

حلول عددية لصنف من المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد مع أكثر من عملية وينر

* موسى عدنان زعرور

(تاريخ الإيداع ٢٠٢٤/١١/١١ – تاريخ النشر ٢٠٢٤/١٢/١٧)

□ ملخص □

قدم هذا البحث صيغة عددية لإيجاد الحل العددي لصنف من المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد بأكثر من عملية وينر. تم في البداية إجراء محاكاة لعمليتي وينر العشوائيتين المستمرتين مع الزمن بعملية متقطعة زمنياً. ومن ثم تطبيق طريقة أولر مارياما لتقريب الحل العددي والحصول على عينة ممثلة للفضاء الاحتمالي للحل العددي، تم اثبات تقارب الصيغة العددية المقترحة بضعف من المرتبة الاولى. كما قدمت تجارب عددية موسعة لتقدير مرتبة التقارب العددي للصيغة المقترحة حيث تم إعداد البرامج التنفيذية اللازمة لهذه الصيغة باستخدام لغة البرمجة Mathematica، وتبين توافق النتائج العددية مع النتائج النظرية التي تم اثباتها، وقد ظهرت فعالية طريقة أولر مارياما في المعالجة العددية لهذا الصنف من المعادلات.

الكلمات المفتاحية: معادلات تفاضلية عشوائية متأخرة من النوع المحايد ، عملية وينر ، مرتبة التقارب العددي.

Numerical Solutions of a Class of Neutral Delayed Stochastic Differential Equations With More than one Wiener Process

Mousa A .Zaarour*

(Received 11/11/2024. Accepted 17/12/2024)

□ABSTRACT □

This research proposed a numerical scheme to find the numerical solution of a class of neutral stochastic delay differential equations (NSDDEs) with more than one Wiener processes, the scheme begins by calculating the two Wiener continuous stochastic processes by discrete time process. Then applying Euler-Maruyama method to approximate the solution and to produce a representative sample of the probabilistic space of the solution, weak convergence of the proposed scheme was proven to be of first order. Extensive numerical experiments was proposed to estimate the convergence order of the proposed scheme. Where, execution programs required for the scheme was prepared using the Mathematica programming language. Numerical results validates the theoretical proved findings, and the effectiveness of Euler-Maruyama method in numerically treating this kind of equations has been shown.

Keywords: Neutral Stochastic Delay Differential Equations, Wiener Process, Convergence Order.

* Master , Depart of Mathematics , Tartous Universty , Tartous, Syria.

١- مقدمة : introduction

من المعروف عند الرياضيين أن معظم ظواهر الحياة (الفيزيائية أو الكيميائية أو البيولوجية أو ..الخ) تتم نمذجتها باستخدام معادلات تفاضلية عادية أو جزئية وذلك من أجل محاولة فهم الظاهرة المدروسة ومعرفة سلوك الحل لها وتقديم النتائج والتفسيرات الممكنة، لكن وفي بعض الأحيان قد تخضع تلك الظواهر لعمليات ضجيج أو تشويش عشوائي ويجب أخذ هذا الضجيج بعين الاعتبار وذلك من أجل نمذجة الظاهرة بأفضل صيغة وعدم إهمال أي من العوامل الخارجية التي قد تؤثر على سلوك الحل، كما أن التأخير سمة هامة موجودة في العديد من العمليات والظواهر في الطبيعة وفي الصناعات التكنولوجية، فمثلاً في الفيزياء يلعب التأخير دوراً بارزاً في تصفية الترددات لأموج الراديو والأجهزة الالكترونية، في الكيمياء الحيوية أيضاً للتأخير دور هام في ديناميكا الشبكات المنظمة وراثياً، في الاقتصاد المالي لنمذجة أسعار الأسهم غير المستقرة، وفي البيولوجيا كنمذجة الوقوف المتوازن للإنسان الخاضع للسيطرة العصبية وتقلصات العضلات مع تأخير زمني للأجسام الصحيحة والمعتلة، كذلك في حركة السكان لنمذجة عمليات الولادة والموت (معدل النمو، معدل الوفيات)، في حالة انتشار الأمراض الوبائية مثل فيروس الايدز ومرض العصر فيروس كورونا...الخ.

ومن هنا جاءت أهمية المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد لدورها المهم والبارز في مجالات الحياة المتعددة وهي تعد إحدى الوسائل الأساسية لنمذجة عمليات الضجيج في الطبيعة فنجد لها استخدامات واسعة في نمذجة ومحاكاة الأنظمة الإحصائية ذات المتغيرات العشوائية.

غالباً ما يتم إيجاد الحلول العددية لمعادلات تفاضلية عشوائية تتأثر بحد ضجة بيضاء واحد، أي عملية واحدة لوينر لكن سندرس في هذا البحث محاكاة الحل لمعادلات تفاضلية عشوائية متأخرة من النوع المحايد عندما تخضع لأكثر من تشويش أو اضطراب عشوائي تحديداً عمليتي وينر بنفس الوقت ومناقشة النتائج والتفسيرات الممكنة لمعرفة أثر هاتان العمليتان عندما تتداخلان في معادلة واحدة.

إن للمعادلة التفاضلية المتأخرة حل وحيد من أجل كل تحديد لشروط ابتدائية مناسبة، في حين أن للمعادلة التفاضلية المتأخرة العشوائية حلول تظهر كعملية عشوائية مستمرة مع الزمن، بمعنى أن زمرة من الخطوط البيانية التي تتمركز حول خط بياني متوسط وفق تباين معين هي مايشكل حل المعادلة العشوائية.

● أهمية البحث : Importance of Research

نظراً للتطورات الهائلة الحاصلة في جميع المجالات العلمية وتداخل العلوم فيما بينها يصمم الباحثون نماذج عشوائية لفهم الظواهر المختلفة في العالم الحقيقي الذي نعيش فيه، ومن هنا تكمن أهمية هذا البحث من الناحية التطبيقية بأن مسألة المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد مع أكثر من عملية لوينر المطروحة تعد نموذجاً مناسباً للكثير من الظواهر الطبيعية والحقيقية في مجالات الحياة المختلفة التجارية والاقتصادية والصناعية ومؤخراً تستخدم بشكل خاص في التطبيقات العلمية الحديثة، كنماذج للفيروسات المستجدة مثل الايدز - إيبولا - كورونا الخ . ونظراً لعدم وجود حلول تحليلية لهذه النماذج المعقدة والصعبة فإن إيجاد الحلول العددية لمثل هذه النماذج يؤدي إلى تفسير أو تقديم الكثير من المعلومات الهامة حول هذه المسائل وجميع المسائل الأخرى المشابهة.

• **طرائق البحث ومواده:**

سنقدم في هذا البحث محاكاة عددية لنموذج من المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد مع عمليتي وينر لذلك تعتمد طرائق البحث في هذا العمل على بعض تقنيات التحليل العددي، والتحليل الرياضي وبعض المفاهيم الأساسية الأخرى في الإحصاء الرياضي المتمثلة بعملية وينر العشوائية. كما يحتاج البحث إلى استخدام علوم الخوارزميات والبرمجة الحاسوبية لمحاكاة الحلول التي تمثلها الظواهر المدروسة عددياً، مع الأخذ بالحسبان أن هذه الحلول غير متاحة بالطرائق التحليلية التقليدية لكثير من المسائل العشوائية وبالأخص المحايدة منها.

• **Literature Review: دراسات سابقة:**

تعد الدراسات العددية للمعادلات التفاضلية المتأخرة العشوائية من النوع المحايد حديثة نسبياً وهي في طور البداية حيث نجد أن معظم الأبحاث تطرقت إلى معالجة وإيجاد الحلول العددية للمعادلات التفاضلية العشوائية مثلاً [11,20,21] والمعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة مثلاً [1-5,7,8,13,16,17,19,26,28] وسنركز بشكل خاص على المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد:

درس Mao عام ٢٠٠٣ مفهوم التقارب بمتوسط المربعات القوي لطريقة أولر مارياما لإيجاد الحلول العددية للمعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة [15]. درس Tan وآخرون في عام ٢٠١٤ الحلول العددية للمعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد مع قفزات (خطوات) بواسون تحت شرط ليبتشيز المحلي [12].

