مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٨) العدد (٢) ٢٠٢٤

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (8) No. (2) 2024

التطبيقات التوافقية الجيوديزية بين الفضاءات شبه الكيلرية (H_n – فضاءات)

أ.د. محسن شيحه*

رنا محمد**

(تاريخ الإيداع ٢٩/١/ ٢٠٢٤ – تاريخ النشر ٧/٥/ ٢٠٢٤)

□ ملخّص □

ندرس في هذا البحث التطبيقات التوافقية الجيوديزية بين الفضاءات شبه الكيلرية (H_n – فضاءات) $f : H_n \to \overline{H}_n$ التي تحقق $f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$ حيث f_1, f_3 تطبيقات توافقية و f_2 تطبيق جيوديزي ، نثبت في هذا البحث أن الشرط اللازم والكافي ليكون f تطبيق توافقي هو أن يكون f_2 تطبيق جيوديزي ثم نثبت أنه إذا وجد تطبيق توافقي جيوديزي بين أي H_n – فضاء و $\overline{H}_n$ – فضاء سوي فإن H_n – فضاء سوي .

كلمات مفتاحية : تطبيق توافقي – تطبيق جيوديزي – تطبيق توافقي جيوديزي – فضاء شبه كيلير –الفضاء السوي.

---

* أستاذ في كلية العلوم – قسم الرياضيات – جامعة البعث

**طالبة دكتوراه في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة البعث

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٨) العدد (٢) ٢٠٢٤

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (8) No. (2) 2024

Conformally Geodesic Mapping Between Pseudo Kahlerian Spaces (H_n-Spaces)

Pro. Mohsen Sheha*
Rana Mohammad**

(Received 29/1/2024.Accepted 7/5/2024)

□ABSTRACT □

In this paper we study conformally geodesic mappings between pseudo kahlerian manifolds (H_n - spaces)(M, g, F_i^h) and mappings $f : H_n \to \overline{H}_n$ satisfying $f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$ where f_1, f_3 are conformal mappings and f_2 is a geodesic mapping . Firstly we prove that f is a conformally geodesic mapping if and only if f_2 is geodesic mapping , then we prove that if f is a conformal mapping between any H_n - space and $\overline{H}_n$ -plane space, then H_n is plane space.

<u>Key Words:</u> conformal mapping, geodesic mapping , conformally geodesic mappings , pseudo kahlerian spaces, plane space.

* Professor Departement of AL-Baath University.
*Phd Student of Mathematics of AL-Baath University

مقدمة

يعتبر أول من بدأ العمل في التوافقية والهندسة الاسقاطية T.Thomas[8], H.Weyle[9] ثم درست العديد من الأبحاث المتعلقة بهذه المواضيع ونذكر منها [10,11,13].

ندعو تركيب التطبيقات التوافقية مع التطبيقات الجيوديزية بالتطبيقات التوافقية الجيوديزية ، حيث درس مثل هذه التطبيقات كل من Hinterleitner[3],Hinterleitner,Mikes[4]

,Mikes,Vanzurova,Hinterleitner[6],H−Chuda,J−Mikes[14] and M−Sheha [15]

سنتابع في هذا البحث دراسة التطبيقات التوافقية الجيوديزية بين الفضاءات شبه الكيلرية (H_n− فضاءات) حيث نثبت أولاً أن الشرط اللازم والكافي ليكون $f : H_n \to \overline{H}_n$ حيث ($f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$) تطبيق توافقي هو أن يكون f_2 تطبيق جيوديزي ، ثم نثبت أنه إذا وجد تطبيق توافقي جيوديزي بين أي H_n−فضاء و $\overline{H}_n$ فضاء سوي فإن H_n − فضاء سوي.

بدايةً سنعرف فضا ريمان و شبه فضاء كيلر(H_n − فضاء) ثمّ سنعرض بعض خصائص التطبيقات التوافقية و الجيوديزية وأخيراً نعمل على التطبيقات التوافقية الجيوديزية بين الفضاءات شبه الكيلرية.

تعريف (1) $[2,12]$

فضاء ريمان (منطوي ريمان) :

فضاء ريمان هو منطوٍ تفاضلي بعده n منسوب إلى نظام إحداثي $\left(x^1,\dots,x^n\right)$ ، معرف عليه تنسور $g_{ij}(x)$ من النوع $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ متناظر $\left(g_{ij} = g_{ji}\right)$ ونظامي $\left(\det\left(g_{ij}\right) \neq 0\right)$، يسمى التنسور المتري للفضاء V_n ، أو تنسور القياس على الفضاء V_n.

