مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٨) العدد (٣) ٢٠٢٤

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (8) No. (3) 2024

معاملات ليابونوف للمنظومات الهاملتونية الدورية

د. سراب علي محمود*

(تاريخ الإيداع ٢/٦/ ٢٠٢٤ – تاريخ النشر ٨/٨/ ٢٠٢٤)

□ ملخّص □

رأينا أن معاملات ليابونوف الأسية هي واحدة من أهم الأدوات التي تستخدم لقياس الفوضى في المنظومات الديناميكية، من خلال حسابها للمعدل الأسي لتباعد المسارات المتجاورة في فضاء الموضع، ووجدنا أن معاملات ليابونوف لمسار دوري يمكن ان تنتج ببساطة من القيم الذاتية للمصفوفة الرئيسية (monodromy)، ووجدنا أيضاً أن عدم وجود معاملات موجبة يعني أنه لا يوجد اتجاه في فضاء الموضع والذي يوافقه مسارين منفصلين لانهائيين يتشعبان بشكل أسي ، هذا يعني أن المسار الأصلي غير فوضوي، بالإضافة الى ذلك وجدنا أن المنظومات ذات المسارات الدورية تملك معاملين ليابونوف صفريين والأربعة الباقية هي زوجين من الأعداد الحقيقية المتعاكسة [٥]. السؤال الذي يطرح بشكل طبيعي فيما اذا كان لقيم معاملات ليابونوف علاقة باستقرار المسارات ، لذلك قررنا أن نبحث عن العلاقة بين القيم الذاتية للمصفوفة الرئيسية للمسارات الدورية ومعاملات ليابونوف لهذه المسارات.

نتناول في بحثنا هذا دراسة طريقة حساب معاملات ليابونوف للمنظومات الدورية باستخدام المصفوفة الأساسية وبشكل خاص شبه الكبلرية (المنظومات الهاملتونية الدورية التي تملك ثلاثة احداثيات معممة)، وندرس استقرار هذه المسارات، مستخدمين نتائج نظرية فلوكويت [6].

كلمات مفتاحية المنظومات الديناميكية- استقرار – المسار- معاملات ليابونوف –المصفوفة الرئيسية- القيم الذاتية- فضاء الموضع.

---

*دكتوراه-كلية العلوم- جامعة طرطوس – طرطوس-سوريا.

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٨) العدد (٣) ٢٠٢٤

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (8) No. (3) 2024

Lyapunov exponents Of the Periodic Hamelton systems

Sarab Ali Mahmoud*

(Received 2/6/2024.Accepted 8/8/2024)

□ABSTRACT □

We show that the Lyapunov exponents one of the important Chaos measures in the Dynamic Systems , that tell us the rate of divergence of nearby trajectories. we found that the Lyapunov exponents of periodic orbits can be easily obtained from the eigen values of the monodromy matrix.

We also found that, No positive Lyapunov exponents means that there is no direction in phase space along which two initially infinitesimally separated orbits diverge exponentially, that is, the original orbit is regular. Otherwise, the orbit is chaotic.

In addition, we found that the periodic orbits of six dimensional Dynamic Systems have always two Lyapunov exponents equal to zero, and the remaining four are always two pairs of opposite real numbers [٥].

The question naturally arises of whether Lyapunov exponents values are somehow related to the stability of the orbits , Therefore, we decided to investigate the relationship between the eigen values of the monodromy matrix of periodic orbits and the Lyapunov exponents of those orbits.

We studied in this paper computation of Lyapunov exponent using the monodromy matrix of the Dynamic Systems ,in general , and we found the conditions of stability of the periodic orbits,using Floquet theorem [٦], and we present proof belong these orbits

Key words. Dynamic Systems-stabitity - trajectory- Lyapunov exponents - Monodromy Matrix -The Eigenvalues _ phase space

*PhD- Department of Mathematics, Faculty of Science, Tartous University, Tartous, Syria

مقدمة

تعد معاملات ليابونوف الأسية هي واحدة من أهم مقاييس الفوضى في المنظومات الديناميكية. وبشكل خاص كون معامل ليابونوف الأسي الأعظمي λ_1 موجباً هو دليل قوي على وجود الفوضى [8]. إن قيمة λ_1 تخبرنا فيما إذا كانت منظومة ديناميكية معطاة فوضوية أم لا. فإذا كان $\lambda_1 > 0$ عندئذٍ تعد المنظومة فوضوية وإلا إذا كان $\lambda_1 \leq 0$ تعد غير فوضوية.