قدم Mahmoud وآخرون في عام ٢٠١٦ تقنية شرائحية بكثيرات حدود من الدرجة الخامسة بخمس نقاط تجميع لإيجاد الحلول العددية للمعادلات التفاضلية العشوائية وفق صيغة ايتو [18]. قدم Mahmoud وآخرون في عام ٢٠٢١ تقنية عددية لحل نموذج من المعادلات التفاضلية العشوائية من المرتبة الثانية [22]. ناقش Tan and Yuan في عام ٢٠١٨ الاستقرار والتقارب العددي لطريقة Split-Theta لنماذج المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد [23]، وطور Li & Hong في عام ٢٠١٩ هذه الطريقة [10].

أوجد Zhou and Jin في عام ٢٠١٩ الحلول العددية للمعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة فوق الخطية من النوع المحايد [24]. طور Gao and Hu في عام ٢٠٢٠ طرائق عددية لحل نموذج من المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد اللاخطية [6]. قدم Wang and Xu في عام ٢٠٢٠ طريقة Averaging لدراسة الاستقرار والتقارب لنموذج من المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد [25]. قام Al في عام ٢٠٢١ بدراسة معدل التقارب للمعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد [9].

2- مفاهيم وتعريفات أساسية:

نبدأ ببعض التعاريف والمفاهيم الأساسية. تعرّف المعادلة التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد بأنها معادلة تفاضلية تتضمن واحد أو أكثر من الحدود العشوائية والحدود العشوائية مع تأخير زمني كما تحوي على حد تفاضلي متأخر، ولهذا سيكون ناتج الحل النهائي عملية عشوائية أيضاً، والشكل النموذجي الأنسب لتعريفها رياضياً بحسب [6,9,10,12,23] هو صياغتها وفق مفهوم إيتو كالاتي:

$$\begin{cases} d(X(t) - rX(t - \tau)) = F(t, X(t), X(t - \tau))dt + G(t, X(t), X(t - \tau))dW(t), t \in [0, T] \\ X(t) = \phi(t), \quad t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (1)$$

حيث: $\phi(t); t \in [-\tau, 0]$ دالة المعطيات الابتدائية، وتعطي قيمة الحل في الزمن المتأخر ويدعى $\tau \in (0, \infty)$ بثابت التأخير وهو مقدار حقيقي موجب، $r \in \mathbb{R}$.

تسمى الدالة $F: [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ بدالة معامل الإزاحة (Drift Coefficient) للمعادلة التفاضلية العشوائية المتأخرة.

وتدعى الدالة $G: [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ بمعامل الانتشار (Diffusion Coefficient) للمعادلة التفاضلية العشوائية المتأخرة.

تسمى: $W(t)$ عملية وينر (Wiener Process)، بينما $X(t): [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ فهي عملية عشوائية تمثل حل المعادلة التفاضلية العشوائية (1).

إن المعادلة التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد مع عمليتي وينر يمكن أن تأخذ الشكل الآتي:

$$\begin{cases} d(X(t) - rX(t - \tau)) = F(t, X(t), X(t - \tau))dt + G(t, X(t), X(t - \tau))dW(t) \\ \quad + H(t, X(t), X(t - \tau))dV(t), \quad t \in [0, T] \\ X(t) = \phi(t), \quad t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (2)$$

ليكن $X(t)$ الحل الدقيق للمعادلة (2) وليكن $x(t_n)$ الحل العددي في اللحظة $t = t_n$ وفيه نفترض أنّ التقريبات في اللحظات السابقة محسوبة بدقة تامة أي $x_i = X(t_i)$, $i < n$ ، في حين سنعتبر بـ x_n عن الحل العددي المحسوب بناءً على الحلول العددية $\{x_i\}_{0 < i < n}$ السابقة، والتي تتراكم فيها الأخطاء المحلية لكل الحلول العددية السابقة.

تعريف (1): العملية العشوائية $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ هي مجموعة من المتغيرات العشوائية على فضاء احتمالي معطي $(\Omega_W \times \Omega_V, F, P)$ والمرتبطة مع الزمن t ، وعندئذٍ

• لأجل كل $t \geq 0$ تكون الدالة $w \rightarrow X(t; w, v)$ قابلة للقياس ومعرفة على الفضاء الاحتمالي $(\Omega_W \times \Omega_V, F, P)$.

• لأجل كل $(w, v) \in \Omega_W \times \Omega_V$ تسمى الدالة $t \rightarrow X(t; w, v)$ مسار العينة أو مسار العملية المتعلق بالحدثين w, v .

تعريف (2): تعرّف عملية وينر [19] Wiener Process القياسية في المجال $[0, T]$ بأنها متغير عشوائي $W(t)$ مستمر مع الزمن، من أجل كل $t \in [0, T]$ ، ويحقق الخصائص التالية :

خاصة (1): من أجل كل t يكون توزيع المتغير العشوائي $W(t)$ توزيع طبيعي بمتوسط mean يساوي الصفر وتباين Variance يساوي الواحد.

خاصة (٢): إن $W(0) = 0$ باحتمال يساوي الواحد .

خاصة (٣): من أجل كل $0 \leq t_1 < t_2 < T$ ، فإن الفرق $W(t_2) - W(t_1)$ يكون متغيراً عشوائياً موزعاً طبيعياً بمتوسط صفر وتباين $t_2 - t_1$ ، وهذا يكافئ أن نكتب

$$W(t_2) - W(t_1) \sim \sqrt{t_2 - t_1} N(0,1)$$

حيث $N(0,1)$ يرمز لمتغير عشوائي يخضع للتوزيع الطبيعي المعياري .

خاصة (٤): من أجل كل $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < T$ ، فإن الفرقين $W(t_2) - W(t_1)$ و

$W(t_4) - W(t_3)$ يكونان متغيرين عشوائيين مستقلين .

خاصة (٥): يمكن تمثيل عملية وينر $W(t)$ بمسارات مستمرة .

تعريف (٣): الضجة البيضاء وتكامل إيتو (White Noise and Ito Integral): [5]

يدعى التكامل من الشكل $\int_{t_0}^t f(s, X(s)) dW(s)$ بتكامل إيتو ويمكن إيجاد هذا التكامل بأخذ التجزئة

المنتظمة

المنتظمة $c = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = d$ ويعطى تكامل ريمان كنهاية من الشكل:

$$\int_c^d f(t) dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{t}_i) \Delta t_i$$

حيث $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ و $t_{i-1} \leq \bar{t}_i \leq t_i$

وبشكل مشابه فإن تكامل إيتو هو النهاية :

$$I = \int_c^d f(t) dW(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(t_{i-1}) \Delta W_i$$

حيث $\Delta W_i = W(t_i) - W(t_{i-1})$ هي خطوة عملية وينر للتكامل. والخلاف الأساسي هو أن

النقطة \bar{t}_i يمكن اختيارها كأى نقطة من المجال (t_{i-1}, t_i) ، بينما في تكامل إيتو يكون المطلوب t_{i-1} نقطة الطرف الأيسر للمجال .

بما أن f ، $W(t)$ ، عملتان عشوائيتان ، فلا توجد قابلية تقليدية للاشتقاق ويُعبّر عن تكامل إيتو بالشكل

التفاضلي كالاتي:

$$dI = f(t) dW(t)$$

يسمى التفاضل $dW(t)$ لعملية وينر $W(t)$ بالضجة البيضاء White Noise.

ملاحظة : العمليتان العشوائيتان $W(t), V(t)$ في المعادلة (2) هما عمليتا وينر تحققان جميع

التعاريف والخصائص السابقة الذكر .