وباعتبار أن $\left(\det\left(g_{ij}\right) \neq 0\right)$ فإنّه توجد للمصفوفة $\left(g_{ij}\right)$ مصفوفة عكسية في كل نقطة من V_n، نرمز لها بالرمز $\left(g^{ij}\right)$ وتحقق شرط التناظر $\left(g_{ij} = g_{ji}\right)$ و الشرط :

$$g_{i\alpha} g^{\alpha j} = \delta_i^j$$

حيث أنّ δ_i^j دلتا كرونيكر.

تعريف (2):شبه فضاء كيلر (H_n − فضاء)[16,1,17]:

هو فضاء ريمان V_n معرّف عليه تنسور متري g_{ij} وتركيب أفيني من النوع $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$يحقق الخواص الآتية:

$$\begin{aligned} &a) F_\alpha^h F_i^\alpha = 0 \\ &b) F_{hi} + F_{ih} = 0 \\ &c) F_{hi,j} + F_{jh,i} + F_{ij,h} = 0 \\ &d) R_g\left(F_i^h\right) = m; n \geq m \geq 2 \end{aligned} \qquad (1)$$

حيث: $F_{hi,j} = \dfrac{\partial F_{hi}}{\partial x^j} - F_{\alpha i}\Gamma_{hj}^\alpha - F_{h\alpha}\Gamma_{ij}^\alpha$ المشتق الموافق التغير للتنسور F_i^h.

بعض خصائص التطبيقات الجيوديزية و التوافقية

تعريف (3): التطبيق الجيوديزي[12,5,6]:

ليكن $V_n, \overline{V}_n$ فضائي ريمان ، نسمي التماثل التفاضلي $f: V_n \to \overline{V}_n$ تطبيقاً جيوديزياً إذا كانت صورة أي منحن جيوديزي في V_n هي منحن جيوديزي في $\overline{V}_n$ وفق f .

مبرهنة (1) [5,7]:

الشرط اللازم والكافي كي يوجد تطبيق جيوديزي بين فضائي ريمان $V_n, \overline{V}_n$ هو أن تتحقق العلاقة الآتية من أجل أي تطبيق إحداثي $\left(x^1,...,x^n\right)$ X

$$\overline{\Gamma_{ij}^h}(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \delta_i^h \psi_j(x) + \delta_j^h \psi_i(x) \qquad (2)$$

حيث $\overline{\Gamma_{ij}^h}(x), \Gamma_{ij}^h(x)$ رموز كريستوفل في الفضائين $V_n, \overline{V}_n$ على الترتيب ، $\psi_i = \dfrac{\partial \psi}{\partial x^i} = \partial_i \psi$ متجه تدرج ، δ_i^h دلتا كرونيكر.

مبرهنة (2) [17]:

الشرط اللازم والكافي لوجود تطبيق جيوديزي بين الفضائين $H_n, \overline{H}_n$ هو أن يوجد حل للجملة الآتية بالنسبة للتنسورين $\overline{g}_{ij}, \overline{F_i^h}$ والمتجه $\psi_i \neq 0$:

$$\begin{aligned} &a) g_{ij,k} = 2\psi_k g_{ij} + \psi_i \overline{g}_{jk} + \psi_j \overline{g}_{ik} \\ &b) \overline{F}_{hi/j} + \overline{F}_{jh/i} + \overline{F}_{ij/h} = 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

تعريف (4): التطبيق التوافقي[16,11]: :

نسمي التماثل التفاضلي f بين منطويي ريمان $V_n, \overline{V}_n$ تطبيقاً توافقياً إذا حافظ على قياس الزوايا بين أي منحنيين أملسين من الفضاء V_n وصورتهما في الفضاء $\overline{V}_n$ أي إذا تحققت العلاقة :

$$\overline{g}_{ij} = e^{2\psi} g_{ij} \qquad (4)$$

حيث $g_{ij}, \overline{g}_{ij}$ مركبات التنسور المتري للفضائين $V_n, \overline{V}_n$ على الترتيب و $\psi(x)$ دالة غير معدومة في V_n

مبرهنة (3) [14,16]:

الشرط اللازم والكافي كي يوجد تطبيق توافقي بين فضائي ريمان $V_n, \overline{V}_n$هو أن تتحقق العلاقة الآتية :

$$\overline{\Gamma_{ij}^h}(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_i(x)\delta_j^h + \psi_j(x)\delta_i^h - \psi^h g_{ij} \qquad (5)$$

حيث $\psi_i = \partial_i \psi$.