هناك عدد من المعاملات يساوي عدد أبعاد الفضاء وهي $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$ من أجل فضاء ذو n بعد ومرتبة بشكل متناقص، تدل هذه المعاملات على مفاهيم هندسية، حيث أن $e^{\lambda_1 t}$ يدل على مقدار التباعد الخطي لمسارين متجاورين في الشروط الابتدائية، (حيث t متحول مستمر في التدفقات ويدل على التكرار في التصاوير)، والعدد $e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}$ يدل على مقدار التغير في المساحة والعدد $e^{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t}$ يدل على مقدار التغير في الحجم ، وهكذا .....[2].

قدم أوسيلديك[3] دراسة نظرية لهذه المعاملات، كما عمل كلاً من بينتين وجورجي وغالغاني [Benettin.G, Galgani.L, Giorgilli.A,1980] في هذا المجال .

سنعرض في بحثنا هذا طريقة حساب معاملات باستخدام مصفوفة الاضطراب الرئيسية وسنستخدم هذه المعاملات للتعبير عن استقرار الحركة الدورية مستفيدين من نتائج فلوكويت في الاستقرار ثم سنقدم النتائج التي توصلنا اليها.

أهمية وأهداف البحث

تكمن أهمية البحث في أهمية دراسة استقرار الحركات الدورية مثل حركات الأجرام السماوية وحركات دورية أخرى هامة حياتنا الواقعية. ونهدف في هذا البحث الى التوصل الى التعبير عن شروط استقرار المسارات باستخدام معاملات ليابونوف الأسية.

مواد وطرق البحث

نقوم بدراسة كيفية حساب معاملات ليابونوف عن طريق القيم الذاتية للمصفوفة الرئيسية للاضطراب، وندرس استقرار المسارات الدورية مستفيدين من نتائج نظرية فلوكويت.

الاستنتاجات والتوصيات

تتجلى ثمار بحثنا هذا في النتائج التالية:

١- **مبرهنة١:**

لتكن $S(t)$ المصفوفة الأساسية للتباعد لمنظومة شبه كبلرية والتي دورها T، عندئذٍ يكون لكثيرة الحدود المميزة للمصفوفة $S(T)$ الشكل $\varphi(\rho) = a(\rho-1)^2(\rho^4 + \alpha.\rho^3 + \beta\rho^2 + \alpha\rho \;\; +1)$.

٢- **مبرهنة٢:**

لتكن $\varphi(\rho) = (\rho-1)^2(\rho^4 + \alpha.\rho^3 + \beta\rho^2 + \alpha\rho \;\; +1)$ هي كثيرة الحدود المميزة لمصفوفة التباعد الأساسية لمنظومة شبه كبلرية ذات حركة دورية مستقرة، عندئذٍ يتوضع العدد β داخل الدائرة التي مركزها 2 ونصف قطرها 4 .

٣-**نتيجة:** جميع معاملات ليابونوف للمسارات الدورية المستقرة للمنظومات الشبه كبلرية تكون معدومة.

لقد اهتمينا في هذا البحث، بشكل خاص، بدراسة استقرار المنظومات الشبه كبلرية وأوجدنا الشرط اللازم لاستقرارها، تبقى مسائل دراسة استقرار المنظومات الدورية ذات الأبعاد الأخرى، والمنظومات غير الدورية مسائل مفتوحة جديرة بالاهتمام.

معاملات ليابونوف للمنظومات الهاملتونية الدورية

وجدنا أن المنظومات الهاملتونية ذات الـ (n) احداثي معمم تملك ($2n$) معامل ليابونوف[1]، تأتي على شكل أزواج من الأعداد الحقيقية المتعاكسة [٥].