تعريف (4): الخطأ الموضعي: [27] Local Error

الخطأ الموضعي هو متتالية المتغيرات العشوائية

$$\delta_n = x(t_n) - X(t_n), n = 1, 2, \dots, N$$

يقيس الفرق بين الحل الدقيق والحل العددي (التقريبي) المحسوب بدقة في الخطوات السابقة ل t_n . أي

أنه يمثل قيمة الخطأ في المجال الجزئي $[t_{n-1}, t_n]$ على فرض عدم وجود أخطاء في المجالات السابقة.

تعريف(5): الخطأ الشامل: [27] Global Error

الخطأ الشامل هو متتالية المتغيرات العشوائية

$$e_n = x_n - X(t_n), n = 1, 2, \dots, N$$

يقيس الفرق بين الحل الدقيق والحل العددي (التقريبي) ذو الأخطاء المتراكمة على كامل مجال الحل.

تعريف(6): التقارب الضعيف [29] Weak convergence:

عند حساب مسارات الحل العددي ، يعطى معيار التقارب الضعيف من المرتبة p لطريقة عددية بالمترابحة:

$$\max_{1 \leq n \leq N} |E(e_n)| \leq C h^p, \text{ as } h \rightarrow 0$$

حيث $p > 0$ ، و C ثابت حقيقي، e_n الخطأ الكلي عند t_n .

تعريف(7): التقارب القوي : [29] Strong convergence

عند حساب عدة مسارات الحل العددي، يعطى معيار التقارب القوي بمتوسط المربعات من المرتبة p لطريقة

عددية كالآتي:

$$\max_{1 \leq n \leq N} (E(|e_k|^2))^{1/2} \leq C h^p, \text{ as } h \rightarrow 0$$

أو بالعلاقة

$$\max_{1 \leq n \leq N} E(|e_k|^2) \leq C h^{2p}, \text{ as } h \rightarrow 0$$

حيث $p \geq \frac{1}{2}$.

تعريف(8): الاتساق [14] Consistent

يقال عن طريقة عددية تنتج متتالية الحل العددي $\{x_n\}, n = 1, 2, \dots, N$ بخطوة h إنها متسقة بمتوسط المربعات

من المرتبة p إذا تحققت المترابحة الآتية:

$$\max_{1 \leq n \leq N} (E(|\delta_k|^2))^{1/2} \leq C h^p, \text{ as } h \rightarrow 0$$

حيث δ_k الخطأ المقطع الموضوعي، C ثابت موجب مستقل عن طول الخطوة h ، ويرمز E للتوقع الرياضي.

3- النتائج والمناقشة :

سنقدم طريقة عددية هي طريقة أولر مارياما لإيجاد الحلول العددية لمسألة المعادلة التفاضلية العشوائية المتأخرة

من النوع المحايد (2) ولكن أولاً نحتاج لإيجاد محاكاة عددية حاسوبية لعمليتي وينر العشوائيتين المستمرتين مع

الزمن $W(t), V(t)$.

3-1 محاكاة عمليتي وينر:

من أجل محاكاة عددية متقطعة لعمليتي وينر العشوائيتين $W(t), V(t)$ المستمرتين مع الزمن والتي كل منها

تأخذ قيمة عددية لأجل كل قيمة $t \in [0, T]$ حيث $T > 0$. نأخذ تجزئة منتظمة للمجال $[0, T]$ بخطوة $t = \frac{T}{N}$

لأجل عدد صحيح موجب N ، و سنرمز بـ W_k, V_k لقيمة $W(t_k), V(t_k)$ عند الزمن $t_k = k dt, k = 0, 1, \dots, N$

$0, 1, \dots, N$ عندئذ لدينا من خصائص عملية وينر أن $W_0 = V_0 = 0$ باحتمال 1. وأنّ العلاقتان الآتيتان محققتان:

$$W_{k+1} = W_k + dW_{k+1}, k = 0, 1, \dots, N - 1$$

$$V_{k+1} = V_k + dV_{k+1}, k = 0, 1, \dots, N - 1$$

إذ إن $\{dV_k\}_0^N, \{dW_k\}_0^N$ متتاليتان من المتغيرات العشوائية المستقلة مثني مثني ولكل منها توزيع $dV_k, dW_k \sim \sqrt{dt}N(0,1)$ وبالتالي بأخذ $Z_k \in \mathbb{R}$ متغير عشوائي مستمره التوزيع $N(0,1)$ ، يمكننا الحصول على قيمة Z_k باستخدام العملية العشوائية RandomReal في لغة البرمجة Mathematica بعد تحديد تابع التوزيع الطبيعي المعياري ومن ثم بضربه بالمقدار \sqrt{dt} نحصل على قيم جديدة مستقلة لـ dV_k, dW_k كما في المقطع البرمجي الآتي:

```
dW=Sqrt[dt]*RandomReal[NormalDistribution[0,1]]
dV=Sqrt[dt]*RandomReal[NormalDistribution[0,1]]
```

ومن أجل كل تطبيق للسطر البرمجي السابق نحصل على قيمة dV_k, dW_k محددة تتعلق بـ Z_k إحدى قيم المتغير العشوائي Z_k ، وبأخذ مجموعة من القيم تنتج عملية معاينة والعينة dV_k, dW_k عينه عشوائية حجمها $N > 30$ لها توزيع طبيعي $dW_k, dV_k \sim \sqrt{dt}N(0,1)$ عندئذ
 $W_{k+1} = W_k + dW_{k+1}, \quad V_{k+1} = V_k + dV_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1$
 وعمليتا وينر الناتجتان $W(t; w), V(t, v)$ متعلقتان بالحدث الاحتمالي $(w, v) \in \Omega_W \times \Omega_V$ وهما مساران لعمليتا وينر من أجلهما ينتج مسار واحد لحل المعادلة (2).

وعليه يمكن حساب قيمة تقريبية لتكامل إيتو من أجل عملية وينر $W(t)$ مثلاً، كالاتي:

$$\int_0^t f(s)dW(s) = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^N f(t_{k-1})(dW_k) \approx \sum_{k=1}^N f(t_{k-1})(dW_k),$$

وبهذه الطريقة سيمكننا من إيجاد تقريب للحدود العشوائية $GdW + HdV$ في المعادلة (2).

3-2 الحلول العددية للمعادلة التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد مع عمليتي وينر
 سنقوم بتطبيق طريقة أولر مارياما [9] إلى المعادلة التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد (2). ونشير إلى أن هذه الطريقة طبقت لحل مسألة المعادلة التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد (1) مع عملية وينر واحدة وليس أكثر من عملية.

طريقة أولر-مارياما (Euler-Maruyama Method):

نستخدم تجزئة منتظمة لمجال الحل $[0, T]$ كالاتي:

$$\Delta: \equiv \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots < t_N = T\}$$

حيث $t_k = kdt, k = 0, 1, \dots, N$ و $dt = (T)/N$ طول الخطوة، وبفرض أنه يوجد m عدد صحيح موجب بحيث يكون $\frac{T}{m} = dt$ تقريباً. وسنفرض أن الطريقة العددية تنتج متتالية الحل العددي $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, \dots, x_N$ كمحاكاة للحل الدقيق $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k), \dots, X(t_N)$ ، وبعد الحصول على $dW_k, dV_k, k = 0, 1, \dots, N$ وبالتالي يتحدد مسارين لعملية وينر عندئذ يمكن تقريب المؤثر التفاضلي باستخدام المؤثر الفرقى الآتي:

$$dX(t_k) \approx X(t_{k+1}) - X(t_k)$$

بتعويض هذا التقريب في المعادلة (2) وحساب الدوال F و G و H من أجل القيم المتقطعة x_k, x_{k-m} للحل نحصل على صيغة أولر-مارياما التكرارية لإيجاد الحل العددي للمعادلة (2) من نوع $NSDDE$ ، كالاتي:

$$\begin{aligned} x_{k-m} &= \phi(t_{k-m}), \quad k = 0, \dots, N-1 \\ x_{k+1} &= x_k + r(x_{k-m+1} - x_{k-m}) + F(t_k, x_k, x_{k-m})dt + G(t_k, x_k, x_{k-m})dW_{k+1} \\ &\quad + H(t_k, x_k, x_{k-m})dV_{k+1}, \\ k &= 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (3)$$

وتحسب القيم المتقطعة بإجراء محاكاة حاسوبية لعمليتي وينر سابقة الذكر.