يعرّف في فضاءات ريمان المتواجد بينهما تطبيق توافقي تنسور فيليا التوافقي (تنسور التقوس التوافقي) المعرّف بالعلاقة:

$$C_{ijk}^h = R_{ijk}^h + \delta_j^h L_{ik} - \delta_k^h L_{ij} + L_j^h g_{ik} + L_k^h g_{ij} \qquad (6)$$

حيث R_{ijk}^h تنسور ريمان كريستوفل في الفضاء V_n .

ونعلم أنّ تنسور فيليا C_{ijk}^hثابت في التطبيقات التوافقية بين فضاءات ريمان من أجل $(n > 2)$أي أنّ :

$$\overline{C_{ijk}^h} = C_{ijk}^h \qquad (7)$$

مبرهنة (4) [16]:

الشرط اللازم والكافي ليكون التماثل التفاضلي $f: H_n \to \overline{H}_n$ توافقيّاً إذا وفقط إذا تحققت الشروط الآتية :

$$a)\overline{F_i^{\alpha}}g_{\alpha j}+\overline{F_j^{\alpha}}g_{\alpha i}=0 \qquad (8)$$
$$b)\overline{F}_{hi,j}+\overline{F}_{jh,i}+\overline{F}_{ij,h}=2\psi_{\bar{h}}g_{ij}+2\psi_{\bar{j}}g_{hi}+2\psi_{\bar{i}}g_{jh}$$

مبرهنة (5) **[17]:**

إذا وجد تطبيق جيوديزي غير مبتذل بين أي H_n –فضاء سوي و أي $\overline{H}_n$ – فضاء آخر الذي بدوره يكون فضاء سوي.

نتيجة (1) :(عكس المبرهنة السابقة صحيحة أيضاً) أي أنّه:

إذا وجد تطبيق جيوديزي غير مبتذل بين أي H_n – فضاء وأي $\overline{H}_n$ – فضاء سوي فإنّ H_n – فضاء بدوره يكون سويّاً.

مبرهنة (6) **[16]:**

إذا وجد تطبيق توافقي بين H_n – فضاء و $\overline{H}_n$ – فضاء سوي فإنّ H_n – فضاء بدوره يكون سويّاً.

تعريف (5):

نقول عن التطبيق $f : H_n \to \overline{H}_n$ أنّه تطبيق توافقي جيوديزي حيث $f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$ إذا كان :

$f_1 : H_n \to \overset{1}{H}_n$ تطبيق توافقي .

$f_2 : \overset{1}{H}_n \to \overset{2}{H}_n$ تطبيق جيوديزي.

$f_3 : \overset{2}{H}_n \to \overline{H}_n$ تطبيق توافقي.

حيث $\overset{1}{H}_n$ و $\overset{2}{H}_n$ و H_n و $\overline{H}_n$ فضاءات شبه كيلرية

نوجد في المبرهنة الآتية الشرط اللازم و الكافي لوجود تطبيق توافقي جيوديزي بين H_n – فضاء و $\overline{H}_n$ – فضاء .

مبرهنة (7):

إذا كان التطبيق $f : H_n \to \overline{H}_n$ توافقياً جيوديزياً فإنّه يكون توافقيّاً .

البرهان :

بفرض f تطبيق (تماثل تفاضلي) ناتج عن تركيب ثلاث تطبيقات معرفة كما ورد في التعريف (5) و لنثبت أنه توافقي،

بفرض $f_1 : H_n \to \overset{1}{H}_n$ تطبيق توافقي عندئذٍ تتحقق في H_n العلاقة $(8-b)$:

$$\overset{1}{F}_{hi,j}+\overset{1}{F}_{jh,i}+\overset{1}{F}_{ij,h}=\overset{1}{\psi}_{(\bar{h}}\, g_{i)j}+\overset{1}{\psi}_{(\bar{j}}\, g_{h)i}+\overset{1}{\psi}_{(\bar{i}}\, g_{j)h}=2\overset{1}{\psi}_{\bar{h}}\, g_{ij}+2\overset{1}{\psi}_{\bar{j}}\, g_{hi}+2\overset{1}{\psi}_{\bar{i}}\, g_{jh}$$

حيث :

$$\overset{1}{F}_{hi,j}=\partial_j \overset{1}{F_i^h}+\overset{1}{F_i^{\alpha}}\Gamma_{\alpha j}^{h}-\overset{1}{F_{\alpha}^{h}}\Gamma_{ij}^{\alpha}$$

إضافة إلى ذلك تتحقق العلاقة :

$$\overset{1}{\Gamma}{}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} + \psi_i\delta^h_j + \psi_j\delta^h_i - \psi^h g_{ij} \qquad (9)$$