السؤال الذي يطرح بشكل طبيعي فيما إذا كان لقيم معاملات ليابونوف علاقة باستقرار المسارات الدورية،

لذلك قررنا أن نبحث عن شروط استقرار هذه المنظومات بدلالة معاملات ليابونوف الأسية.

نتناول في بحثنا هذا دراسة طريقة حساب معاملات ليابونوف للمنظومات الدورية باستخدام المصفوفة الأساسية وبشكل خاص شبه الكبلرية (المنظومات الهاملتونية الدورية التي تملك ثلاثة احداثيات معممة)، وندرس استقرار هذه المسارات، مستخدمين نتائج نظرية فلوكويت[6].

١- معاملات ليابونوف كقيم ذاتية للمصفوفة الأساسية للتباعد لمنظومة دورية:

لتكن المنظومة الديناميكية المعرفة بالعلاقة:

$$X^{\bullet}(t) = F(X(t)) \qquad (١)$$

حيث $X(t) \in R^n$ ، ولتكن $E_i , i = 1,2,....,n$ متجهات واحدة مستقلة في فضاء الموضع ولتكن X_0 نقطة كيفية من فضاء موضع المنظومة، وليكن $X(t)$ هو المسار الذي يبدأ من هذه النقطة (أي يحقق الشرط الابتدائي $X(0) = X_0$)، لو أجرينا اضطراباً في الشرط الابتدائي ليصبح بالشكل $X^E(0) = X_0 + \delta E_i$ ، حيث δ عدد موجب صغير بقدرٍ كافٍ، فإنه سيتشعب مسار جديد $X^E(t)$ عن المسار $X(t)$ ، وسيكون مقدار التباعد $\delta X(t)$ ، ولحساب هذا التباعد، بالاعتماد على (١) واستخدام نشر تايلور لـ F حول النقطة X_0 ، والاكتفاء في الحد الأول نحصل على معادلات تفاضلية من الشكل:

$$\frac{d}{dt}[X_0 + \delta X_0 + ...] = F(X_0) + \left.\frac{dF}{dX}\right|_{X_0} \delta X_0 + ... \Rightarrow$$

$$X_0^{\bullet} + \frac{d}{dt}(\delta X_0) + ... = F(X_0) + \left.\frac{dF}{dX}\right|_{X_0} \delta X_0 + ...$$

ولكون X_0 نقطة من فضاء موضع المنظومة نجد:

$$\frac{d}{dt}(\delta X_0) + ... = \left.\frac{dF}{dX}\right|_{X_0} \delta X_0 + ...$$

وبالاكتفاء بالحد الأول من كل طرف(لكون δ عدد موجب صغير بقدر كاف، فيكون الحد الأول أعظمي والباقي ينتهي الى الصفر) نحصل على:

$$\frac{d}{dt}(\delta X_0) = \left.\frac{dF}{dX}\right|_{X_0} \delta X_0$$

وبما أن X_0 نقطة كيفية من فضاء الموضع، يمكننا أن نكتب:

$$\frac{d}{dt}(\delta X(t)) = \left.\frac{dF}{dX}\right|_X \delta X \qquad (2)$$

عندئذٍ تعرف معاملات ليابونوف الأسية [4] بالعلاقات:

$$\lambda_i = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\left.\frac{|\delta X_i(t)|}{|\delta X_i(0)|}\right|_{X_0} \quad ; i = 1,2......,n \qquad (3)$$

حيث $\delta X_i(t)$ هو مقدار التباعد في اللحظة t الحاصل وفق الاتجاه E_i بين المسارين الأصلي والمضطرب، $|\bullet|$ هو النظيم المعروف في الفضاء الاقليدي.