3-3 التقارب العددي:

نقوم بدراسة التقارب الضعيف لطريقة أولر-مارياما، وتحديد مرتبة التقارب القوي عند تطبيقها لحل المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد (2). تم تطبيق الطريقة العددية المذكورة لحل بعض الأنماط من المعادلات التفاضلية العشوائية في الحالات الخاصة الآتية الخالية من الحد المحايد والمتعلقة بعملية وينر واحدة فقط:

• المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة SDDE والتي يغيب فيها الحد المحايد: [19]

$$\begin{cases} d(X(t)) = F(t, X(t), X(t-\tau))dt + G(t, X(t), X(t-\tau))dW(t), t \in [0, T] \\ X(t) = \phi(t); t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (4)$$

• المعادلات التفاضلية العشوائية SDE والتي يغيب فيها كل حد متأخر: [18]

$$\begin{cases} d(X(t)) = F(t, X(t))dt + G(t, X(t))dW(t), t \in [0, T] \\ X(0) = \beta : const \end{cases} \quad (5)$$

حيث دالتا الازاحة والانتشار G, F في النموذجين (4)-(5) يحققان شرط ليبنتش [14]:

$$\begin{aligned} F(t, x_1, y_1) - F(t, x_2, y_2) &\leq L_i(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) \\ G(t, x_1, y_1) - G(t, x_2, y_2) &\leq K_i(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|), i = 1, 2 \\ \forall x_1, x_2, y_1, y_2 &\in R, t \in R^+ \end{aligned}$$

لأجل $L_i, K_i, \neq 1, 2$ ثوابت ليبنتش موجبة.

مبرهنة (1) [9]:

الحل العددي بطريقة أولر-مارياما (3) للمعادلة NSDDE (1) متقارب بقوة من المرتبة $\frac{1}{2}$ أي تتحقق لأجل ثابت كفي C_1 غير مرتبط بطول الخطوة dt العلاقة الآتية:

$$\max_{0 \leq n \leq N} E(|e_n|^2) \leq C_1(dt)$$

مبرهنة (2) [14]:

الحل العددي بطريقة أولر-مارياما (3) للمعادلة NSDDE (1) متقارب بضعف من المرتبة 1 أي تتحقق لأجل ثابت كفي C_2 غير مرتبط بطول الخطوة dt العلاقة الآتية:

$$\max_{0 \leq n \leq N} |E(e_n)| \leq C_2(dt)$$

مبرهنة (3):

الحل العددي بطريقة أولر-مارياما (3) عندما يتم تطبيقها على المعادلة التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد بعملية وينر (2) متقارب بضعف من المرتبة 1 أي تتحقق العلاقة الآتية:

$$\max_{0 \leq n \leq N} |E(e_n)| \leq C_3(dt)$$

لأجل ثابت كفي C_3 غير مرتبط بطول الخطوة dt .

البرهان:

إن الحل العددي للمعادلة (2) يمكن كتابته بطريقة أولر-مارياما بالشكل

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + r[x_{n+1-m} - x_{n-m}] + F(t, x_n, x_{n-m})dt + G(t, x_n, x_{n-m})dw(t) \\ &\quad + H(t, x_n, x_{n-m})dv(t) \\ x_{n+1} &= x_n + \Psi(r, x_{n-m+1}, x_{n-m}, x_n, dt, dw(t), dv(t))\end{aligned}$$

حيث :

$$\begin{aligned}\Psi(r, x_{n-m+1}, x_{n-m}, x_n, dt, dw(t), dv(t)) \\ = r[x_{n-m+1} - x_{n-m}] + F(t, x_n, x_{n-m})dt + G(t, x_n, x_{n-m})dw(t) \\ + H(t, x_n, x_{n-m})dv(t)\end{aligned}$$

ومنه

$$x(t_{n+1}) = X(t_n) + \Psi(r, X(t_{n-m+1}), X(t_{n-m}), X(t_n), dt, dw(t), dv(t))$$

ولنعرف التابع

$$\begin{aligned}dn &= \Psi(r, X(t_{n-m+1}), X(t_{n-m}), X(t_n), dt, dw(t), dv(t)) \\ &\quad - \Psi(r, x_{n-m+1}, x_{n-m}, x_n, dt, dw(t), dv(t)) = \\ r[X(t_{n-m+1}) - X(t_{n-m})] &+ F(t_n, X(t_n), X(t_{n-m}))dt + G(t_n, X(t_n), X(t_{n-m}))dw(t) \\ &+ H(t_n, X(t_n), X(t_{n-m}))dv(t) \\ - [r[(x_{n-m+1}) - (x_{n-m})] &+ F(t_n, x_n, x_{n-m})dt + G(t_n, x_n, x_{n-m})dw(t) \\ &+ H(t, x_n, x_{n-m})dv(t)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}= r(e_{n+1-m}) - r(e_{n-m}) + k_1(e_n)dt + k_2(e_{n-m})dt + k_3(e_n)dw(t) + \\ k_4(e_{n-m})dw(t) + k_5(e_n)dv(t) + k_6(e_{n-m})dv(t)\end{aligned}$$

حيث $\zeta_j, k_j, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ موجودة وفق نظرية القيمة الوسطى كالاتي:

$$\begin{aligned}k_1 &= \left. \frac{\partial F(t, x, y)}{\partial x} \right|_{\zeta_1}, k_2 = \left. \frac{\partial F(t, x, y)}{\partial y} \right|_{\zeta_2} \\ k_3 &= \left. \frac{\partial G(t, x, y)}{\partial x} \right|_{\zeta_3}, k_4 = \left. \frac{\partial G(t, x, y)}{\partial y} \right|_{\zeta_4} \\ k_5 &= \left. \frac{\partial H(t, x, y)}{\partial x} \right|_{\zeta_5}, k_6 = \left. \frac{\partial H(t, x, y)}{\partial y} \right|_{\zeta_6}\end{aligned}$$

وهذه المشتقات موجودة ومحدودة لأن $F, G, H \in C^1$ ولها قيمة عظمى محلياً $|k_j| \leq K_j$ هي قيمة

ثابت شرط ليبشز المحلي للتابع عند هذا المجال.

نقدّر الخطأ الشامل كفرق بين الحل الدقيق و الحل العددي عند t_{n+1} :

$$\begin{aligned}e_{n+1} &= X(t_{n+1}) - x_{n+1} = X(t_{n+1}) - x(t_{n+1}) + x(t_{n+1}) - x_{n+1} = \\ &[X(t_{n+1}) - x(t_{n+1})] + [X(t_n) - x_n] \\ &\quad + [\Psi(r, X(t_{n-m+1}), X(t_{n-m}), X(t_n), dt, dw(t), dv(t)) \\ &\quad - \Psi(r, x_{n-m+1}, x_{n-m}, x_n, dt, dw(t), dv(t))] \\ &\leq \delta_{n+1} + e_n + dn\end{aligned}$$

$$E(e_{n+1}) \leq E(\delta_{n+1} + e_n + dn) \leq E(\delta_{n+1}) + E(e_n) + E(dn)$$

وبالتالي

$$\begin{aligned}E(e_{n+1}) &\leq E(\delta_{n+1}) + E(e_n) \\ &\quad + E(r(e_{n+1-m}) - r(e_{n-m}) + k_1(e_n)dt + k_2(e_{n-m})dt + k_3(e_n)dw(t) \\ &\quad + k_4(e_{n-m})dw(t) + k_5(e_n)dv(t) + k_6(e_{n-m})dv(t))\end{aligned}$$

$$\leq (1+r)E(\delta_{n+1}) + (1+k_1dt)E(e_n) + (k_2dt)E(e_{n-m})$$

$$.E(dw(t)) = E(dv(t)) = 0$$

ومنه بأخذ القيمة المطلقة وبحسب شرط ليبتشز المحلي فإنه توجد K_1, K_2 ، وتطبيق متراجحة المثلث نحصل

على الآتي:

$$|E(e_{n+1})| \leq C^*dt^2 + (1+K_1dt)|E(e_n)| + (K_2dt)|E(e_{n-m})|, \quad (6)$$

نستخدم الاستقراء الرياضي لإثبات مرتبة التقارب وذلك بتجزئة المجال $[0, T]$ لمجالات طولها τ ، ونقدم البرهان

على مرحلتين.

