مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٨) العدد (١) ٢٠٢٤
Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (8) No. (1) 2024

طريقة الفروق المنتهية بشبكة متداخلة لمحاكاة الحلول العددية لمعادلة إغناتشاك للاجهاد في الحالة المستوية للانفعال

د.هالا محمد*
أ.د. منتجب الحسن**
حمزه عزيز عبدالرحمن***

(تاريخ الإيداع ٥/١٢/ ٢٠٢٣ – تاريخ النشر ١١/٣/ ٢٠٢٤)

□ ملخّص □

في علم المرونة الديناميكية هنالك حاجة إلى نمذجة استجابة الأوساط المرنة للاجهادات المختلفة باستخدام معادلات بالاجهاد فقط. وفي هذا الصدد برزت معادلة إغناتشاك التنسورية كنموذجٍ رياضيٍ بديل لمعادلات التوازن التقليدية في المرونة الديناميكية. وبسبب عدم توافر الحلول الدقيقة لهذه المسألة تم في هذا البحث اقتراح صياغة عددية لإيجاد حلول عددية تقريبية لمعادلة إغناتشاك في الأوساط المتجانسة ثنائية البعد والموحدة خصائص المرونة. هذه الصياغة معتمدة على تقريبات الفروق المنتهية ومفهوم الشبكة المتداخلة الذي قدّم حلاً لمشكلة رقعة الشطرنج والتي ظهرت كتباعد في الحلول العددية لمعادلة إغناتشاك.

الكلمات المفتاحية:

المرونة الديناميكية، معادلة إغناتشاك، تقريبات الفروق المنتهية، الشبكة المتداخلة، أمواج المرونة.

* دكتور ، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة طرطوس
** أستاذ دكتور ، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة البعث
*** طالب دراسات عليا (ماجستير)، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة طرطوس.

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٨) العدد (١) ٢٠٢٤

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (8) No. (1) 2024

Staggered Finite Differences Method for the Simulatin of Numerical Solutions to Ignaczak stress equation in plane strain state

Dr. Hala Mouhamad*

Prof. Montajab al hasan**

Hamza Abd Alrahman***

(Received 5/12/2023.Accepted 11/3/2024)

□ABSTRACT □

In Elastodynamics, there is a need to model the response of Elastic Media to different stresses using pure stress equations. In this regard, Ignaczak equation has emerged as a mathematical model replacing the standard balance equations in Elastodynamics. Because an Exact Solution for this problem is not available. A numerical scheme has been proposed in this research to find approximate numerical solutions to the Ignaczak equation in two dimentional homogeneous isotropic media. The proposed scheme is based on Finite differeneces approximations and Staggered grid consept which provided a solution to the cheackerboard problem that appeared as a divergence in numerical solutions to Ignaczak equation

KeyWords: Elastodynamics, Ignaczak equation, Finite Differences Approximation, Staggered Grid, Elastic Waves.

* Professor, Mathematics Departement, Science Faculty, Tartous University.

**Professor, Mathematics Departement, Science Faculty, Al Baath University

*** Higher Studies Student (M.Sc), Mathematics Departement, Science Faculty, Tartous University.

مقدمة:

في علم المرونة الديناميكي، تبنى معادلات الحركة للجسم الصلب باستخدام العلاقة بين متّجه الإزاحة وتنسور الاجهاد [8] في كل نقطة من نقاط الجسم. محاولات كثيرة جرت لإيجاد توصيف رياضي مكافئ معتمد كلّياً على تنسور الاجهاد ومرتبط مباشرة بالقوى المطبّقة على الجسم.

كانت معادلات إغناتشاك التنسورية للاجهاد [5,6,7] هي أولى المحاولات الناجحة في هذا الصدد، وأدّت إلى إمكانية وصف استجابة الجسم الصلب لأنماط شدّ مختلفة أكثر عموميةً، وتعقيداً. وكما كان الحال مع معادلات المرونة الديناميكية للإزاحة، فإنّه يصعب إيجاد حلول دقيقة لمسائل القيمة الحدّية والابتدائية المتعلّقة بكثير من مسائل المرونة التطبيقية، ومن هنا تأتي اهمية تطوير صياغات عددية لإيجاد حلول عددية تقريبية لهذه المسائل.

نهدف في هذا البحث إلى تطبيق طريقة الفروق المنتهية [4] مع مفهوم الشبكة المتداخلة [1,2,9] لإيجاد الحل العددي التقريبي لتنسور الاجهاد في كل نقطة من نقاط الجسم انطلاقاً من معادلات إغناتشاك التنسورية.

هدف البحث:

يهدف البحث إلى دراسة الحلول العددية لمسألة إغناتشاك للاجهاد في الحالة المستوية الأولى للانفعال وتقديم الصيغ العددية المناسبة للتقريب لموجة المرونة باستخدام طريقة الفروق المنتهية.

طرائق البحث و مواده:

يندرج هذا البحث تحت اختصاص الرياضيات التطبيقية، وبشكل خاص في مجال التحليل العددي والميكانيك الرياضي، إذ يعتمد على تقنيات التحليل العددي الأساسية ويوظفها في إيجاد حلول تقريبية للمعادلات التفاضلية الجزئية المستخدمة بشكل رئيسي في نمذجة الظواهر الميكانيكية. ومن أجل متطلبات هذا البحث نقدم معادلة إغناتشاك في المرونة الديناميكية.

معادلة إغناتشاك في المرونة الديناميكية:

في علم المرونة الديناميكية يطلَب عادةً تحديد الازاحة $\boldsymbol{u} = \big(u_1(\boldsymbol{x},t), u_2(\boldsymbol{x},t), u_3(\boldsymbol{x},t)\big)$ الواقعة على نقاط وسط مادّي $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ في لحظة زمنية $t \in [0, T]$، انطلاقاً من معادلة التوازن في المرونة الديناميكية والمعطاة كالآتي:

$$\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{S} + \boldsymbol{F} = \rho\, \ddot{\boldsymbol{u}} \tag{1}$$

نلاحظ أن هذه المعادلة تربط بين تسارع الازاحة $\boldsymbol{u}$ من جهة، والإجهاد $\boldsymbol{S}$ والقوى المطبقة $\boldsymbol{F}$ من جهة أخرى.