المعادلات التفاضلية (2) مكونة من n معادلة تفاضلية خطية عادية متجانسة، ومن أجل هذا النوع من الأنظمة تكون المصفوفة الأساسية لها $S(t)$ معرفة بأنها المصفوفة التي أعمدتها هي حلول مستقلة خطياً للمنظومة[11]، في حالتنا هذه:

$$S(t) = [[\delta X_1],[\delta X_2].......,[\delta X_n]] \qquad (4)$$

من الواضح أن:

$$\frac{d}{dt}(S(t)) = \left.\frac{dF}{dX}\right|_X S(t) \qquad (5)$$

لكون δX_i حيث $i = 1,2,3,....n$ حلول للمعادلة (2)، ندعو المصفوفة $S(t)$ بالمصفوفة الأساسية للتباعد، إذا اخترنا $S(0) = I_n$ عندئذٍ تدعى المصفوفة الأساسية الأولية للتباعد(للاضطراب).

ليكن T دور المنظومة، وبفرض $\rho_i, i = 1,2,..,6$ هي القيم الذاتية للمصفوفة $S(T)$ عندئذٍ تعطى معاملات ليابونوف الأسية بالعلاقات التالية [٥]:

$$\lambda_i = \frac{1}{T}\ln|\rho_i| \qquad (6)$$

أي أن معاملات ليابونوف لحركة دورية يمكن أن تحسب بسهولة كلوغاريتم طبيعي للقيم الذاتية للمصفوفة $S(T)$ والمقسوم على T.

٢- القيم الذاتية لكثيرة الحدود المميزة لمصفوفة التباعد الأساسية لمنظومة شبه كبلرية (ذات حل دوري):

لتكن المنظومة الديناميكية الشبه كبلرية التي احداثياتها المعممة هي x, y, z ، ولتكن p_x, p_y, p_z هي المتحولات الهاملتونية المرافقة لهذه الاحداثيات بالترتيب، وليكن $X\ (t) = [x, y, z, p_x, p_y, p_z]^T$ ، ولنفرض أن المسأله تعرف بالعلاقة التالية:

$$X^{\bullet}(t) = F(X(t)) \qquad (7)$$

ولتكن $E_i, i = 1,2,....,6$ متجهات واحدة مستقلة في فضاء موضع المنظومة الهاملتونية الشبه كبلرية، ولتكن X_0 نقطة كيفية من فضاء موضع المنظومة، وليكن $X(t)$ هو المسار الذي يبدأ من هذه النقطة (أي يحقق الشرط الابتدائي $X(0) = X_0$)، ولتكن $S(t)$ هي المصفوفة الأساسية الأولية للتباعد، في حالتنا هذه:

$$S(t) = [[\delta X_1],[\delta X_2].......,[\delta X_6]] \qquad (8)$$

مبرهنة ١:

لتكن $S(t)$ المصفوفة الأساسية للتباعد لمنظومة شبه كبلرية والتي دورها T، عندئذٍ يكون لكثيرة الحدود المميزة للمصفوفة $S(T)$ الشكل $\varphi(\rho) = a(\rho-1)^2(\rho^4+\alpha.\rho^3+\beta\rho^2+\alpha\rho \ \ +1)$.

الاثبات:

لنفرض أن $\rho_i, i=1,2,..,6$ هي القيم الذاتية للمصفوفة $S(T)$، عندئذٍ تكون هذه القيم جذوراً لكثيرة الحدود المميزة لهذه المصفوفة، أي يمكننا أن نكتب:

$$\varphi(\rho) = a(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2).....(\rho-\rho_6) \qquad (9)$$

وبما أن هذه المنظومات هي منظومات هاملتونية فإن معاملات ليابونوف الأسية تأتي على شكل أزواج من الأعداد الحقيقية المتعاكسة[٥] ، وبما أنها دورية فيكون، حسب [٦] ، أحد هذه المعاملات صفرياً وبالنتيجة سنحصل على زوج صفري من المعاملات والأربعة الباقية ستكون على شكل زوجين من الأعداد الحقيقية المتعاكسة، وبالتالي ستملك المصفوفة الأساسية للتباعد قيمتين ذاتيتن واحديتين والأربعة الباقية ستكون على شكل زوجين من الأعداد، حيث سيكون كل عدد في كل من هذين الزوجين مقلوباً للعدد الآخر في نفس الزوج، إذاً يمكننا أن نأخذ:

$$\rho_5 = \rho_6 = 1 \qquad (10)$$

و

$$\rho_2 = \rho_1^{-1}, \rho_4 = \rho_3^{-1} \qquad (11)$$

وبالتالي سيكون $(\rho-1)^2$ عامل لـ $\varphi(\rho)$، وبالتالي العلاقة (9) تكتب بالصورة التالية:

$$\varphi(\rho) = a(\rho-1)^2.(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)(\rho-\rho_3)(\rho-\rho_4) \qquad (12)$$

لنضع:

$$\psi(\rho) = (\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)(\rho-\rho_3)(\rho-\rho_4) \qquad (13)$$

عندئذٍ تكتب العلاقة (12):

$$\varphi(\rho) = a(\rho-1)^2.(\psi(\rho)) \qquad (14)$$

وبالاستفادة من العلاقات (11) نجد:

$$\psi(\rho) = (\rho-\rho_1)(\rho-\rho_1^{-1})(\rho-\rho_3)(\rho-\rho_3^{-1})$$

وبالنشر نحصل على:

$$\psi(\rho) = [\ \rho^2-(\rho_1+\rho_1^{-1})\rho+1\ ].[\ \rho^2-(\rho_3+\rho_3^{-1})\rho+1\ ]$$

ومنه:

$$\begin{aligned}\psi(\rho) = \rho^4 &-(\rho_1+\rho_1^{-1})\rho^3+\rho^2 \\ &-(\rho_3+\rho_3^{-1})\rho^3+(\rho_1\rho_3+\rho_1\rho_3^{-1}+\rho_1^{-1}\rho_3+\rho_1^{-1}\rho_3^{-1})\rho^2-(\rho_3+\rho_3^{-1})\rho \\ &+\rho^2-(\rho_1+\rho_1^{-1})\rho+1\end{aligned}$$

أي أنّ:

$$\psi(\rho)=\rho^4-(\rho_1+\rho_1^{-1}+\rho_3+\rho_3^{-1})\rho^3+(\rho_1\rho_3+\rho_1\rho_3^{-1}+\rho_1^{-1}\rho_3$$
$$+\rho_1^{-1}\rho_3^{-1}+2)\rho^2-(\rho_1+\rho_1^{-1}+\rho_3+\rho_3^{-1})\rho+1$$

فيكون:

$$\psi(\rho)=\rho^4-(\rho_1+\rho_2+\rho_3+\rho_4)\rho^3+(\rho_1\rho_3+\rho_1\rho_4+\rho_2\rho_3+\rho_2\rho_4+2)\rho^2$$
$$-(\rho_1+\rho_2+\rho_3+\rho_4)\rho+1$$

العلاقة الأخيرة تكتب بالشكل:

$$\psi(\rho)=\rho^4+\alpha.\rho^3+\beta\rho^2+\alpha\rho\quad+1 \tag{15}$$

حيث:

$$\begin{cases}\alpha=-(\rho_1+\rho_1^{-1}+\rho_3+\rho_3^{-1})\\ \beta=\rho_1\rho_3+\rho_1\rho_3^{-1}+\rho_1^{-1}\rho_3+\rho_1^{-1}\rho_3^{-1}+2\end{cases}$$

أي أن:

$$\begin{cases}\alpha=-(\rho_1+\rho_2+\rho_3+\rho_4)\\ \beta=\rho_1\rho_3+\rho_1\rho_4+\rho_2\rho_3+\rho_2\rho_4+2\end{cases} \tag{16}$$

وبتعويض (15) في (14) نجد:

$$\varphi(\rho)=a(\rho-1)^2.(\rho^4+\alpha.\rho^3+\beta\rho^2+\alpha\rho\quad+1)\text{.........(I)}$$

وهو المطلوب.