المرحلة الأولى: نبدأ بالمجال الابتدائي $I_0 = [0, \tau]$ من أجل $n = 0, 1, \dots, m$ ، أن $t_n \in [0, \tau]$ و

عندئذ يكون $e_{n-m} = 0$ لأن الحل معطى بدقة وفق الشرط الابتدائي، وعلى هذا

المجال تتحقق العلاقة الآتية:

$$|E(e_{n+1})| \leq C^*dt^2 + (1+K_1dt)|E(e_n)|$$

وبناءً على ذلك نجد:

$$|E(e_1)| \leq C^*dt^2$$

$$|E(e_2)| \leq C^*dt^2 + (1+K_1dt)|E(e_1)| \leq C^*dt^2 + (1+K_1dt)C^*dt^2$$

$$\leq (1+(1+K_1dt))C^*dt^2$$

$$|E(e_3)| \leq C^*dt^2 + (1+K_1dt)|E(e_2)| \leq (1+(1+K_1dt) + (1+K_1dt)^2)C^*dt^2$$

⋮

$$|E(e_{n+1})| \leq C^*dt^2 + (1+K_1dt)|E(e_n)| \leq (1+(1+K_1dt) + \dots + (1+K_1dt)^n)C^*dt^2$$

$$= \frac{(1+K_1dt)^{n+1} - 1}{(1+K_1dt) - 1} C^*dt^2 = ((1+K_1dt)^{n+1} - 1) \frac{C^*}{K_1} dt \leq$$

$$((e^{K_1dt})^{n+1} - 1) \frac{C^*}{K_1} dt \leq (e^{K_1T} - 1) \frac{C^*}{K_1} dt = C^*dt$$

وهنا نجد أن مرتبة التقارب الضعيف هي ١ على المجال I_0 .

المرحلة الثانية: نفترض أن مرتبة التقارب الضعيف هي ١ على المجال الجزئي

$$I_j = [\tau j, \tau(j+1)]$$

أي تتحقق العلاقة:

$$|E(e_{n+1})| \leq C^*dt$$

ولنبرهن أن ذلك أيضاً محقق على المجال

$$:I_{j+1} = [\tau(j+1), \tau(j+2)]$$

نبدأ من العلاقة (6) من أجل $m(j+1) \leq n \leq m(j+2)$

$$|E(e_{n+1})| \leq C^*dt^2 + (1+K_1dt)|E(e_n)| + (K_2dt)|E(e_{n-m})|$$

ويكون e_{n-m} هو الخطأ على المجال الجزئي I_j وبالتالي نجد:

$$|E(e_{n+1})| \leq C^*dt^2 + (1+K_1dt)|E(e_n)| + (K_2dt)C^*dt$$

$$\leq (C^* + K_2C^*)dt^2 + (1+K_1dt)|E(e_n)|$$

$$\leq C^*dt^2 + (1+K_1dt)|E(e_n)|$$

وبنفس العمليات الرياضية المنفذة على الإثبات من أجل المجال I_0 تتحقق العلاقة:

$$|E(e_{n+1})| \leq C^*dt, \quad m(j+1) \leq n \leq m(j+2)$$

بالتالي فالعلاقة محققة على كامل $[0, T]$ وبهذا يتم البرهان ويتحقق لدينا الآتي:

$$\max_{0 \leq n \leq N} |E(e_n)| \leq C^*(dt)$$

لا نملك نتائج عن مرتبة التقارب القوي للحل العددي بطريقة أولر مارياما عندما يتم تطبيقها على المعادلة على المعادلة التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد (2) ولكن وبملاحظة أن إضافة الحد المحايد يغير نوع المعادلة كما أن إضافة العملية الثانية لوينر ستزيد من تعقيد المسألة والصعوبة في حلها فإن الطريقة المقدمة تحتاج لدراسة تحليلية جديدة للتقارب. ولكن عوضاً عن هذا سنقوم بتقدير مرتبة التقارب العددي القوي لهذه الطريقة.

٣-٤ تقدير مرتبة التقارب العددي:

نظراً لعدم توفر الحل الدقيق $X(T)$ سنقوم بالاستعاضة عنه بحل عددي x_N^{fine} نحصل عليه باستخدام خطوة زمنية صغيرة $dt = 2^{-10}$ ، وبعدها نقوم بإيجاد الحلول العددية $x_{n_1}^{h_1}, x_{n_2}^{h_2}, \dots, x_{n_5}^{h_5}$ باستخدام خطوات مختلفة $h_i, i=1,2,\dots,5$ ، ثم نحسب قيم الفروق $\epsilon_i^j = |x_{n_i}^{h_i} - x_N^{fine}|^2$ الموافقة لمسارات وينر $W(t; w_j), V(t; v_j)$ ، ومن ثم نجري معاينة $\{\epsilon_i^j\}_{1 \leq j \leq M}$ حيث $M > 30$ عدد العينات وكل مسار للحل من العينة ينتج عن حل المعادلة (3) من أجل مسارين مستقلين لعمليتي وينر W, V خاصين به، وبالتالي العينة هي عبارة عن M مساراً مختلفاً للحل في كل تجربة. عندئذٍ بإيجاد التوقع الرياضي لـ ϵ_i^j على العينة نحصل على علاقة الخطأ بمتوسط المربعات الآتية:

$$E(\epsilon_i^j) = E(|x_{n_i}^{h_i} - x_N^{fine}|^2)$$

والذي يستخدم كمقدّر للمقدار $E(|X(T) - x(T)|^2)$. وعند القيام بهذه العملية نحصل على متتالية تقديرات لقيم الأخطاء $errors = \{e_1, e_2, \dots, e_5\}$ حيث $e_i = E(\epsilon_i^j)$ هو تقدير الخطأ الموافق للخطوة h_i . وبفرض أن الطريقة العددية متقاربة بمتوسط المربعات من المرتبة γ فإن ذلك يكتب بحسب التعريف كالاتي:

$$E(|X(T) - x(T)|^2) \leq O(dt^{2\gamma})$$

ومن أجل تقدير قيمة γ فإننا نستخدم [11]

$$ECO_i = \frac{1}{2} \frac{\ln(e_i) - \ln(e_{i+1})}{\ln(h_i) - \ln(h_{i+1})}, \quad i = 1, 2, \dots, 4,$$

وبأخذ متوسط القيم الناتجة ينتج تقدير مرتبة التقارب العددي القوي للطريقة المستخدمة.