بتطبيق مؤثّر التدرّج المتناظر $\boldsymbol{\nabla}^{sym}\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla u} + \boldsymbol{\nabla u}^T) = \frac{1}{2}\left(\partial_i u_j + \partial_j u_i\right)$ نجد:

$$\boldsymbol{\nabla}^{sym}\big(\rho^{-1}(\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{S} + \boldsymbol{F})\big) = \boldsymbol{\nabla}^{sym}\, \ddot{\boldsymbol{u}} = \ddot{\boldsymbol{E}}$$

حيث $\boldsymbol{E}$ تنسور الانفعال، وباستخدام العلاقات التأسيسية العكسية [6,7]:

$$\boldsymbol{\nabla}^{sym}\big(\rho^{-1}(\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{S})\big) - \boldsymbol{K}[\ddot{\boldsymbol{S}}] = -\boldsymbol{\nabla}^{sym}\boldsymbol{F}$$

وهي معادلة تربط بين تنسور الاجهاد $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},t)$ والقوى المطبّقة، ولا تحتوي على الازاحة. وتدعى معادلة إغناتشاك وتعطى من أجل جسم متجانس موحّد خصائص المرونة كالآتي:

$$\nabla^{sym}(\nabla.\boldsymbol{S})-\frac{\rho}{2\mu}\left[\ddot{\boldsymbol{S}}\ -\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\left(tr(\ddot{\boldsymbol{S}})\right)\ \boldsymbol{I}\right]=-\nabla^{sym}\boldsymbol{F} \quad (2)$$

وتكتب بالشكل التنسوري [6] :

$$\left(S_{(ik,k)}\right)_{,j)}-\frac{\rho}{2\mu}\left(\ddot{S}_{ij}-\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\ddot{S}_{kk}\delta_{ij}\right)+F_{(i,j)}=0$$

وتعطى مسألة إغناتشاك الحدّية والابتدائية في الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة باستخدام $\alpha,\beta=1,2$بالشكل:

$$\left(S_{(\alpha\gamma,\gamma)}\right)_{,\beta)}-\frac{\rho}{2\mu}\left(\ddot{S}_{\alpha\beta}-\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\ddot{S}_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}\right)+F_{(\alpha,\beta)}=0 \quad (٣)$$

مع الشروط الحدّية والابتدائية:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},0)&=\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}), && \boldsymbol{x}\in\Omega\\ \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},t)&=\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x},t), && \boldsymbol{x}\in\partial\Omega\,,t\in[0,T]\end{aligned} \quad (٤)$$

وحيث λ,μ ثوابت متعلقة بطبيعة الوسط و $F(\boldsymbol{x},t)$حدّ المصدر الذي يصف محصلة القوى الخارجية غير السطحية المؤثرة، ويمكن استخدام تنسور العزم الزلزالي $M_{ij}(\boldsymbol{x},t)$ (Seismic Moment Tensor) الذي يضاف إلى $S_{ij}(\boldsymbol{x},t)$ في كل لحظة زمنية. والذي يمكن أن يعبر عن اضطراب في تنسور الإجهاد قد يحدث بشكل مفاجئ كما في الانهيارات او الانفجارات. وفي هذه الدراسة سنستخدم حد مصدر تنسوري نقطي معرّف كالآتي:

$$M_{ij}(\boldsymbol{x},t)=\begin{cases} r\,e^{-\alpha(t-t_0)^2}, & \boldsymbol{x}=(x_0,y_0)\,, \quad i=j\\ 0, & elsewhere \ \ or \quad i\neq j\end{cases}$$

وهذا الحدّ يعطي نبضة غوصية سعتها r وترددها α تبلغ ذروتها في لحظة t_0. ويسمى حد مصدر نقطي انفجاري (explosive point Source) وهو يملك قيمة غير صفرية في نقطة وحيدة (x_0,y_0)، وبهذا يكتمل وصف مسألة إغناتشاك الحدّية الابتدائية. وتجدر الإشارة إلى أنه لم تتوافر حلول دقيقة لهذه المسألة على حد علمنا حتى لحظة إعداد هذا البحث.

صياغة عددية لمعادلة إغناتشاك باستخدام الفروق المنتهية:

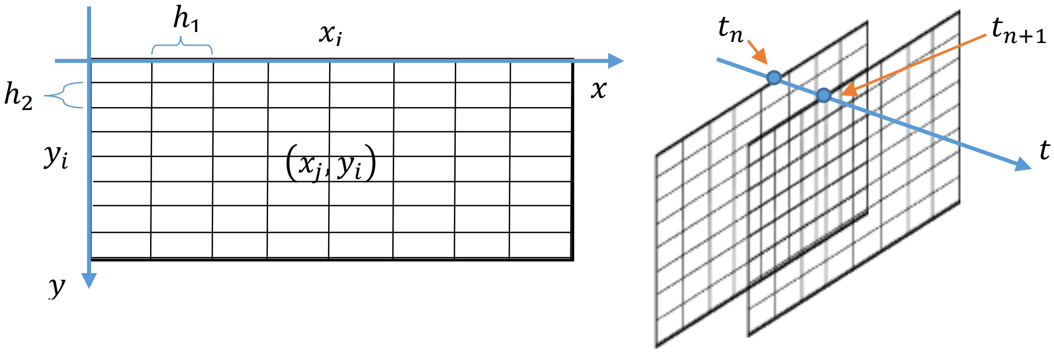
إنّ فكرة إيجاد الحل العددي للمسألة $(4)-(3)$ تتلخص في إيجاد قيم تقريبة عددية $\bar{S}_{\alpha\beta}^{ijk}\approx S_{\alpha\beta}(x_j,y_i,t_k)$ لهذا الحل عند نقاط متقطعة (x_j,y_i,t_k). من أجل ذلك علينا تقطيع منطقة العمل ثنائية البعد والمجال الزمني لنحصل على شبكة ثنائية البعد تتغير قيم الحل عليها مع مرور الزمن وذلك على نقاط زمنية متقطعة، وبناءً على ذلك نقسم منطقة العمل إلى مجموعة من النقاط بحيث تكون المسافة بينها ثابتة سواءً أكانت على المحور الأفقي أم الشاقولي وذلك بالشكل:

$$\Omega_{h_1,h_2}=\left\{(x_j,y_i)=(a+jh_1,c+ih_2)\,,1\leq j\leq M_1-1,1\leq i\leq M_2-1\right\} \quad (3)$$

حيث $M_1,M_2>2$ ثابتين صحيحين و $h_1=\frac{b-a}{M_2}>0\,,h_2=\frac{c-d}{M_1}>0$ تمثلان الخطوة المكانية، عندئذ نحصل على نقاط شبكة التقطيع وعددها $(M_2-1)\times(M_1-1)$، وهذا التقطيع يتم في لحظات زمنية متقطعة بالشكل:

$$I_\tau = \left\{ t_k = k\tau\,, \qquad k = 0,1,\dots N\,, \qquad N = \frac{T}{\tau} \right\} \tag{4}$$

حيث: $\tau > 0$ هو الخطوة الزمنية.



