \geq 0$.

<u>مبرهنة 1:</u>

ليكن Ω مجموعة جزئية في $\mathbb{R}^n$، و$Mf \in L^{a+p(.)}(\Omega)$ بحيث $Mf(x) \leq 1$ و $\|Mf\|_{p(.)} \leq 1$

عندئذٍ فإنّ مؤثر هاردي ليتلوود الأعظمي محدود على $L^{a+p(.)}(\Omega)$.

الإثبات:

- سوف نثبت أنه يوجد ثابت $0 < 1 \leq c$ بحيث $\|Mf\|_{a+p(.)} \leq c\|f\|_{a+p(.)}$.

$$\rho_{a+p(.),\Omega}(Mf) = \int_{\Omega\setminus\Omega_{\infty,a+p(.)}} |Mf(x)|^{a+p(.)}\,dx + \|Mf\|_{L^\infty\left(\Omega_{\infty,a+p(.)}\right)}$$

وبما أنّ $Mf(x) \leq 1$ فإنّ

$$esssup_{x\in\Omega_{\infty,a+p(.)}}(|Mf(x)|) \leq 1$$

بالتالي

$$\|Mf\|_{L^{\infty}\left(\Omega_{\infty,a+p(.)}\right)} \leq 1$$

عندئذٍ

$$\rho_{a+p(.),\Omega}(Mf) \leq \int_{\Omega\setminus\Omega_{\infty,a+p(.)}} |Mf(x)|^{a+p(.)}\,dx + 1$$

بما أنّ $0 \leq Mf(x) \leq 1$ عندئذ: $|Mf(x)|^{a+p(.)} \leq |Mf(x)|^{p(.)}$ بالتالي:

$$\rho_{a+p(.),\Omega}(Mf) \leq \int_{\Omega\setminus\Omega_{\infty,p(.)}} |Mf(x)|^{p(.)}\,dx + 1 \leq \rho_{p(.),\Omega}(Mf) + 1$$

بما أنّ $\|Mf\|_{p(.)} \leq 1$ عندئذ حسب التمهيدية 3 نجد

$$\rho_{p(.),\Omega}(Mf) \leq \|Mf\|_{p(.)}$$

بالتالي:

$$\rho_{a+p(.),\Omega}(Mf) \leq \|Mf\|_{p(.)} + 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\|Mf\|_{p(.)} + 1}\right)\rho_{a+p(.),\Omega}(Mf) \leq 1$$

باستخدام التمهيدية 1 علماً أنّ $\alpha = \frac{1}{\|Mf\|_{p(.)}+1} \leq 1$ نجد :

$$\rho_{a+p(.),\Omega}\left(\frac{1}{\|Mf\|_{p(.)} + 1}Mf\right) \leq \left(\frac{1}{\|Mf\|_{p(.)} + 1}\right)\rho_{a+p(.),\Omega}(Mf) \leq 1$$

ومنه

$$\rho_{a+p(.),\Omega}\left(\frac{Mf}{\left(\|Mf\|_{p(.)} + 1\right)}\right) \leq 1$$

عندئذ بحسب تعريف النظيم لـ Mf على الفضاء $L^{a+p(.)}(\Omega)$

$$\|Mf\|_{a+p(.)} \leq \|Mf\|_{p(.)} + 1$$

لنأخذ $c_1 = \|Mf\|_{p(.)} + 1$ بالتالي

$$\|Mf\|_{a+p(.)} \leq c_1$$

بالتالي حسب تعريف النظيم لـ Mf على الفضاء $L^{a+p(.)}(\Omega)$ فإنّ:

$$\rho_{a+p(.),\Omega}\left(\frac{Mf}{\|Mf\|_{a+p(.)}}\right) \leq 1$$

بالاستفادة من الملاحظة 2 نجد:

$$\frac{|f(x)|}{c_1} \leq \frac{Mf(x)}{c_1} \leq \frac{Mf(x)}{\|Mf\|_{a+p(.)}}$$

بالتالي حسب الملاحظة 1 نجد

$$\rho_{a+p(.),\Omega}\left(\frac{f}{c_1}\right) \leq \rho_{a+p(.),\Omega}\left(\frac{Mf}{\|Mf\|_{a+p(.)}}\right) \leq 1$$

بالتالي

$$\rho_{a+p(.),\Omega}\left(\frac{f}{c_1}\right) \leq 1$$

عندئذ

$$\|f\|_{a+p(.)} \leq c_1$$

بالتالي يمكن إيجاد ثابت c بحيث $1 \geq c = \frac{c_1}{\|f\|_{a+p(.)}}$ بحيث $\|Mf\|_{a+p(.)} \leq c\|f\|_{a+p(.)}$

عندئذٍ مؤثر هاردي ليتلوود الأعظمي محدود على $L^{a+p(.)}(\Omega)$.