بالنسبة لتقدير مرتبة التقارب الضعيف، فإننا سنأخذ الحل العددي $x_{n_i}^{h_i}(j) = x_{n_i}^{h_i}(j)$ الموافق لمسار وينر $W(t; w_j)$ ، ونقوم بإيجاد توقع الحل العددي التقريبي $E(\{x_{n_i}^{h_i}(j)\}_{1 \leq j \leq M})$ بنفس الطريقة نوجد توقع بديل الحل العددي الدقيق $E(\{x_N^{fine}(j)\}_{1 \leq j \leq M})$ ، فيكون تقدير التقارب الضعيف معطى كالاتي:

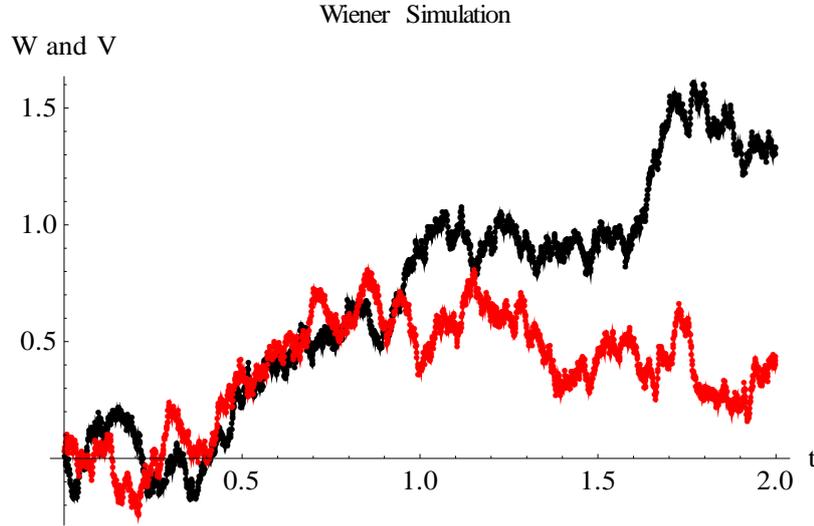
$$e_i = \left| E(\{x_{n_i}^{h_i}(j)\}_{1 \leq j \leq M}) - E(\{x_N^{fine}(j)\}_{1 \leq j \leq M}) \right|$$

لنحصل على متتالية تقديرات لقيم الأخطاء $errors = \{e_1, e_2, \dots, e_5\}$ ومن أجل تقدير مرتبة

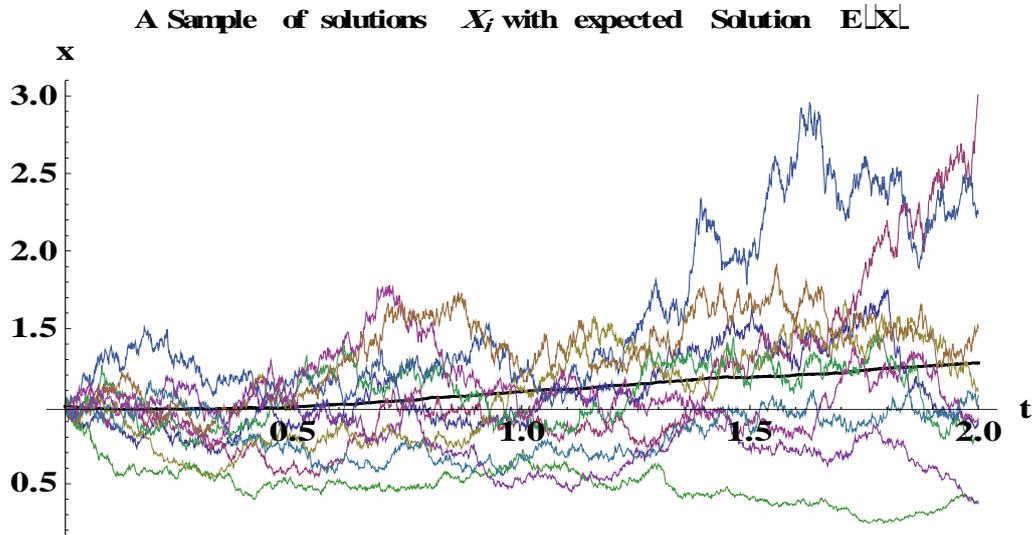
التقارب الضعيف فإننا سنستخدم

0.0008046	0.00075944	0.00294119	0.00229722	2^{-7}
0.50632	1.24392	0.62902	1.2901	مرتبة التقارب

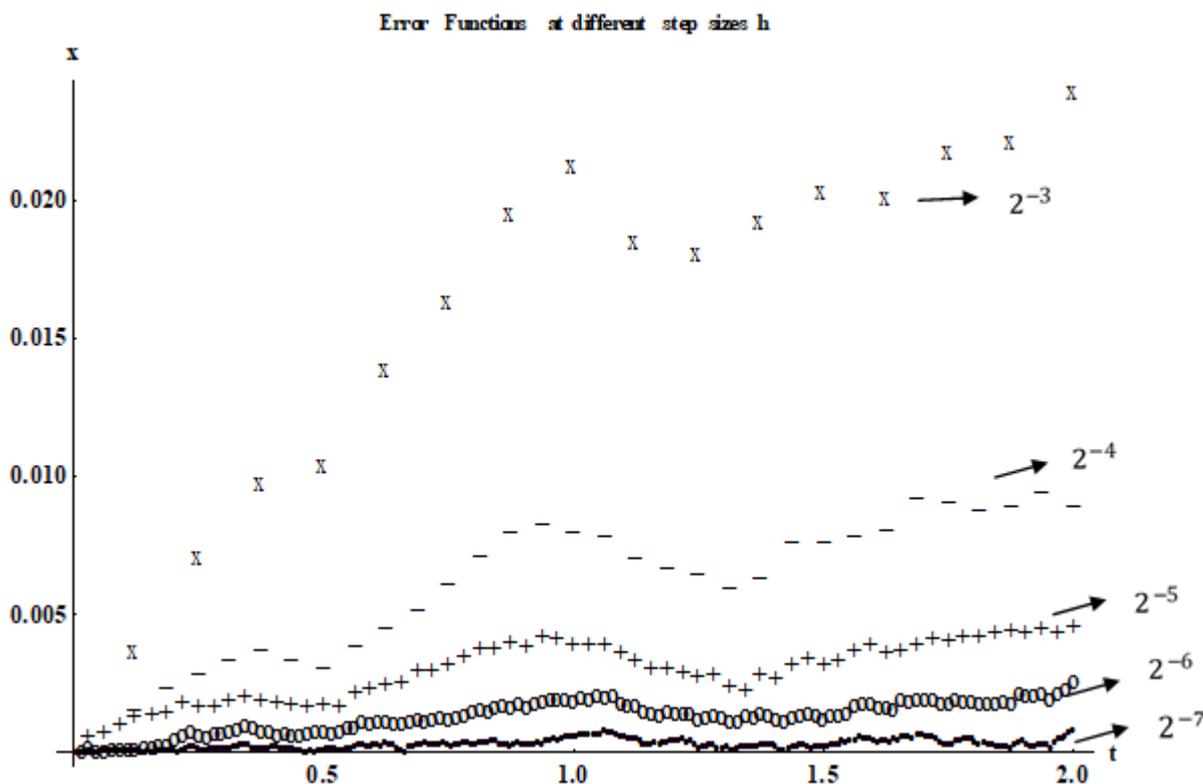
الشكل(1): محاكاة عمليتي وينر من أجل $N = 2^{11}, dt = 2^{-10}$



الشكل (٢): الحل العددي بطريقة أولر-مارياما مع عمليتين لوينر من أجل $N = 2^{11}, dt = 2^{-10}$.