الشكل 1: الشبكة المكانية خلال لحظات زمنية مختلفة

الآن لتسهيل بناء التقريب سوف نكتب هذه المعادلات بالشكل الصريح:

$$\left(\left(S_{(\alpha\gamma,\gamma)}\right)_{,\beta)}\right)_{col} = Sym\begin{pmatrix} S_{11,11}+S_{12,21} & S_{11,12}+S_{12,22} \\ S_{21,11}+S_{22,21} & S_{21,12}+S_{22,22} \end{pmatrix}_{col}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\left(S_{11,11}+S_{12,21}\right) & S_{11,12}+S_{12,22}+S_{21,11}+S_{22,21} \\ S_{21,11}+S_{22,21}+S_{11,12}+S_{12,22} & 2\left(S_{21,12}+S_{22,22}\right) \end{pmatrix}_{col}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\partial_{11} & 2\partial_{12} & 0 & 0 \\ \partial_{12} & \partial_{22} & \partial_{11} & \partial_{12} \\ \partial_{12} & \partial_{22} & \partial_{11} & \partial_{12} \\ 0 & 0 & 2\partial_{12} & 2\partial_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{21} \\ S_{22} \end{pmatrix} \tag{5}$$

و بما أنّ:

$$\frac{\rho}{2\mu}\left(\ddot{S}_{\alpha\beta} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\ddot{S}_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}\right)_{Col}$$
$$= \partial_{tt}\begin{pmatrix} \frac{\rho}{2\mu}\left(1-\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\right) & 0 & 0 & -\frac{\rho}{2\mu}\left(\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\right) \\ 0 & \frac{\rho}{2\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho}{2\mu} & 0 \\ \frac{\rho}{2\mu}\left(-\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\right) & 0 & 0 & \frac{\rho}{2\mu}\left(1-\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{21} \\ S_{22} \end{pmatrix} \tag{6}$$

بما أن $S_{12} = S_{21}$، والتكافؤ بين السطرين الثاني والثالث والعمودين الثاني والثالث، عندئذٍ تكتب جملة المعادلات السابقة بالشكل المكافئ:

$$\mathbf{A}\cdot\ddot{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S}, \tag{7}$$

$$A=\begin{pmatrix}\frac{\left(1-\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\right)\rho}{2\mu} & 0 & -\frac{\lambda\rho}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\\ 0 & \frac{\rho}{2\mu} & 0\\ -\frac{\lambda\rho}{2\mu(3\lambda+2\mu)} & 0 & \frac{\left(1-\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\right)\rho}{2\mu}\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}\partial_{11} & \partial_{12} & 0\\ \frac{\partial_{12}}{2} & \frac{\partial_{11}+\partial_{22}}{2} & \frac{\partial_{12}}{2}\\ 0 & \partial_{12} & \partial_{22}\end{pmatrix}.$$

نكتب هذه المعادلات بالشكل الصريح:

$$\ddot{\boldsymbol{S}}=\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S} \tag{8}$$

حيث أن:

$$\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\frac{4\mu(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)\rho}\partial_{11} & \frac{2\mu(3\lambda+2\mu)}{(\lambda+2\mu)\rho}\partial_{12} & \frac{2\lambda\mu}{\lambda\rho+2\mu\rho}\partial_{22}\\ \frac{\mu}{\rho}\partial_{12} & \frac{\mu}{\rho}(\partial_{11}+\partial_{22}) & \frac{\mu}{\rho}\partial_{12}\\ \frac{2\lambda\mu}{\lambda\rho+2\mu\rho}\partial_{11} & \frac{2\mu(3\lambda+2\mu)}{(\lambda+2\mu)\rho}\partial_{12} & \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)\rho}\partial_{22}\end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$S=\begin{pmatrix}S_{11}\\ S_{12}\\ S_{22}\end{pmatrix}$$

عندئذٍ لإيجاد هذا الحل التقريبي ينبغي إيجاد صياغة متقطعة للمعادلة (8) تكون محققة على نقاط الشبكة. نبدأ باستبدال المؤثرات التفاضلية (9) بتقريباتها الملائمة من مؤثرات الفروق المنتهية [4] :

$$\partial_{11}S_{\alpha\beta}(x_j,y_i,t_k)\approx\frac{\bar{S}_{\alpha\beta}^{\,i(j+1)k}-2\bar{S}_{\alpha\beta}^{\,ijk}+\bar{S}_{\alpha\beta}^{\,i(j-1)k}}{h_1^2} \tag{10}$$

$$\partial_{12}S_{\alpha\beta}(x_j,y_i,t_k)\approx\frac{\bar{S}_{\alpha\beta}^{\,(i+1)(j+1)k}-\bar{S}_{\alpha\beta}^{\,(i+1)(j-1)k}-\bar{S}_{\alpha\beta}^{\,(i-1)(j+1)k}+\bar{S}_{\alpha\beta}^{\,(i-1)(j-1)k}}{h_1h_2} \tag{11}$$

$$\partial_{22}S_{\alpha\beta}(x_j,y_i,t_k)\approx\frac{\bar{S}_{\alpha\beta}^{\,(i+1)jk}-2\bar{S}_{\alpha\beta}^{\,ijk}+\bar{S}_{\alpha\beta}^{\,(i-1)jk}}{h_2^2} \tag{12}$$

ويمكن تقريب المشتق الزمني من المرتبة الثانية على الشبكة الزمنية باستخدام مؤثر الفروق المركزي الآتي:

$$\ddot{S}_{\alpha\beta}(x_i,y_j,t_k)\approx\frac{\bar{S}_{\alpha\beta}^{\,ijk}-2\bar{S}_{\alpha\beta}^{\,ij(k-1)}+\bar{S}_{\alpha\beta}^{\,ij(k-2)}}{\tau^2},\qquad \bar{S}_{\alpha\beta}^{\,ij(-1)}:=0 \tag{13}$$

مؤثرات الفروق $(10)-(13)$ معرفة من أجل:

$$1\le j\le M_1,\qquad 1\le i\le M_2,\qquad 1\le k\le N.$$

وتحدد الشروط الحدية ببساطة وفق:

$$\left.\begin{aligned}\bar S_{\alpha\beta}^{\;ij0}&=S_{\alpha\beta}(x_j,y_i,0)=\psi_{\alpha\beta}(x_j,y_i,0), && (x_j,y_i)\in\Omega_{h_1,h_2}\\ \bar S_{\alpha\beta}^{\;ijk}&=S_{\alpha\beta}(x_j,y_i,t_k)=p_{\alpha\beta}(x_j,y_i,t_k), && (x_j,y_i)\in\partial\Omega\,,t_k\in[0,T]\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

وبالتالي تنتج الصيغة المتقطعة الآتية:

$$\left.\begin{aligned}\bar S_{11}^{\;ijk}=2\bar S_{11}^{\;ij(k-1)}-\bar S_{11}^{\;ij(k-2)}&+\frac{\tau}{h_1^2}\frac{4\mu(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)\rho}\left(\bar S_{11}^{\;i(j+1)k}-2\bar S_{11}^{\;ijk}+\bar S_{11}^{\;i(j-1)k}\right)\\&+\frac{\tau}{h_1h_2}\frac{2\mu(3\lambda+2\mu)}{(\lambda+2\mu)\rho}\left(\bar S_{12}^{\;(i+1)(j+1)k}-\bar S_{12}^{\;(i+1)(j-1)k}-\bar S_{12}^{\;(i-1)(j+1)k}+\bar S_{12}^{\;(i-1)(j-1)k}\right)\\&+\frac{\tau}{h_2^2}\frac{2\lambda\mu}{\lambda\rho+2\mu\rho}\left(\bar S_{22}^{\;(i+1)jk}-2\bar S_{22}^{\;ijk}+\bar S_{22}^{\;(i-1)jk}\right)\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