الآن بفرض $f_2 : \overset{1}{H}_n \to \overset{2}{H}_n$ تطبيق جيوديزي عندئذٍ تتحقق في $\overset{1}{H}_n$ العلاقة الآتية :

$$\overset{2}{F}_{hi/j} + \overset{2}{F}_{jh/i} + \overset{2}{F}_{ij/h} = 0$$

حيث $\overset{2}{F}_{hi/j}$ المشتق موافق التغير في الفضاء $\overset{1}{H}_n$

وكذلك تتحقق :

$$\overset{2}{\Gamma}{}^h_{ij} = \overset{1}{\Gamma}{}^h_{ij} + \delta^h_i \overset{1}{\psi}_j + \delta^h_i \overset{1}{\psi}_i$$

العلاقة الأخيرة تكتب استناداً إلى المشتق في هذا الفضاء :

$$\overset{2}{F}_{hi/j} + \overset{2}{F}_{jh/i} + \overset{2}{F}_{ij/h} = \partial_j \overset{2}{F}_{hi} - \overset{2}{F}_{\alpha i}\overset{1}{\Gamma}{}^\alpha_{hj} - \overset{2}{F}_{h\alpha}\overset{1}{\Gamma}{}^\alpha_{ij} + \partial_i \overset{2}{F}_{jh} - \overset{2}{F}_{\alpha h}\overset{1}{\Gamma}{}^\alpha_{ji} - \overset{2}{F}_{j\alpha}\overset{1}{\Gamma}{}^\alpha_{hi} + \partial_h \overset{2}{F}_{ij} - \overset{2}{F}_{\alpha j}\overset{1}{\Gamma}{}^\alpha_{ih} - \overset{2}{F}_{i\alpha}\overset{1}{\Gamma}{}^\alpha_{jh} = 0$$

نعوض عن $\overset{1}{\Gamma}{}^h_{ij}$ من العلاقة (9)فنجد :

$$\begin{aligned}\overset{2}{F}_{hi/j} + \overset{2}{F}_{jh/i} + \overset{2}{F}_{ij/h} &= \partial_j \overset{2}{F}_{hi} - \overset{2}{F}_{\alpha i}\left(\Gamma^\alpha_{hj} + \psi_h\delta^\alpha_j + \psi_j\delta^\alpha_h - \psi^\alpha g_{hj}\right) - \overset{2}{F}_{h\alpha}\left(\Gamma^\alpha_{ij} + \psi_i\delta^\alpha_j + \psi_j\delta^\alpha_i - \psi^\alpha g_{ij}\right) + \\ &+ \partial_i \overset{2}{F}_{jh} - \overset{2}{F}_{\alpha h}\left(\Gamma^\alpha_{ji} + \psi_j\delta^\alpha_i + \psi_i\delta^\alpha_j - \psi^\alpha g_{ji}\right) - \overset{2}{F}_{j\alpha}\left(\Gamma^\alpha_{hi} + \psi_h\delta^\alpha_i + \psi_i\delta^\alpha_h - \psi^\alpha g_{hi}\right) + \\ &+ \partial_h \overset{2}{F}_{ij} - \overset{2}{F}_{\alpha j}\left(\Gamma^\alpha_{ih} + \psi_i\delta^\alpha_h + \psi_h\delta^\alpha_i - \psi^\alpha g_{ih}\right) - \overset{2}{F}_{i\alpha}\left(\Gamma^\alpha_{jh} + \psi_j\delta^\alpha_h + \psi_h\delta^\alpha_j - \psi^\alpha g_{jh}\right) = 0\end{aligned}$$

بترتيب الحدود نجد :

$$\begin{aligned}\overset{2}{F}_{hi,j} + \overset{2}{F}_{jh,i} + \overset{2}{F}_{ij,h} &= \overset{2}{F}_{ji}\psi_h + \overset{2}{F}_{hi}\psi_j - \overset{2}{F}_{\alpha i}\psi^\alpha g_{hj} + \overset{2}{F}_{hj}\psi_i + \overset{2}{F}_{hi}\psi_j - \overset{2}{F}_{h\alpha}\psi^\alpha g_{ij} + \overset{2}{F}_{ih}\psi_j \\ &+ \overset{2}{F}_{jh}\psi_i - \overset{2}{F}_{\alpha h}\psi^\alpha g_{ji} + \overset{2}{F}_{ji}\psi_h + \overset{2}{F}_{jh}\psi_i - \overset{2}{F}_{j\alpha}\psi^\alpha g_{hi} + \overset{2}{F}_{hj}\psi_i + \overset{2}{F}_{ij}\psi_h - \\ &- \overset{2}{F}_{\alpha j}\psi^\alpha g_{ih} + \overset{2}{F}_{ih}\psi_j + \overset{2}{F}_{ij}\psi_h - \overset{2}{F}_{i\alpha}\psi^\alpha g_{jh}\end{aligned}$$