مبرهنة 2:

ليكن مجموعة جزئية في $\mathbb{R}^n$ و$Mf \in L^{a+p(.)}(\Omega)$ بحيث$Mf(x) \leq 1$ و $\|Mf\|_{p(.)} \geq 1$

عندئذ فإنّ مؤثر هاردي ليتلوود الأعظمي محدود على $L^{a+p(.)}(\Omega)$.

الإثبات:

- سوف نثبت أنه يوجد ثابت $c \geq 1$ بحيث $\|Mf\|_{a+p(.)} \leq c\|f\|_{a+p(.)}$.

لنأخذ التابع $k(x)$ المعرف بالصيغة التالية:

$$k(x) = \frac{Mf(x)}{\|Mf\|_{p(.)}}$$

بما أنّ $0 \leq Mf(x) \leq 1$ و $\|Mf\|_{p(.)} \geq 1$ عندئذ $0 \leq k(x) \leq 1$.

$$\|k\|_{p(.)} = \frac{\|Mf\|_{p(.)}}{\|Mf\|_{p(.)}} = 1$$

$$\rho_{a+p(.),\Omega}(k) = \int_{\Omega\setminus\Omega_{\infty,a+p(.)}} |k(x)|^{a+p(.)}\,dx + \|k\|_{L^\infty(\Omega_{\infty,a+p(.)})}$$

وبما أنّ $k(x) \leq 1$ فإنّ

$$esssup_{x\in\Omega_{\infty,a+p(.)}}(|k(x)|) \leq 1$$

بالتالي

$$\|k\|_{L^\infty(\Omega_{\infty,a+p(.)})} \leq 1$$

عندئذ:

$$\rho_{a+p(.),\Omega}(k) \leq \int_{\Omega\setminus\Omega_{\infty,a+p(.)}} |k(x)|^{a+p(.)}\,dx + 1$$

بما أنّ $k(x) \leq 1$ عندئذ: $|k(x)|^{a+p(.)} \leq |k(x)|^{p(.)}$ بالتالي:

$$\rho_{a+p(.),\Omega}(k) \leq \int_{\Omega\setminus\Omega_{\infty,p(.)}} |k(x)|^{p(.)}\,dx + 1 \leq \rho_{p(.),\Omega}(k) + 1 \quad \ldots\ldots(1)$$

بما أنّ $\|k\|_{p(.)} = 1 \leq 1$ عندئذ حسب التمهيدية 3 نجد

$$\rho_{p(.),\Omega}(k) \leq \|k\|_{p(.)}$$

عندئذ بالتعويض في (1) نجد

$$\rho_{a+p(.),\Omega}(k) \leq \rho_{p(.),\Omega}(k) + 1 \leq \|k\|_{p(.)} + 1 = 2$$

$$\frac{\rho_{a+p(.),\Omega}(k)}{2} \leq 1$$

حسب التمهيدية 1 نجد

$$\rho_{a+p(.),\Omega}\left(\frac{k}{2}\right) \leq \frac{\rho_{a+p(.),\Omega}(k)}{2} \leq 1$$

عندئذ حسب تعريف النظيم للتابع $k(x)$ في الفضاء $L^{a+p(.)}(\Omega)$ نجد

$$\|k\|_{a+p(.)} \leq 2$$

$$\frac{\|Mf\|_{a+p(.)}}{\|Mf\|_{p(.)}} \leq 2$$

بالتالي

$$\|Mf\|_{a+p(.)} \leq 2\|Mf\|_{p(.)}$$

لنأخذ $c_2 = 2\|Mf\|_{p(.)}$ بالتالي

$$\|Mf\|_{a+p(.)} \leq c_2$$

بالتالي حسب تعريف النظيم لـ Mf على الفضاء $L^{a+p(.)}(\Omega)$ فإنّ:

$$\rho_{a+p(.),\Omega}\left(\frac{Mf}{\|Mf\|_{a+p(.)}}\right) \leq 1$$

بالاستفادة من الملاحظة 2 نجد:

$$\frac{|f(x)|}{c_2} \leq \frac{Mf(x)}{c_2} \leq \frac{Mf(x)}{\|Mf\|_{a+p(.)}}$$

بالتالي حسب الملاحظة 1 نجد

$$\rho_{a+p(.),\Omega}\left(\frac{f}{c_2}\right) \leq \rho_{a+p(.),\Omega}\left(\frac{Mf}{\|Mf\|_{a+p(.)}}\right) \leq 1$$

بالتالي

$$\rho_{a+p(.),\Omega}\left(\frac{f}{c_2}\right) \leq 1$$

عندئذ

$$\|f\|_{a+p(.)} \leq c_2$$

بالتالي يمكن إيجاد ثابت c بحيث $c = \frac{c_2}{\|f\|_{a+p(.)}} \geq 1$ بحيث $\|Mf\|_{a+p(.)} \leq c\|f\|_{a+p(.)}$

عندئذٍ مؤثر هاردي ليتلوود الأعظمي محدود على $L^{a+p(.)}(\Omega)$.