$$\begin{aligned}\bar S_{12}^{\;ijk}=2\bar S_{12}^{\;ij(k-1)}-\bar S_{12}^{\;ij(k-2)}&+\frac{\tau\mu}{\rho h_1h_2}\left(\bar S_{11}^{\;(i+1)(j+1)k}-\bar S_{11}^{\;(i+1)(j-1)k}-\bar S_{11}^{\;(i-1)(j+1)k}+\bar S_{11}^{\;(i-1)(j-1)k}\right)\\&+\frac{\tau\mu}{\rho}\left(\frac{\bar S_{12}^{\;i(j+1)k}-2\bar S_{12}^{\;ijk}+\bar S_{12}^{\;i(j-1)k}}{h_1^2}+\frac{\bar S_{12}^{\;(i+1)jk}-2\bar S_{12}^{\;ijk}+\bar S_{12}^{\;(i-1)jk}}{h_2^2}\right)\\&+\frac{\tau\mu}{\rho h_1h_2}\left(\bar S_{22}^{\;(i+1)(j+1)k}-\bar S_{22}^{\;(i+1)(j-1)k}-\bar S_{22}^{\;(i-1)(j+1)k}+\bar S_{22}^{\;(i-1)(j-1)k}\right)\end{aligned}\quad(16)$$

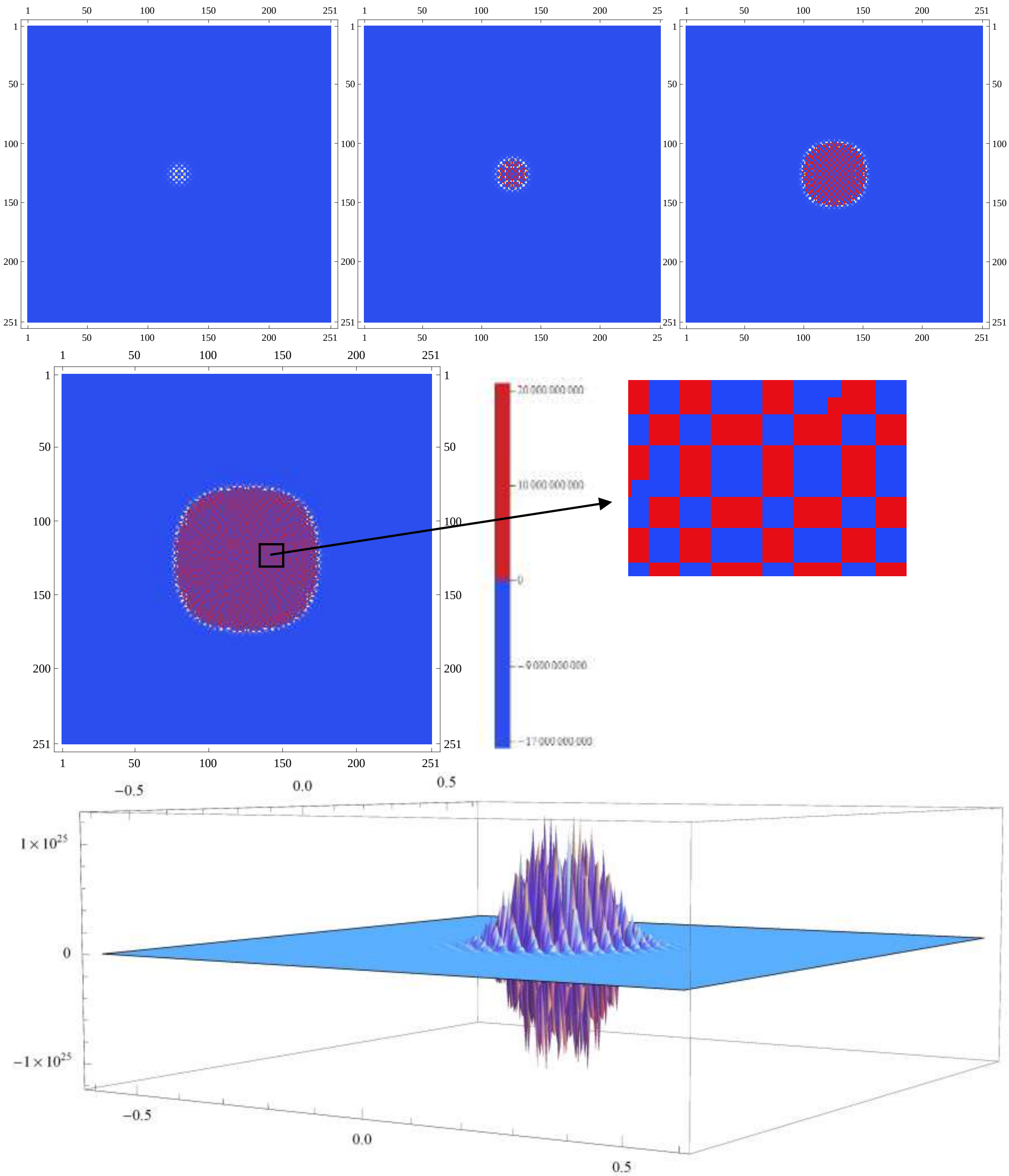
$$\begin{aligned}\bar S_{22}^{\;ijk}=2\bar S_{22}^{\;ij(k-1)}-\bar S_{22}^{\;ij(k-2)}&+\frac{\tau}{h_1^2}\frac{2\lambda\mu}{\lambda\rho+2\mu\rho}\left(\bar S_{11}^{\;i(j+1)k}-2\bar S_{11}^{\;ijk}+\bar S_{11}^{\;i(j-1)k}\right)\\&+\frac{\tau}{h_1h_2}\frac{2\mu(3\lambda+2\mu)}{(\lambda+2\mu)\rho}\left(\bar S_{12}^{\;(i+1)(j+1)k}-\bar S_{12}^{\;(i+1)(j-1)k}-\bar S_{22}^{\;(i-1)(j+1)k}+\bar S_{22}^{\;(i-1)(j-1)k}\right)\\&+\frac{\tau}{h_2^2}\frac{4\mu(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)\rho}\left(\bar S_{22}^{\;(i+1)jk}-2\bar S_{22}^{\;ijk}+\bar S_{22}^{\;(i-1)jk}\right)\end{aligned}\quad(17)$$

في حين يتم إدخال حد المصدر التنسوري في كل لحظة زمنية كالآتي :

$$\bar S_{\alpha\beta}^{ijk}=\bar S_{\alpha\beta}^{ijk-1}+M_{\alpha\beta}(x_j,y_i,t_k)$$

نلاحظ من خلال الشكل(٢) ظهور مايشبه رقعة الشطرنج وهي في الحقيقة قيم متباعدة للحل نحو اللانهاية على نقاط الشبكة ومتعاكسة بالإشارة، هذه المشكلة معروفة سابقاً وتسمى CheckerBoard Problem مشكلة رقعة الشطرنج [2]. وتتمثل بتراكم منتظم ومطّرد لأخطاء التدوير ناجم عن التناظر في مواقع القيم المستخدمة من قبل مؤثرات الفروق المنتهية.