الشكل (٣): الخطأ المطلق لطريقة أولر-مارياما مع عمليتين لوينر من أجل خطوات مختلفة $h_i = 2^{-2-i}, i = 1, 2, \dots, 5$



مسألة (٢): لنأخذ المسألة غير الخطية الآتية:

$$\begin{cases} d\left(x(t) - \frac{1}{4}x(t-\tau)\right) = (\lambda x(t) + bx(t-\tau))dt + (\mu \sin(x(t)) + dx(t-\tau))dw(t) \\ \quad + \varepsilon \cos(x(t-\tau))dv(t) \\ x(t) = t + \tau; t \in [-1, 0] \end{cases}$$

بتأخير $\tau = 1$ ، وقيم الوسطاء $\alpha = 0.25, \lambda = -0.5, \beta = 0.1, \mu = 0.1, d = 0.1, \varepsilon = -0.1$

وذلك على المجال $[0, 2]$ من أجل $N = 2^{11}, dt = 2^{-10}$

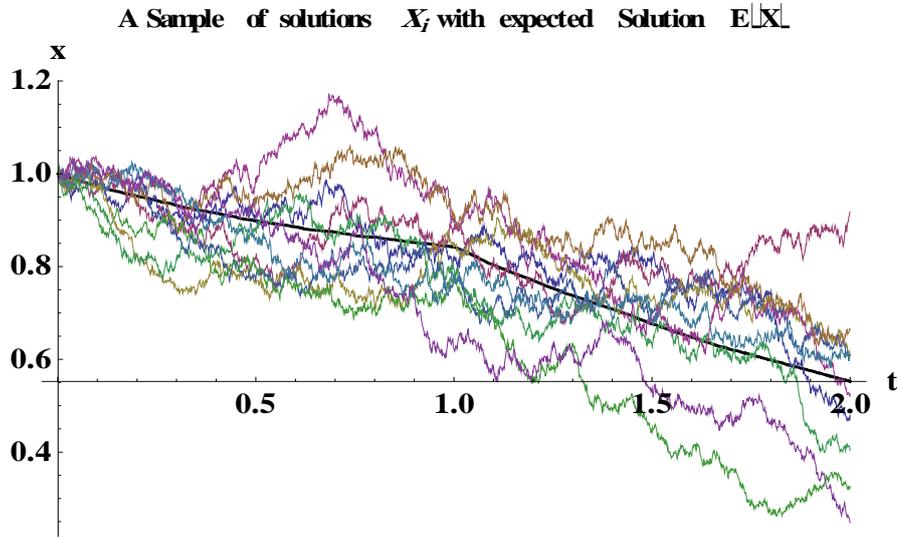
نحل المسألة ٢ غير الخطية بطريقة أولر مارياما، بالإضافة إلى إنشاء محاكاة عددية لعمليتي وينر العشوائيتين. وندرج في الجدول (٢) نتائج مقارنات الأخطاء المطلقة ومرتبة التقارب للطريقة باستخدام الخطوات العشوائية. وذلك عند تطبيقها لحل المسألة المعطاة بوجود عمليتين لوينر $w(t), v(t)$ وتطبيقها مرة أخرى عند وجود عملية واحدة $w(t)$ نرسم في الشكل (٤) محاكاة عمليتي وينر $w(t), v(t)$ في المجال $[0, 2]$ باستخدام خطوة $h = 2^{-10}$.

نبين في الشكل (٥) عرض ٢٠ حلاً من الحلول العددية $\{X^j\}_{1 \leq j \leq M}$ مع توقع العينة الكاملة $E(X)$ بطريقة

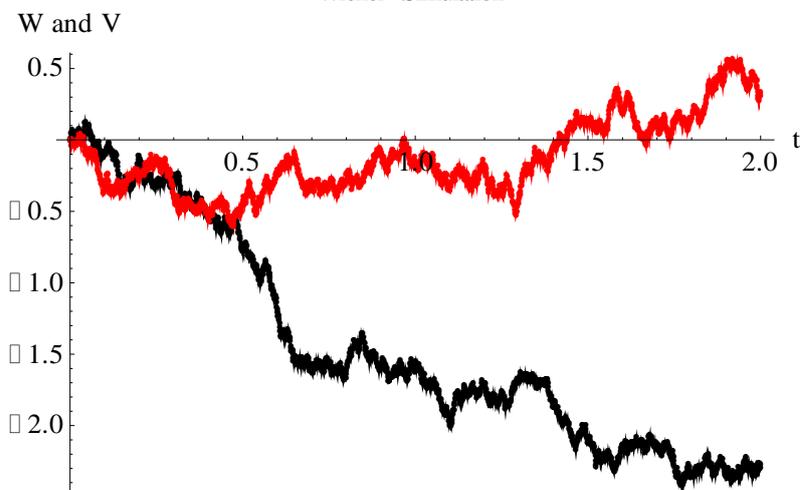
أولر-مارياما ونلاحظ أن هذه الحلول متقاربة نحو توقعها . يظهر الشكل (٦) الرسوم البيانية للأخطاء المطلقة بطريقة أولر مارياما من أجل عدة خطوات مختلفة h_i من خلال حساب الفرق بالقيمة المطلقة بين X_{hi} و X_{fine} ونلاحظ أنه كلما كانت الخطوة h_i أصغر كلما تضاعف الخطأ وهذا يشير إلى تقارب الحل العددي. الجدول (2): مقارنات الأخطاء المطلقة الضعيفة والقوية ومرتبة التقارب للطريقة باستخدام خطوات مختلفة

طريقة أولر-مارياما التقارب القوي مع عمليتين لوينر $w(t), v(t)$	طريقة أولر-مارياما التقارب الضعيف مع عمليتين لوينر $w(t), v(t)$	طريقة أولر-مارياما التقارب القوي مع عملية لوينر $w(t)$	طريقة أولر-مارياما التقارب الضعيف مع عملية لوينر $w(t)$	طول الخطوة h
0.0002652	0.013537	0.0196201	0.0268714	2^{-3}
0.0000717	0.0065124	0.00907603	0.0130855	2^{-4}
0.00002010	0.00315437	0.00342141	0.0064525	2^{-5}
$6.527 * 10^{-6}$	0.00152101	0.000552364	0.00305682	2^{-6}
$2.3427 * 10^{-6}$	0.00072504	0.0000976332	0.00135106	2^{-7}
0.85289	1.055	٠.٥٣٥٦٢	1.07848	مرتبة التقارب

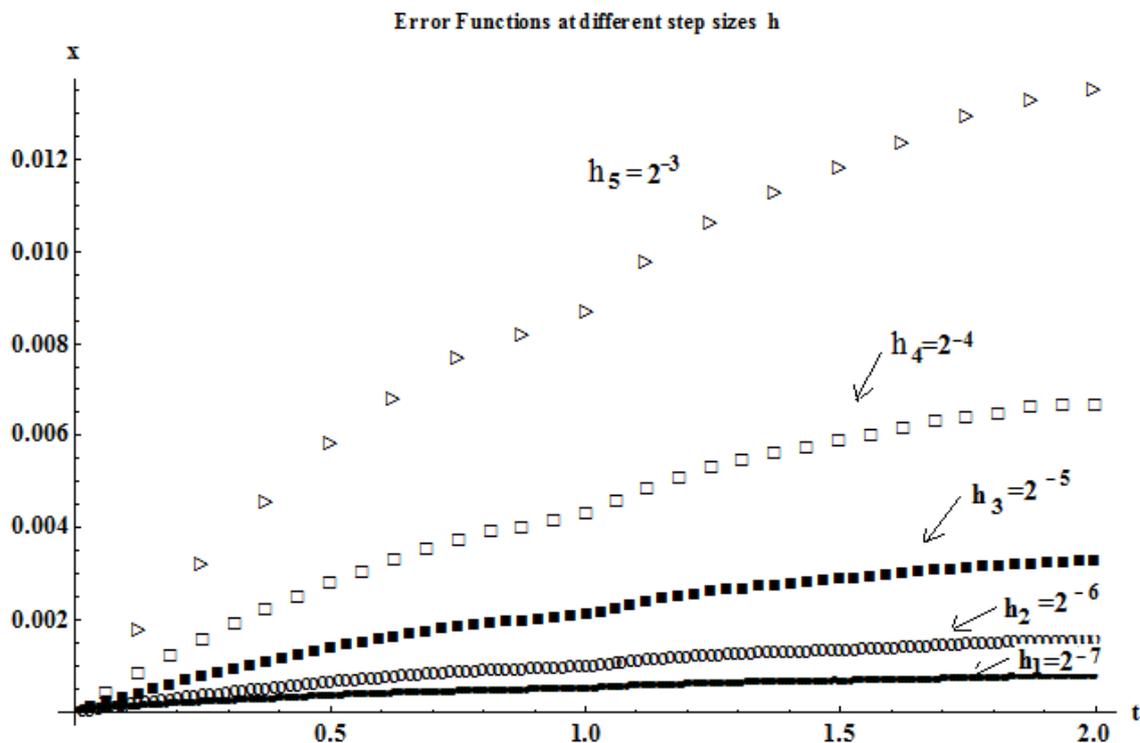
الشكل (٤): محاكاة عمليتي وينر من أجل $N = 2^{11}, dt = 2^{-10}$