الآن لنضع:

$$\begin{cases}b_1=-(\rho_1+\rho_2)\\ b_2=-(\rho_3+\rho_4)\end{cases} \tag{17}$$

نحصل على:

$$\begin{cases}\alpha=b_1+b_2\\ \beta=b_1b_2+2\end{cases} \tag{18}$$

ويكون:

$$\begin{aligned}b_1&=\frac{1}{2}(\alpha+\sqrt{\Delta})\\ b_2&=\frac{1}{2}(\alpha-\sqrt{\Delta})\end{aligned} \tag{19}$$

حيث:

$$\Delta=\alpha^2-4(\beta-2) \tag{20}$$

ومنه يكون:

$$\rho_1=\frac{1}{2}(-b_1-\sqrt{b_1^{\ 2}-4})$$
$$\rho_2=\frac{1}{2}(-b_1+\sqrt{b_1^{\ 2}-4})$$
$$\rho_3=\frac{1}{2}(-b_2-\sqrt{b_2^{\ 2}-4})$$
$$\rho_4=\frac{1}{2}(-b_2+\sqrt{b_2^{\ 2}-4}) \qquad (21)$$

وبهذا نحصل على القيم القيم الذاتية لكثيرة الحدود المميزة لمصفوفة التباعد الأساسية لمنظومة شبه كبلرية (ذات حل دوري).

٣- استقرار الحركة الدورية للمنظومة الشبه كبلرية:

وجدنا من نظرية فلوكويت أن شروط استقرار الحركة هي:

$$\left|\rho_j\right|\le 1 \qquad , j=1,2,...6$$

ومنه يكون:

$$\left.\begin{matrix}|\rho_1|\le 1\\ |\rho_2|\le 1\end{matrix}\right\}\Rightarrow|\rho_1+\rho_2|\le|\rho_1|+|\rho_2|\le 1+1\le 2$$

$$|\rho_1+\rho_2|\le 2 \qquad (22)$$

وبالتالي:

$$|b_1|=|-\rho_1-\rho_2|=|\rho_1+\rho_2|\le 2 \qquad (23)$$

أي أن:

$$|b_1|\le 2$$

وبمحاكمة مماثلة نتوصل إلى الشرط $|b_2|\le 2$، ومنه نستنتج أن شرطي استقرار حركة دورية هما:

$$|b_1|\le 2$$
$$|b_2|\le 2 \qquad (24)$$

مبرهنة٢

لتكن $\varphi(\rho)=a(\rho-1)^2(\rho^4+\alpha.\rho^3+\beta\rho^2+\alpha\rho\ +1)$ هي كثيرة الحدود المميزة لمصفوفة التباعد الأساسية لمنظومة شبه كبلرية ذات حركة دورية مستقرة، عندئذٍ يتوضع العدد β داخل الدائرة التي مركزها 2 ونصف قطرها 4.

الإثبات

بما أن الحركة دورية مستقرة، وجدنا من الفقرة الأخيرة أن : $|b_1|\le 2$ و $|b_2|\le 2$، وباستخدام العلاقتين (19) نجد :

$$\left|\frac{1}{2}(\alpha+\sqrt{\Delta})\right|\le 2$$
$$\left|\frac{1}{2}(\alpha-\sqrt{\Delta})\right|\le 2 \qquad (25)$$

ومنه:

$$\left|(\alpha+\sqrt{\Delta})\right| \le 4$$
$$\left|(\alpha-\sqrt{\Delta})\right| \le 4 \qquad (26\ )$$

فيكون:

$$\left|(\alpha+\sqrt{\Delta})\right|.\left|(\alpha-\sqrt{\Delta})\right| \le 16 \Rightarrow$$
$$\left|(\alpha+\sqrt{\Delta})(\alpha-\sqrt{\Delta})\right| \le 16 \Rightarrow$$
$$\left|\alpha^2-\Delta\right| \le 16 \Rightarrow$$
$$\left|\alpha^2-\alpha^2+4(\beta-2)\right| \le 16$$
$$\left|4(\beta-2)\right| \le 16 \Rightarrow$$
$$\left|\beta-2\right| \le 4$$

مما سبق نجد أن شرط استقرار حركة دورية، معطاة كثيرة الحدود المميزة لمصفوفة التباعد الأساسية لهذه المنظومة بالعلاقة (I)، هو أن يتوضع العدد β داخل الدائرة التي مركزها 2 ونصف قطرها 4 .