مثال ١: بتطبيق التقريب العددي $(17)-(15)$ من أجل الثوابت $\lambda = 100, \rho = 100, \mu = 30,\ \ \alpha = 150, r = 10^3$ وباعتبار $t \in [0,2], M_1 = M_2 = 251$ نحصل على الحل العددي الموضّح بالشكل:



الشكل(٢): الحل العددي لمسألة إغناتشاك الابتدائية الحدّية المعطاة في المثال ١. وظهور مشكلة رقعة الشطرنج

قُدِّم مفهوم **الشبكة المتداخلة** من قبل M. ALDANA [2] لحل هذه المشكلة. قام حمزة محمد [9] أيضاً بشرح واستخدام هذه الطريقة وسوف نقدّم هذه الطريقة في الفقرة اللاحقة.

صياغة عددية لمعادلة إغناتشاك باستخدام الفروق المنتهية ومفهوم الشبكة المتداخلة:

انطلاقاً من المعادلة:

$$\ddot{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{S} \tag{8}$$

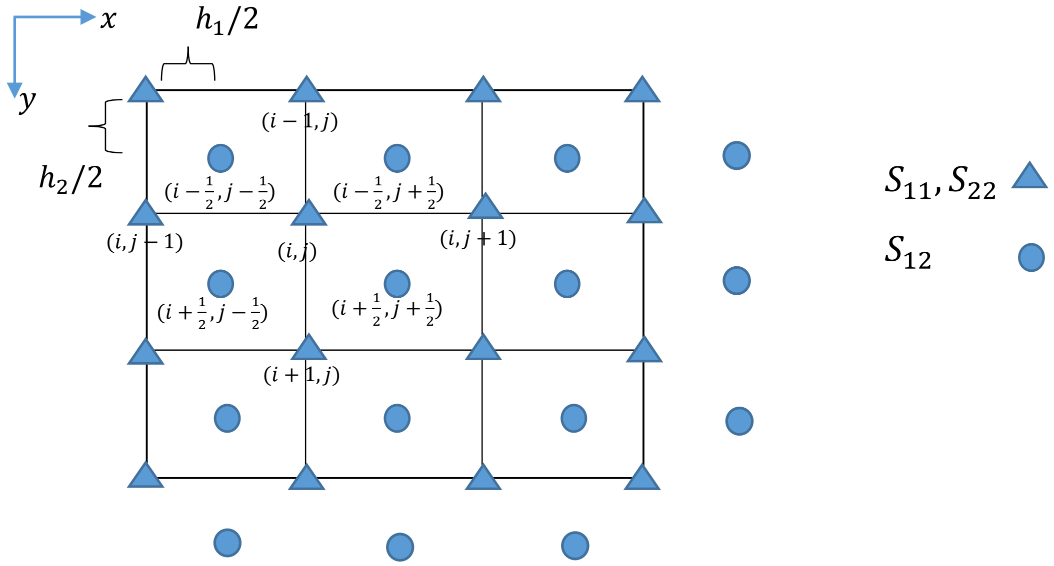
حيث أن:

$$\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)\rho}\partial_{11} & \frac{2\mu(3\lambda+2\mu)}{(\lambda+2\mu)\rho}\partial_{12} & \frac{2\lambda\mu}{\lambda\rho+2\mu\rho}\partial_{22} \\ \frac{\mu}{\rho}\partial_{12} & \frac{\mu}{\rho}(\partial_{11}+\partial_{22}) & \frac{\mu}{\rho}\partial_{12} \\ \frac{2\lambda\mu}{\lambda\rho+2\mu\rho}\partial_{11} & \frac{2\mu(3\lambda+2\mu)}{(\lambda+2\mu)\rho}\partial_{12} & \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)\rho}\partial_{22} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{22} \end{pmatrix}.$$

تتلخص فكرة الشبكة المتداخلة [1,2,9] ببناء شبكة خاصة لكل متحوّل أو تجزيء المتحولات إلى شبكتين أو أكثر متداخلتين، وفي حالتنا سنقوم بتعريف شبكتين مكانيّتين، الأولى تحمل قيم المتحولات S_{11}, S_{22} والثانية مزاحة نصف خطوة في الاتجاهين، أي وفق الشعاع $\left(\frac{h_1}{2}, \frac{h_2}{2}\right)$ وتحمل قيم المتحوّل S_{12}.

يوضّح الشكل (3) الشبكة المتداخلة الناتجة،المؤلفة من شبكتين، الاولى (الأصلية) المشار إلى نقاطها بمثلثات، والشبكة الثانية المزاحة المشار إلى نقاطها بدوائر. نلاحظ أنّه في كلّ نقطة من نقاط الشبكة المزاحة سنتمكّن من تقريب قيم المشتقات المكانية $\partial_{11}S_{12}, \partial_{22}S_{12}$ باستخدام نقاط مجاورة من نفس الشبكة على نفس الأفق والشاقول، ولتقريب المشتق المختلط $\partial_{12}S_{11}, \partial_{12}S_{22}$ نستخدم النقاط الأربعة المحيطة من الشبكة الأساسية والتي ستفي بالغرض. وبنفس الطريقة فإنّه في كل نقطة من نقاط الشبكة الأساسية سنتمكّن من تقريب المشتقات $\partial_{11}S_{11}, \partial_{22}S_{11}, \partial_{11}S_{22}, \partial_{22}S_{22}$ باستخدام نقاط مجاورة من نفس الشبكة على نفس الأفق والشاقول، وسنستخدم النقاط الأربعة المحيطة من الشبكة المزاحة لتقريب قيمة المشتق المختلط $\partial_{12}S_{12}$ لمتحول الشبكة المزاحة.

خلافاً للصيغة العددية المقدمة في مرجع [9] لا ضرورة لاستخدام أي إزاحة زمنية في حالتنا.



الشكل (٣) : نقاط توزع الشبكة المتداخلة والمتحولات المعرفة عليها

بناء على المناقشة السابقة نجد:

$$
\begin{aligned}
\bar{S}_{11}^{\,ijk} = 2\bar{S}_{11}^{\,ij(k-1)} - \bar{S}_{11}^{\,ij(k-2)} & \\
+ \frac{\tau}{h_1^2}\frac{4\mu(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)\rho}\left(\bar{S}_{11}^{\,i\,(j+1)k} - 2\bar{S}_{11}^{\,ijk} + \bar{S}_{11}^{\,i(j-1)k}\right) & \\
+ \frac{\tau}{h_1h_2}\frac{2\mu(3\lambda+2\mu)}{(\lambda+2\mu)\rho}\left(\bar{S}_{12}^{\,\left(i+\frac{1}{2}\right)\left(j+\frac{1}{2}\right)k} - \bar{S}_{12}^{\,\left(i+\frac{1}{2}\right)\left(j-\frac{1}{2}\right)k}\right. & \\
\left. - \bar{S}_{12}^{\,\left(i-\frac{1}{2}\right)\left(j+\frac{1}{2}\right)k} + \bar{S}_{12}^{\,\left(i-\frac{1}{2}\right)\left(j-\frac{1}{2}\right)k}\right) & \\
+ \frac{\tau}{h_2^2}\frac{2\lambda\mu}{\lambda\rho+2\mu\rho}\left(\bar{S}_{22}^{\,(i+1)jk} - 2\bar{S}_{22}^{\,ijk} + \bar{S}_{22}^{\,(i-1)jk}\right) &
\end{aligned}
\qquad (18)
$$