الاستنتاجات والتوصيات:

توصلنا في هذه المقالة إلى دراسة الشروط الكافية لمحدودية مؤثر هاردي ليتلوود الأعظمي في الفضاء $L^{a+p(.)}(\Omega)$.

أما بالنسبة للتوصيات:

- نوصي بدراسة محدودية مؤثر هاردي ليتلوود الأعظمي في الفضاء $L^{a+p(.)}(\Omega)$ بحيث $Mf(x) \geq 1$.
- نوصي بدراسة محدودية مؤثر هاردي ليتلوود الأعظمي في الفضاء $L^{a+p(.)}(\Omega)$ بحيث $Mf(x) \leq c$ و $c > 1$.
- نوصي بدراسة محدودية مؤثر هاردي ليتلوود الأعظمي في الفضاء $L^{sp(.)}(\Omega)$ حيث $s \geq 1$.
- نوصي بدراسة الشروط اللازمة والكافية لمحدودية مؤثر هاردي ليتلوود الأعظمي في فضاءات ليبيغ ذو الأس المتغير.

- نوصي بدراسة مؤثر هاردي ليتلوود الأعظمي في فضاءات تابعية أخرى (فضاءات لوبييغ الموزنه، فضاءات أورليتش، فضاءات موري ....)

المراجع:

[1] Adams. R. A., Fournier.J.J.F. 2003. *Sobolev Spaces.* Elsevier Ltd. All rights reserved.

[2] Castillo. R., Rafeiro. H. 2016, *An Introductory Course in Lebesgue Spaces*, Springer International Publishing Switzerland.

[3] Chacón-Cortés. L. F., Rafeiro. H. 2020. *Variable Exponent Lebesgue Spaces and Hardy-Littlewood Maximal Function on p-Adic Numbers*. Ultrametric Analysis and Applications, vol. 12, no. 2, 90-111.

[4] Cruz-Uribe. D., Fiorenza. A., Ruzhansky. M., Wirth. J. *2014, variable lebesgue spaces and Hyperbolic Systems.* Springer Basel Heidelberg New York Dordrecht London.

[5] Cruz-Uribe. D., SFO., Fiorenza. A. 2009, Llog L results for the maximal operator in variable L_p spaces. Transactions of The American Mathematical Society. vol. 361, no. 5, 2631-2647.

[6] Cruz-Uribe. D., Lars Diening. L., Hästö. P, 2011. *The maximal operator on weighted variable lebesgue spaces.* Fractional Calculus and Applied Analysis. vol. 14, 361–374.

[7] Diening. L., 2005. *Maximal functions on Musielak–Orlicz spaces and generalized Lebesgue spaces*, Bull. Sci. Math. vol.129, 657–700.

[8] Hästö. P, 2015. *The maximal operator on generalized Orlicz spaces. Journal of Functional Analysis*. vol. 269. 4038-4048.

[9] Karlovich. A. Yu., 2019. *Hardy-Littlewood maximal operator on the associate space of a Banachfunction space*, Real Analysis Exchange. vol. 44, 119–140.

[10] Karlovich. A., 2020. *Hardy–Littlewood maximal operator on reflexive variable*
Lebesgue spaces over spaces of homogeneous type. Studia Mathematica. vol. 254, 149-178.

[11] Lerner. A. K., 2017. *On a dual property of the maximal operator on weighted* variable L_p spaces, Contemp. Math. vol. 693, 288–300.

[12] Lerner. A.K. 2022. *A Note On The Maximal Operator On Weighted Morrey Spaces- Analysis Math.*,49 (4) (2023), 1073-1086

[13] Pick, L., Růžička. M. 2001. *An example of a space $L_p(X)$ on which the Hardy-Littlewood maximal operator is not bounded. - Exposition*. Math. 4, 2001, 369-372.

[14] Rammadana.Y., Gunawan.H.2023. *Boundedness Of The Hardy–Littlewood Maximal Operator, Fractional Integral Operators,* And Calderón–Zygmund Operators On Generalized Weighted Morrey Spaces. Khayyam J. Math. 9 (2023), no. 2, 263-287.