٤ – دراسة استقرار الحركة الدورية لمنظومة شبه كبلرية باستخدام معاملات ليابونوف:

نهدف في هذه الفقرة إلى التعبير عن استقرار حركة دورية لمنظومة هاملتونية بدلالة معاملات ليابونوف.

وجدنا أن هذه المنظومات تملك معاملين ليابونوف صفريين، لنعمل على إيجاد القيم الأربعة المتبقية.

وجدنا أن شرطي الاستقرار هما $|b_1| \le 2$ و $|b_2| \le 2$ وبالتالي يكون:

$$|b_1|^2 \le 4$$
$$|b_2|^2 \le 4$$

ويكون:

$$b_1^{\,2} \le 4$$
$$b_2^{\,2} \le 4$$

وبالتالي $b_1^{\,2}-4 \le 0, b_2^{\,2}-4 \le 0$ عندئذٍ ستكون القيم الذاتية الأربعة عبارة عن زوجين من الجذور العقدية المترافقة،أي أن:

$$\rho_1=\bar{\rho}_2, \rho_3=\bar{\rho}_4$$

ومنه يكون:

$$\ln|\rho_1|=\ln|\bar{\rho}_2|, \ln|\rho_3|=\ln|\bar{\rho}_4| \Rightarrow$$
$$\ln|\rho_1|=\ln|\rho_2|, \ln|\rho_3|=\ln|\rho_4| \Rightarrow$$
$$\frac{1}{T}\ln|\rho_1|=\frac{1}{T}\ln|\rho_2|, \frac{1}{T}\ln|\rho_3|=\frac{1}{T}\ln|\rho_4| \Rightarrow$$
$$\lambda_1=\lambda_2, \lambda_3=\lambda_4 \qquad (27)$$

ومن العلاقات (11) لدينا : $\rho_2=\rho_1^{-1}, \rho_4=\rho_3^{-1}$

$$\ln|\rho_2| = \ln\left|\rho_1^{-1}\right|, \ln|\rho_4| = \ln\left|\rho_3^{-1}\right| \Rightarrow$$

ومنه يكون:

$$\frac{1}{T}\ln|\rho_2| = \frac{1}{T}\ln\left|\rho_1^{-1}\right|, \frac{1}{T}\ln|\rho_4| = \frac{1}{T}\ln\left|\rho_3^{-1}\right| \Rightarrow$$

$$\frac{1}{T}\ln|\rho_2| = -\frac{1}{T}\ln|\rho_1|, \frac{1}{T}\ln|\rho_4| = -\frac{1}{T}\ln|\rho_3|$$

وبالتالي:

$$\lambda_2 = -\lambda_1, \lambda_4 = -\lambda_3 \tag{28}$$

من (27) و (28) نجد :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \tag{29}$$

و

$$\lambda_3 = \lambda_4 = 0 \tag{30}$$

إذاً مما سبق نجد أن:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0 \tag{31}$$

نتيجة:

إن جميع معاملات ليابونوف للمسارات الدورية المستقرة للمنظومات الشبه كبلرية تكون معدومة.

المراجع العلمية

[1] Folkers, E، (2018). *Floquet 's Theorem.* University of Groningen.

[2] Ali,M.(2005).*Choaos,Predictability and Controllability in Nonlinear Systems*. Dellhi University, Delhi,India.

[3] Oseledec, V، (1968). *A Multiplicative Ergodic Theorem : Lyapunov Characteristic Numbers for Dynamical System*s. Trans. Moscow Math. Soc.

[4] *Lichtenberg,A and Lieberman*.M،(1992), Regular and Chaotic Dynamics.

[5] Benettin,G, Galgani.L and Giorgilli.A,(1980). *Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems*; method for computing all of them,Part 1: Theory, Meccanica .

[6] Floquet, G,(1883*). Sur les equations differentielles lineaires*.