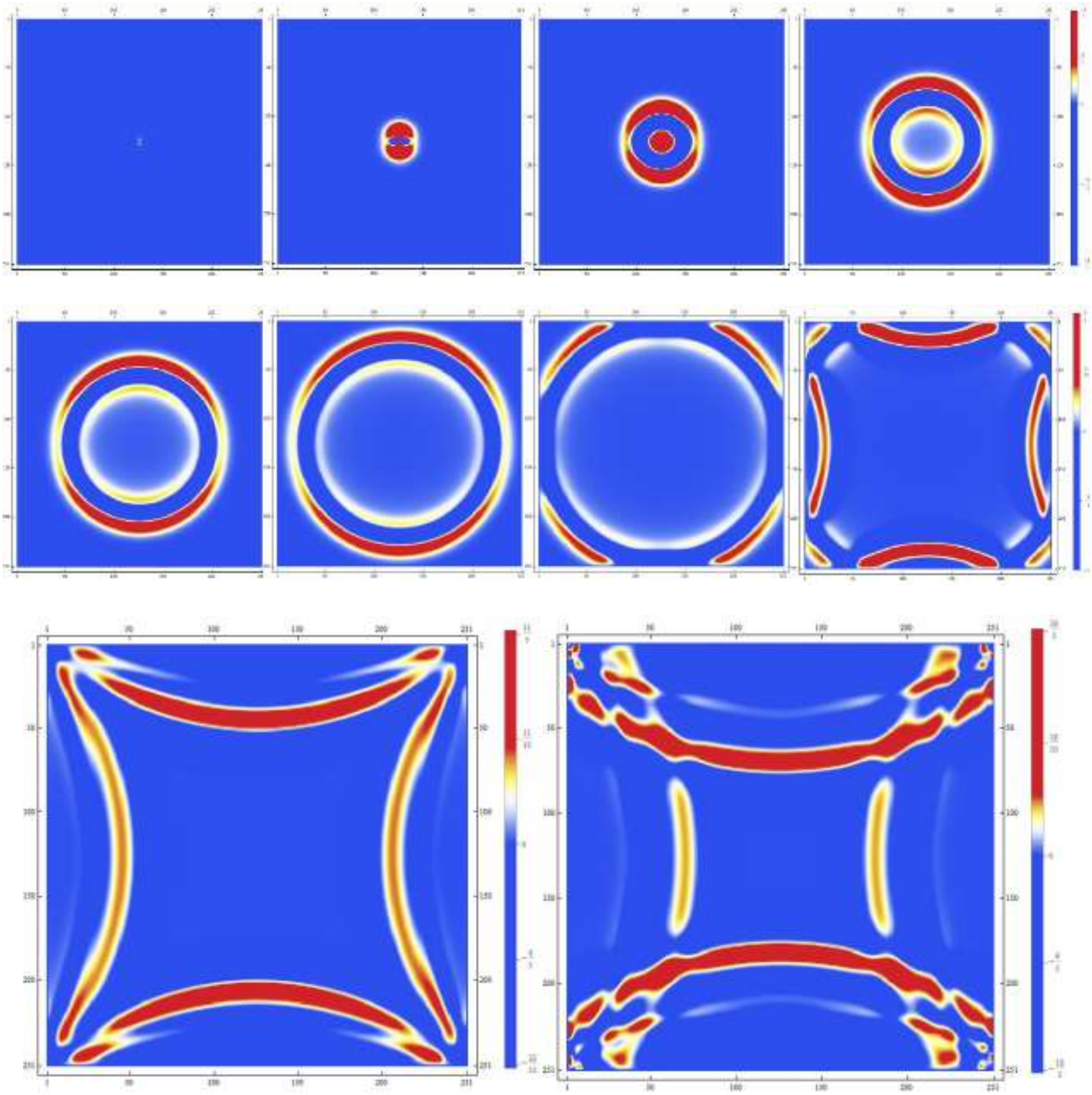
$$\begin{aligned}\bar{S}_{12}^{\left(i+\frac{1}{2}\right)\left(j+\frac{1}{2}\right)k} &= 2\bar{S}_{12}^{\left(i+\frac{1}{2}\right)\left(j+\frac{1}{2}\right)(k-1)} - \bar{S}_{12}^{\left(i+\frac{1}{2}\right)\left(j+\frac{1}{2}\right)(k-2)} \\ &+ \frac{\tau\mu}{\rho h_1 h_2}\Big(\bar{S}_{11}^{(i+1)(j+1)k} - \bar{S}_{11}^{(i+1)(j)k} - \bar{S}_{11}^{(i)(j+1)k} \\ &+ \bar{S}_{11}^{(i)(j)k}\Big) \\ &+ \frac{\tau\mu}{\rho}\left(\frac{\bar{S}_{12}^{\left(i+\frac{1}{2}\right)\left(j+\frac{3}{2}\right)k} - 2\bar{S}_{12}^{\left(i+\frac{1}{2}\right)\left(j+\frac{1}{2}\right)k} + \bar{S}_{12}^{\left(i+\frac{1}{2}\right)\left(j-\frac{1}{2}\right)k}}{h_1^2}\right. \\ &+ \left.\frac{\bar{S}_{12}^{\left(i+\frac{3}{2}\right)\left(j+\frac{1}{2}\right)k} - 2\bar{S}_{12}^{\left(i+\frac{1}{2}\right)\left(j+\frac{1}{2}\right)k} + \bar{S}_{12}^{\left(i-\frac{1}{2}\right)\left(j+\frac{1}{2}\right)k}}{h_2^2}\right) \\ &+ \frac{\tau\mu}{\rho h_1 h_2}\Big(\bar{S}_{22}^{(i+1)(j+1)k} - \bar{S}_{22}^{(i+1)(j)k} - \bar{S}_{22}^{(i)(j+1)k} \\ &+ \bar{S}_{22}^{(i)(j)k}\Big)\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}\bar{S}_{22}^{ijk} &= 2\bar{S}_{22}^{ij(k-1)} - \bar{S}_{22}^{ij(k-2)} \\ &+ \frac{\tau}{h_1^2}\frac{2\lambda\mu}{\lambda\rho + 2\mu\rho}\left(\bar{S}_{11}^{i(j+1)k} - 2\bar{S}_{11}^{ijk} + \bar{S}_{11}^{i(j-1)k}\right) \\ &+ \frac{\tau}{h_1 h_2}\frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + 2\mu)\rho}\Big(\bar{S}_{12}^{\left(i+\frac{1}{2}\right)\left(j+\frac{1}{2}\right)k} - \bar{S}_{12}^{\left(i+\frac{1}{2}\right)\left(j-\frac{1}{2}\right)k} \\ &- \bar{S}_{22}^{\left(i-\frac{1}{2}\right)\left(j+\frac{1}{2}\right)k} + \bar{S}_{22}^{\left(i-\frac{1}{2}\right)\left(j-\frac{1}{2}\right)k}\Big) \\ &+ \frac{\tau}{h_2^2}\frac{4\mu(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)\rho}\left(\bar{S}_{22}^{(i+1)jk} - 2\bar{S}_{22}^{ijk} + \bar{S}_{22}^{(i-1)jk}\right)\end{aligned} \tag{20}$$