ومنه نحصل على :

$$\begin{aligned}\overset{2}{F}_{hi,j} + \overset{2}{F}_{jh,i} + \overset{2}{F}_{ij,h} &= \left(2\overset{2}{F}_{ji} + 2\overset{2}{F}_{ij}\right)\psi_h + \left(2\overset{2}{F}_{hj} + 2\overset{2}{F}_{jh}\right)\psi_i + \left(2\overset{2}{F}_{hi} + 2\overset{2}{F}_{ih}\right)\psi_j - \\ &- \psi^\alpha \overset{2}{F}_{i\alpha} g_{hj} - \psi^\alpha \overset{2}{F}_{h\alpha} g_{ij} - \psi^\alpha \overset{2}{F}_{h\alpha} g_{ji} - \psi^\alpha \overset{2}{F}_{j\alpha} g_{hi} - \psi^\alpha \overset{2}{F}_{j\alpha} g_{ih} - \psi^\alpha \overset{2}{F}_{i\alpha} g_{jh}\end{aligned}$$

و

بما أنّ $\overset{2}{F}$ التركيب الأفيني للفضاء H_n فإنّ $\overset{2}{F}_{hj} + \overset{2}{F}_{jh} = 0$

وبما أنّ $f_3 : \overset{2}{H}_n \to \overline{H}_n$ تطبيقاً توافقياً فإنّ $\overline{F}_{hi} = e^{\psi}\overset{2}{F}_{hi}$

ومنه $\overset{2}{F}_{hi} = e^{-\psi}\overline{F}_{hi}$ وبالتالي :

$$\overline{F}_{hi,j}+\overline{F}_{jh,i}+\overline{F}_{ij,h}=-\psi^{\alpha}\overline{F}_{i\alpha}g_{hj}-\psi^{\alpha}\overline{F}_{h\alpha}g_{ij}-\psi^{\alpha}\overline{F}_{h\alpha}g_{ji}-\psi^{\alpha}\overline{F}_{j\alpha}g_{hi}-\psi^{\alpha}\overline{F}_{j\alpha}g_{ih}-\psi^{\alpha}\overline{F}_{i\alpha}g_{jh}$$

$$\overline{F}_{hi,j}+\overline{F}_{jh,i}+\overline{F}_{ij,h}=-2\psi_{\bar{i}}g_{jh}-2\psi_{\bar{h}}g_{ij}-2\psi_{\bar{j}}g_{ih}$$

وبفرض $\beta_i=-\psi_i$ نعوض في العلاقة الأخيرة نجد:

$$\overline{F}_{hi,j}+\overline{F}_{jh,i}+\overline{F}_{ij,h}=2\beta_{\bar{i}}g_{jh}+2\beta_{\bar{h}}g_{ij}+2\beta_{\bar{j}}g_{ih} \qquad (10)$$

ومنه نجد أنّ f تطبيقاً توافقيّاً .. □

سنبرهن الآن عكس المبرهنة (7)..

مبرهنة(8) :

إذا كان $f:H_n\to\overline{H}_n$ حيث $f=f_1\circ f_2\circ f_3$ تطبيقاً توافقيّاً يحقق العلاقة(10) و التطبيقان f_1, f_3 توافقيان عندئذٍ التطبيق f_2 جيوديزي.

الإثبات :

لنفرض أن f تطبيق توافقي يحقق العلاقة (10) وأن f_1, f_3 توافقيان عندئذٍ تتحقق العلاقات

$$\overline{F}_{hi}=e^{\overset{2}{\psi}}\overset{2}{F}_{hi} \qquad (11)$$

$$\overset{1}{F}_{hi}=e^{\psi}F_{hi} \qquad (12)$$

نأخذ المشتق الموافق التغير للعلاقة (11) فنجد :

$$\overline{F}_{hi/j}=\overset{2}{\psi}_j e^{\overset{2}{\psi}}\overset{2}{F}_{hi}+e^{\overset{2}{\psi}}\overset{2}{F}_{hi/j}=e^{\overset{2}{\psi}}\left(\overset{2}{\psi}_j\overset{2}{F}_{hi}+\overset{2}{F}_{hi/j}\right)$$