الشكل (٥): الحل العددي بطريقة أولر مارياما مع عمليتين لوينر من أجل $N = 2^{11}$, $dt = 2^{-10}$
Wiener Simulation



الشكل (٦): دالة الخطأ لطريقة أولر مارياما من أجل عدة خطوات مختلفة من أجل $N = 2^{11}$, $dt = 2^{-10}$



الاستنتاجات والتوصيات:

قمنا بإيجاد الحلول العددية لنموذج من المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد مع عمليتي وينر (٢) في الحالتين الخطية وغير الخطية وذلك باستخدام طريقة عددية هي طريقة أولر مارياما ولتبيان الفاعلية والدقة العددية قمنا بتقدير مرتبة التقارب لها، ثم إجراء اختبارات عددية ومقارنات بين أخطاء هذه الطريقة بالحالة الأولى

مع عملية واحدة لوينر وبالحالة الثانية مع عمليتي وينر عندما يتم تطبيقها لحل مسألتين إحداهما خطية والأخرى غير خطية من نفس نمط المسألة المطروحة. تشير الدراسة إلى النتائج الآتية:

نتيجة ١: طريقة أولر-مارياما المطبقة على نموذج المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد مع عمليتي وينر (٢) متقاربة بضعف من المرتبة 1.

نتيجة ٢: طريقة أولر-مارياما المطبقة على نموذج المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد مع عمليتي وينر (٢) متقاربة بقوة من المرتبة $\frac{1}{2}$.

كما نوصي بالآتي:

• تطوير طرائق وتقنيات عددية لمحاكاة الحل لنماذج من المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد تتضمن أكثر من عملية وينر.

• تطوير طرائق وتقنيات عددية لمحاكاة الحل لجمل من المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد.

المراجع (References)

1. AKHTARI B., *Numerical Solution of Stochastic State-Dependent Delay Differential Equations Convergence and Stability*. Advances in Difference Equations. Vol.2019, 396, **2019**,1-34.
2. CAO W., M. LIU, Z. FAN, *MS-Stability of the Euler-Maruyama Method for Stochastic Delay Differential Equations*, Applied Mathematics and Computation Vol. 159, **2004**, pp. 127–135.
3. CAO W.; Z. Zhang, *On Exponential Mean-Square Stability of Two-Step Maruyama Methods for Stochastic Delay Differential Equations*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 245, **2013**, 182–193.
4. CHOISTOPHER T. H.& E. Buckwar, *Numerical Analysis of Explicit one-step Methods for Stochastic Delay Differential Equations*, LMS J. Comput. Math. 3 (**2000**) 315-335.
5. ERNST P.A., F. Soleymani, *A Legendre-Based Computational Method for Solving a Class of Itô Stochastic Delay Differential Equations*. Numer Algor, Springer Nature **2018**,1-16.
6. GAO Sh. and J. Hu, *Numerical Method of Highly Nonlinear and Nonautonomous Neutral Stochastic Delay Differential Equations With Markovian Switching*, Advances in Difference Equations, Vol 2020, 688, **2020**, 1-37.
7. GUO Q., X. MAO, R. Yue, *The Truncated Euler-Maruyama Method for Stochastic Delay Differential Equations*, Numer Algor. Vol.78, **2018**, 599–624.
8. HU, P. and C. HUANG, *Delay Dependent Stability of Stochastic Split-Step θ Methods for Stochastic Delay Differential Equations*, Applied Mathematics and Computation Vol. 339, **2018**, pp. 663–674.
9. JI Y., *Convergence Rate of Euler-Maruyama Scheme for SDDEs of Neutral Type*, Journal of Inequalities and Applications. Vol. 2021, 5, **2021**, 1-21.
10. LI X, H. Hong, *Numerical Analysis of Three θ Methods for Neutral Stochastic Delay Differential Equations*, Journal of Physics: Conference Series, ICAITA **2019**,1-5.
11. MAO X., *Numerical Solutions of Stochastic Functional Differential Equations*, London Mathematical Society, Royal Society (UK), 1-21, **2003**.

12. TAN J., H. WANG, Y. Guo and Z. Zhu, *Numerical Solutions to Neutral Stochastic Delay Differential Equations with Poisson Jumps under Local Lipschitz Condition*, Mathematical Problems in Engineering, Vol. **2014**, 11 pages.
13. WANG X., S. GANA, D. WANG, *θ -Maruyama Methods for Nonlinear Stochastic Delay Differential Equations*, Applied Numerical Mathematics 98 (**2015**) 38–58.
14. ZHENG Y., *Asset Pricing Based on Stochastic Delay Differential Equations*, PHD Thesis, Iowa State University, **2015**.
15. MAO X., *Numerical Solutions of Stochastic Functional Differential Equations*, London Mathematical Society, Royal Society (UK), 1-21, **2003**.
16. MIEKISZ J., J. POLESZCZUK and M. BODNAR, *Stochastic Models of Gene Expression with Delayed Degradation*, Bull Math Biol, 73, **2011**:2231-2247.
17. GUPTA C., J.M. López, R. Azencott, M.R. Bennett, K. Josi and W.Ott. *Modeling Delay in Genetic Networks: From Delay Birth-Death Processes to Delay Stochastic Differential Equations*, The Journal of Chemical Physics 140, 204108 (**2014**).
18. MAHMOUD S. M. , A. AL-WASSOUF, A. EHSSAN, *Numerical Simulation Stochastic of Differential Equations by Using Spline Function Approximations*, Tishreen University Journal Research-Basic Science Series Vol. 38, No 6, **2016**, **1-23**.
19. MAHMOUD S. M., A. Al-WASSOUF, and A. ASAAD, *Numerical Collocation Method for Simulation of some of Stochastic Delay Differential Equations*, Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies-Basic Sciences Series Vol. 42, No. 1 **2020**, **1-**
20. MAHMOUD S. M., A. Al-Wassouf, and A. S. Ehsaan, *Numerical Spline Method for Simulation of Stochastic Differential Equations Systems*. Arab Journal of Sciences & Research Publishing, Vol.5, No.4, **2021**, 1-20.
21. MAHMOUD S. M., A. Al-Wassouf, and A. S. Ehsaan. *Stochastic Differential-Algebraic Equations*, Tartous University Journal Research-Basic Science Series, Vol.5, No.4,**2021**.
22. MAHMOUD S. M., A. Al-Wassouf, and A. S. Ehsaan, *A Numerical Technique for Solving a Model of Second-Order Stochastic Differential Equations*, Damascus University Journal Research-Basic Science Series, 22-8-**2021**.
23. TAN L., Ch. Yuan. *Strong Convergence of A Tamed Theta Scheme for Nsdde with One-Sided Lipschitz Drift*. Applied Mathematics and Computation 338, **2018**, 607–623.
24. ZHOU Sh., H. Jin, *Numerical Solution to Highly Nonlinear Neutral-Type Stochastic Differential Equation*. Applied Numerical Mathematics 140, **2019**, 48–75.
25. WANG P. and Y. Xu, *Averaging Method for Neutral Stochastic Delay Differential Equations Driven by Fractional Brownian Motion*, Hindawi, Journal of Function Spaces Vol. **2020**, 7 pages.
26. ALADAG E. E. LI, *Stochastic Delay Differential Equations*, Master, Thesis, Middle East Technical University, 2017, pages 86.
27. Kloeden .p.e and Shardlow T. , *The Milstein scheme for stochastic delay differential equations without anticipative calculus*, the University of Manchester, 2010.
28. Norhayati Rosli, *Stochastic Rung-Kutta Method for Stochastic delay differential equations*, Faculty of Science Universiti Teknologi Malaysia, 2012.
29. MAHMOUD S. M., A. Al-Wassouf, and A. S. Ehsaan, *Numerical Techniques For Solving Systems Of Stochastic differential equations*, Tishreen University, **2021**.