بينما يتم إدخال حد المصدر التنسوري كالآتي:

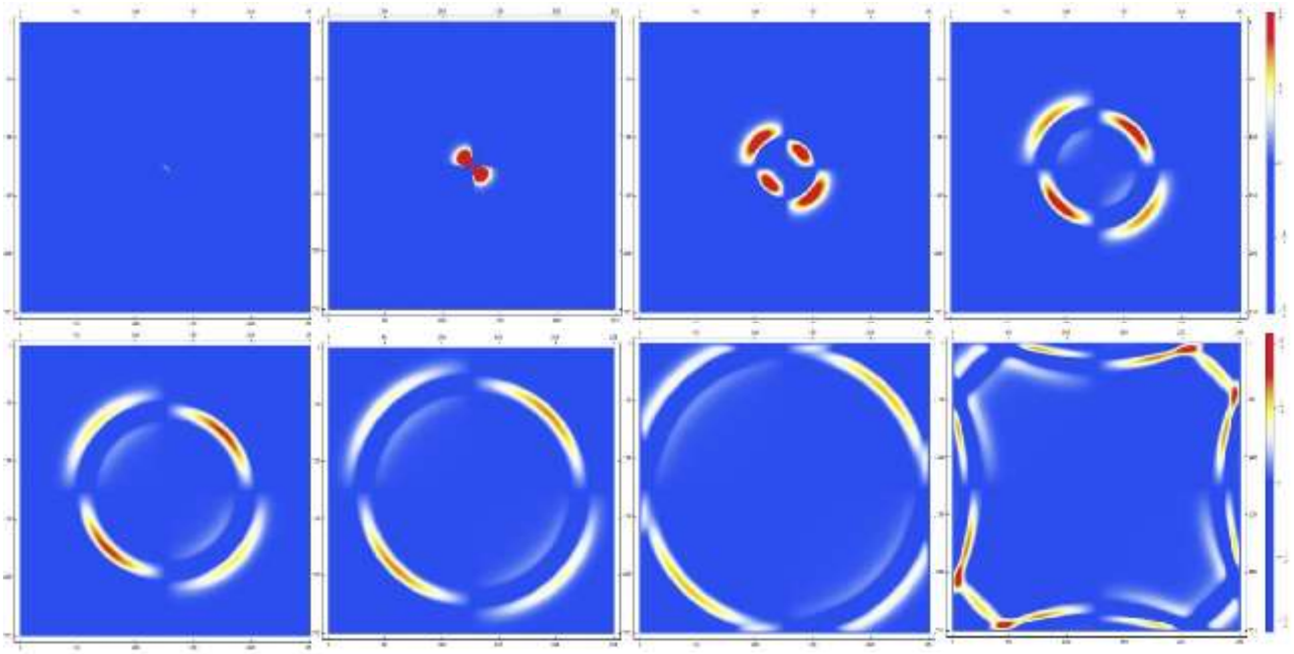
$$\bar{S}_{\alpha\alpha}^{ijk} = \bar{S}_{\alpha\alpha}^{ijk-1} + M_{\alpha\alpha}(x_j, y_i, t_k), \qquad \bar{S}_{12}^{\left(i+\frac{1}{2}\right)\left(j+\frac{1}{2}\right)k} = \bar{S}_{12}^{\left(i+\frac{1}{2}\right)\left(j+\frac{1}{2}\right)k-1} + M_{12}\left(x_{j+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}, t_k\right)$$

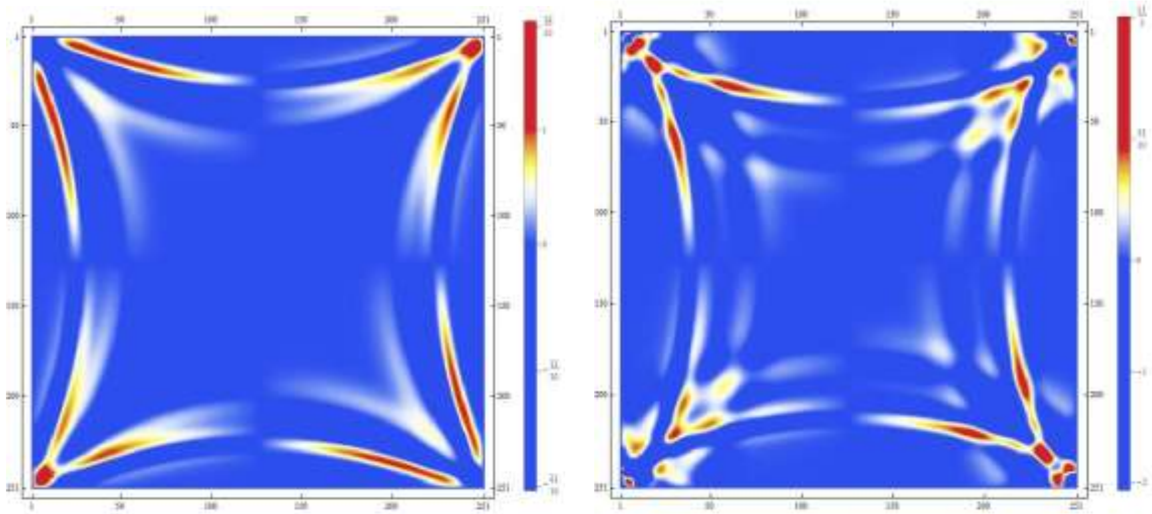
مثال ٢: سنقوم بتطبيق الصيغة العددية $(20) - (18)$، على المسألة المطروحة في المثال ١، وبنفس الثوابت الخاصة بالمثال (1) من أجل $\lambda = 100, \rho = 100, \mu = 30, \alpha = 150, r = 1000$ وباعتبار: $t \in [0,2], M_1 = M_2 = 251$. لنحصل على الحل العددي التقريبي $\bar{\boldsymbol{S}}$ لتنسور الإجهاد $\boldsymbol{S}$ الذي يمثل حل مسألة إغناتشاك المطروحة في المثال(١). تبين الأشكال (٤)،(٥)،(٦) مركبات الحل العددي $\bar{S}_{11}, \bar{S}_{22}, \bar{S}_{12}$ ونلاحظ تقارب الحل العددي وغياب مشكلة رقعة الشطرنج



الشكل(٤): المركبة S_{11} للحل العددي لمسألة إغناتشاك التنسورية الابتدائية الحدية المعطاة في المثال ٢.