نعوض في (10) فنجد :

$$e^{\overset{2}{\psi}}\left(\overset{2}{\psi}_j\overset{2}{F}_{hi}+\overset{2}{F}_{hi/j}\right)+e^{\overset{2}{\psi}}\left(\overset{2}{\psi}_i\overset{2}{F}_{jh}+\overset{2}{F}_{jh/i}\right)+e^{\overset{2}{\psi}}\left(\overset{2}{\psi}_h\overset{2}{F}_{ij}+\overset{2}{F}_{ij/h}\right)=\left(2\beta_{\bar{i}}g_{jh}+2\beta_{\bar{h}}g_{ij}+2\beta_{\bar{j}}g_{ih}\right)$$

ولكن $\beta_{\bar{i}}=\beta_{\alpha}\overline{F}_{\alpha i}=e^{\overset{2}{\psi}}\beta_{\alpha}\overset{2}{F}_{\alpha i}$ أي أن:

$$e^{\overset{2}{\psi}}\left(\overset{2}{\psi}_j\overset{2}{F}_{hi}+\overset{2}{F}_{hi/j}\right)+e^{\overset{2}{\psi}}\left(\overset{2}{\psi}_i\overset{2}{F}_{jh}+\overset{2}{F}_{jh/i}\right)+e^{\overset{2}{\psi}}\left(\overset{2}{\psi}_h\overset{2}{F}_{ij}+\overset{2}{F}_{ij/h}\right)=e^{\overset{2}{\psi}}\left(2\beta_{\alpha}\overset{2}{F}_{\alpha i}g_{jh}+2\beta_{\alpha}\overset{2}{F}_{\alpha h}g_{ij}+2\beta_{\alpha}\overset{2}{F}_{\alpha j}g_{ih}\right)$$

نضرب طرفي العلاقة الأخيرة بـ $e^{-\overset{2}{\psi}}$:

$$\left(\overset{2}{\psi}_j\overset{2}{F}_{hi}+\overset{2}{F}_{hi/j}\right)+\left(\overset{2}{\psi}_i\overset{2}{F}_{jh}+\overset{2}{F}_{jh/i}\right)+\left(\overset{2}{\psi}_h\overset{2}{F}_{ij}+\overset{2}{F}_{ij/h}\right)=\left(2\beta_{\alpha}\overset{2}{F}_{\alpha i}g_{jh}+2\beta_{\alpha}\overset{2}{F}_{\alpha h}g_{ij}+2\beta_{\alpha}\overset{2}{F}_{\alpha j}g_{ih}\right)$$

$$\left(\overset{2}{\psi}_j\overset{2}{F}_{hi}+\overset{2}{F}_{hi/j}\right)+\left(\overset{2}{\psi}_i\overset{2}{F}_{jh}+\overset{2}{F}_{jh/i}\right)+\left(\overset{2}{\psi}_h\overset{2}{F}_{ij}+\overset{2}{F}_{ij/h}\right)=\left(2\beta_{\bar{i}}g_{jh}+2\beta_{\bar{h}}g_{ij}+2\beta_{\bar{j}}g_{ih}\right)$$

(13)

$$\overset{2}{F}_{hi/j}+\overset{2}{F}_{jh/i}+\overset{2}{F}_{ij/h}=2\beta_{\bar{i}}g_{jh}+2\beta_{\bar{h}}g_{ij}+2\beta_{\bar{j}}g_{ih}-\overset{2}{\psi}_j\overset{2}{F}_{hi}-\overset{2}{\psi}_i\overset{2}{F}_{jh}-\overset{2}{\psi}_h\overset{2}{F}_{ij}$$

وبما أنّ $\overset{2}{F}_{hi/j} = \dfrac{\partial \overset{2}{F}_{hi}}{\partial x^j} - \overset{2}{F}_{\alpha i} \overset{1}{\Gamma}{}^{\alpha}_{hj} - \overset{2}{F}_{h\alpha} \overset{1}{\Gamma}{}^{\alpha}_{ij}$

نعوض في (13) فنجد :

$$\frac{\partial \overset{2}{F}_{hi}}{\partial x^j} - \overset{2}{F}_{\alpha i} \overset{1}{\Gamma}{}^{\alpha}_{hj} - \overset{2}{F}_{h\alpha} \overset{1}{\Gamma}{}^{\alpha}_{ij} + \frac{\partial \overset{2}{F}_{jh}}{\partial x^i} - \overset{2}{F}_{\alpha h} \overset{1}{\Gamma}{}^{\alpha}_{ji} - \overset{2}{F}_{j\alpha} \overset{1}{\Gamma}{}^{\alpha}_{hi} + \frac{\partial \overset{2}{F}_{ij}}{\partial x^h} - \overset{2}{F}_{\alpha j} \overset{1}{\Gamma}{}^{\alpha}_{ih} - \overset{2}{F}_{i\alpha} \overset{1}{\Gamma}{}^{\alpha}_{jh} =$$

$$= 2\beta_{\bar{i}} g_{jh} + 2\beta_{\bar{h}} g_{ij} + 2\beta_{\bar{j}} g_{ih} - \overset{2}{\psi}_j \overset{2}{F}_{hi} - \overset{2}{\psi}_i \overset{2}{F}_{jh} - \overset{2}{\psi}_h \overset{2}{F}_{ij}$$

وبما أنّ $\overset{1}{\Gamma}{}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} - \overset{1}{\psi}_i \delta^h_j - \overset{1}{\psi}_j \delta^h_i + \psi^h g_{ij}$ نعوض في العلاقة الأخيرة نجد:

$$\frac{\partial \overset{2}{F}_{hi}}{\partial x^j} - \overset{2}{F}_{\alpha i}\left(\Gamma^{\alpha}_{hj} - \overset{1}{\psi}_h \delta^{\alpha}_j - \overset{1}{\psi}_j \delta^{\alpha}_h + \psi^{\alpha} g_{hj}\right) - \overset{2}{F}_{h\alpha}\left(\Gamma^{\alpha}_{ij} - \overset{1}{\psi}_i \delta^{\alpha}_j - \overset{1}{\psi}_j \delta^{\alpha}_i + \psi^{\alpha} g_{ij}\right) +$$

$$+ \frac{\partial \overset{2}{F}_{jh}}{\partial x^i} - \overset{2}{F}_{\alpha h}\left(\Gamma^{\alpha}_{ji} - \overset{1}{\psi}_j \delta^{\alpha}_i - \overset{1}{\psi}_i \delta^{\alpha}_j + \psi^{\alpha} g_{ji}\right) - \overset{2}{F}_{j\alpha}\left(\Gamma^{\alpha}_{hi} - \overset{1}{\psi}_h \delta^{\alpha}_i - \overset{1}{\psi}_i \delta^{\alpha}_h + \psi^{\alpha} g_{hi}\right) +$$

$$+ \frac{\partial \overset{2}{F}_{ij}}{\partial x^h} - \overset{2}{F}_{\alpha j}\left(\Gamma^{\alpha}_{ih} - \overset{1}{\psi}_i \delta^{\alpha}_h - \overset{1}{\psi}_h \delta^{\alpha}_i + \psi^{\alpha} g_{ih}\right) - \overset{2}{F}_{i\alpha}\left(\Gamma^{\alpha}_{jh} - \overset{1}{\psi}_j \delta^{\alpha}_h - \overset{1}{\psi}_h \delta^{\alpha}_j + \psi^{\alpha} g_{jh}\right) =$$

$$= 2\beta_{\bar{i}} g_{jh} + 2\beta_{\bar{h}} g_{ij} + 2\beta_{\bar{j}} g_{ih} - \overset{2}{\psi}_j \overset{2}{F}_{hi} - \overset{2}{\psi}_i \overset{2}{F}_{jh} - \overset{2}{\psi}_h \overset{2}{F}_{ij}$$

نرتب الحدود فنجد :

$$\overset{2}{F}_{hi,j} + \overset{2}{F}_{jh,i} + \overset{2}{F}_{ij,h} + \overset{2}{F}_{ji} \overset{1}{\psi}_h + \overset{2}{F}_{hi} \overset{1}{\psi}_j - \overset{2}{F}_{\alpha i} \psi^{\alpha} g_{hj} + \overset{2}{F}_{hj} \overset{1}{\psi}_i + \overset{2}{F}_{hi} \overset{1}{\psi}_j - \overset{2}{F}_{h\alpha} \psi^{\alpha} g_{ij} +$$

$$+ \overset{2}{F}_{ih} \overset{1}{\psi}_j + \overset{2}{F}_{jh} \overset{1}{\psi}_i - \overset{2}{F}_{\alpha h} \psi^{\alpha} g_{ji} + \overset{2}{F}_{ji} \overset{1}{\psi}_h + \overset{2}{F}_{jh} \overset{1}{\psi}_i - \overset{2}{F}_{j\alpha} \psi^{\alpha} g_{hi} +$$

$$+ \overset{2}{F}_{hj} \overset{1}{\psi}_i + \overset{2}{F}_{ij} \overset{1}{\psi}_h - \overset{2}{F}_{\alpha j} \psi^{\alpha} g_{ih} + \overset{2}{F}_{ih} \overset{1}{\psi}_j + \overset{2}{F}_{ij} \overset{1}{\psi}_h - \overset{2}{F}_{i\alpha} \psi^{\alpha} g_{jh} =$$

$$= 2\beta_{\bar{i}} g_{jh} + 2\beta_{\bar{h}} g_{ij} + 2\beta_{\bar{j}} g_{ih} - \overset{2}{\psi}_j \overset{2}{F}_{hi} - \overset{2}{\psi}_i \overset{2}{F}_{jh} - \overset{2}{\psi}_h \overset{2}{F}_{ij}$$