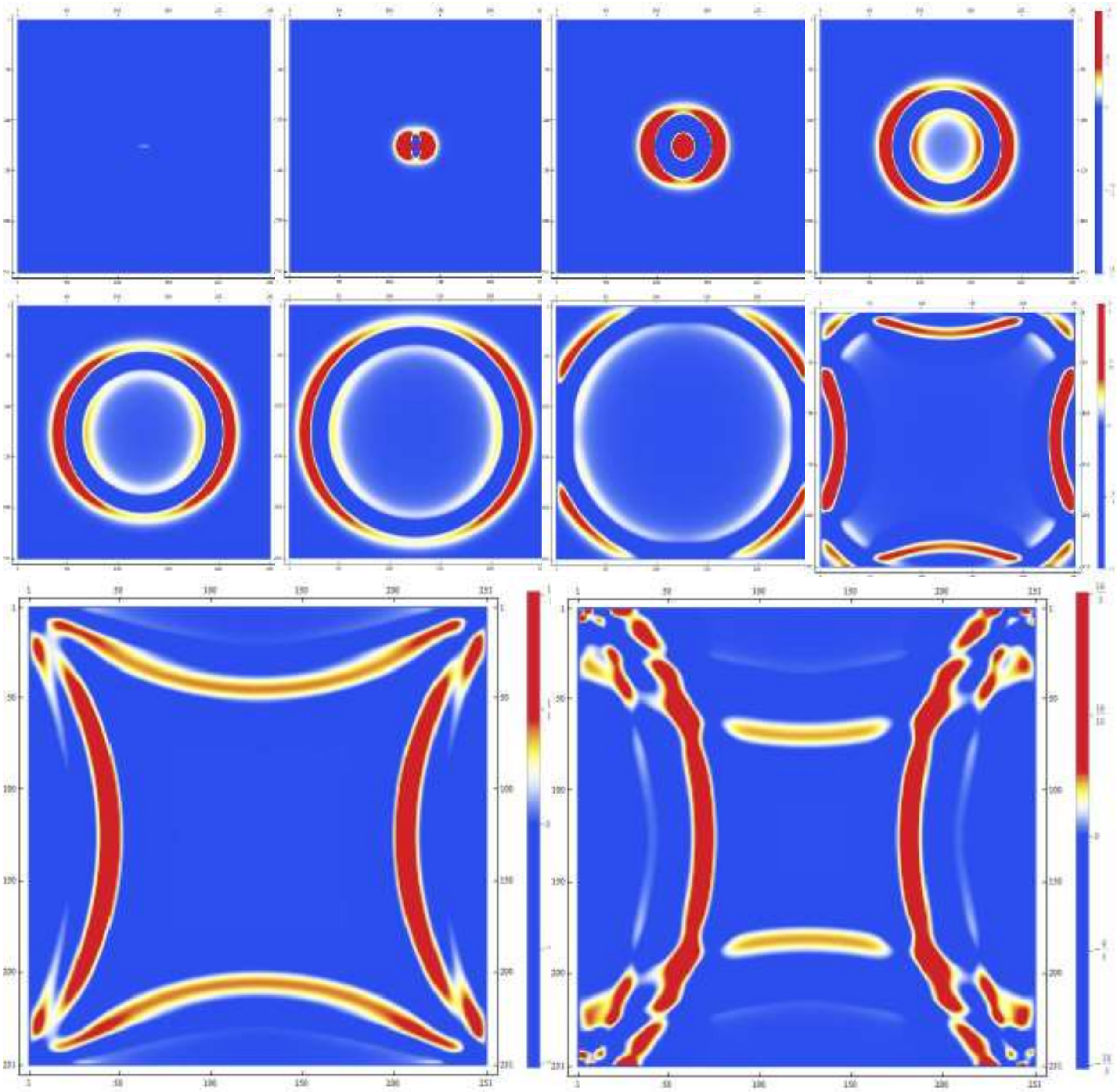
نلاحظ من الشكل (٤) أن قيم الحل العددي للمركبة S_{11} والتي تمثل الإجهاد الطولي وفق المحور ox وتنتشر كموجة ضغط في الوسط المادي وترتد عن الحدود وذلك يتوافق مع النتائج المبينة في المرجع [9] فموجة الإزاحة تترافق مع موجة إجهاد وانفعال تنتشر في الوسط المادي.





الشكل(5): المركبة S_{12} للحل العددي لمسألة إغناتشاك التنسورية الابتدائية الحدية المعطاة في المثال ٢.

نلاحظ أيضاً وبشكل مشابه أن الشكل (٥) يبين قيم الحل العددي للمركبة S_{12} والتي تمثل اجهاد القص والتي تنتشر كموجة قص في الوسط المادي وترتد عن الحدود.



الشكل(6): المركبة S_{22}للحل العددي لمسألة إغناتشاك التنسورية الابتدائية الحدية المعطاة في المثال ٢.

كما يظهر الشكل (٦) قيم الحل العددي للمركبة S_{22} والتي تمثل الإجهاد الطولي وفق المحور oy و التي تنتشر كموجة ضغط في الوسط المادي.

النتائج و التوصيات:

تمكنّا من إيجاد صياغة عددية متقطعة لمعادلة إغناتشاك التنسورية للإجهاد في الحالة المستوية الأولى للانفعال باستخدام طريقة الفروق المنتهية ومفهوم الشبكة المتداخلة الذي قدّم حلاً لتباعد الحل العددي وظهور مشكلة رقعة الشطرنج. تم استخدام الصياغة العددية المقترحة في حساب تنسور الاجهاد الناتج عن تعرّض صفيحة مستطيلة لمصدر ضغط انفجاري (نقطي). تم عرض الحل العددي لمركبات تنسور الإجهاد الذي ينتشر على شكل موجة اجهاد ضغط وموجة اجهاد قص عبر الوسط المادي المدروس.

نوصي بـ :

١- تقديم صياغة عددية لمعادلة إغناتشاك على مناطق غير منتظمة وشروط حدية مختلطة.

٢- تطوير الصياغة العددية ليشمل معادلة إغناتشاك في المرونة الحرارية.

المراجع

[1] J. VIRIEUX, *P-SV wave Propagation in heterogeneous media*: Velocity-Stress finite difference method, Geophysics (51), 1986
[2] M. ALDANA, *Staggered finite-difference schemes to model acoustic wave propagation in a three-dimensional fluid-solid configuration*, Simon Bolivar University, 2014.
[3] Heiner Igel, *Computational Seismology A Practical Introduction, Oxford*, 2017
[4] G.W. RECKTENWALD, *Finite-Difference Approximations to the Heat Equation, Mech. Eng. 2004.*
[5] Ignaczak, J. *A completeness problem for stress equations of motion in the linear elasticity theory*. Arch Mech Stos 1963;15: 225-234
[6] Martin Ostoja-Starzewski, *Ignaczak equation of elastodynamics. Mathematics and Mechanics of Solids 2019*, Vol. 24(11) 3674–3713.
[7] Al Hasan, M.; *Dyszlewicz, J. Coupled dynamic micropolar problems of thermoelasticity: Stress-Tempreature equation of motion of Ignaczak type,*
[7] Long Chen, *Introduction to linear elasticity*, 2020.
[8] P. M. DIXIT, Review of Stress, *Linear Strain and Elastic StressStrain Relations*, 2008.
[9] حمزة محمد، وعد صافتلي، *المحاكاة العددية لانتشار الأمواج الزلزالية في الأوساط المتجانسة*، منشورات مجلة جامعة البعث، العدد٤٥ ،٢٠٢٣