ومنه نحصل على :

$$\overset{2}{F}_{hi,j} + \overset{2}{F}_{jh,i} + \overset{2}{F}_{ij,h} = \overset{1}{\psi}_h\left(-2\overset{2}{F}_{ji} - 2\overset{2}{F}_{ij}\right) + \overset{1}{\psi}_j\left(-2\overset{2}{F}_{hi} - 2\overset{2}{F}_{ih}\right) + \overset{1}{\psi}_i\left(-2\overset{2}{F}_{hj} - 2\overset{2}{F}_{jh}\right) +$$

$$+ 2\psi_{\bar{i}} g_{hj} + 2\psi_{\bar{h}} g_{ij} + 2\psi_{\bar{h}} g_{ji} + 2\beta_{\bar{j}} g_{hi} + \beta_{\bar{j}} g_{ih} + 2\beta_{\bar{i}} g_{jh} - \overset{2}{\psi}_j \overset{2}{F}_{hi} - \overset{2}{\psi}_i \overset{2}{F}_{jh} - \overset{2}{\psi}_h \overset{2}{F}_{ij}$$

ومن المبرهنة السابقة لدينا $\beta_{\bar{i}} = -\psi_{\bar{i}}$ تصبح العلاقة الأخيرة بالشكل :

$$\overset{2}{F}_{hi,j} + \overset{2}{F}_{jh,i} + \overset{2}{F}_{ij,h} = -\psi_{(h} \overset{2}{F}_{ij)}$$

$$(\overset{2}{\psi} \overset{2}{F}_{hi})_{,j} + (\overset{2}{\psi} \overset{2}{F}_{jh})_{,i} + (\overset{2}{\psi} \overset{2}{F}_{ij})_{,h} = 0$$

وبما أنّ ψ ثابت غير معدوم فإنّ

$$\overset{2}{F}_{hi,j}+\overset{2}{F}_{jh,i}+\overset{2}{F}_{ij,h}=0$$

ومنه التطبيق f_2 تطبيق جيوديزي .. □

مبرهنة(9) :

إذا وجد تطبيق توافقي جيوديزي $f: H_n \to \overline{H}_n$ حيث $\overline{H}_n$ فضاء سوي فإنّ H_n بدوره فضاء سوي.

البرهان:

لدينا $f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$ حيث $f_3 : \overset{2}{H}_n \to \overline{H}_n$ تطبيق توافقي و $\overline{H}_n$ فضاء سوي واعتماداً على المبرهنة (6) يكون $\overset{2}{H}_n$ فضاء سوي، وبما أنّ $f_2 : \overset{1}{H}_n \to \overset{2}{H}_n$ تطبيق جيوديزي واعتماداً على النتيجة (1) يكون $\overset{1}{H}_n$ فضاء سوي، وبنفس الأسلوب لدينا $f_1 : H_n \to \overset{1}{H}_n$ تطبيق توافقي واعتماداً على المبرهنة (6) يكون H_n فضاء سوي . □

REFERENCES

[1] Aminova , A . V . *"Projective transformations of pseudo - Riemannian manifolds. "* J . Math . Sci .(New York) 113 (3) (2003), 367 - 470 .

[2] Chuda , H., Mikes, J." *On geodesic mappings with certain initial conditions*. " Acta Math . Acad. Paedagog. Nyhazi. 26 (2) (2010), 337 - 341 .

[3] Hinterleitner, I. *" Special mappings of equidistant spaces*." J . Appl. Math. 2 (2008), 31 - 36 .

[4] Hinterleitner, I. *" Selected Special Vector Fields and Mappings in Riemannian Geometry*. " Ph. D. thesis, VUT Brno, 2009 .

[5] Mikes, J., Kiosak , V., *Vanzurova, A ." Geodesic mappings of manifolds with affine connection* ." Palacky University Press, Olomouc , 2008 .

[6] Mikes, J., Vanzurova, A., Hinterleitner, I. *" Geodesic mappings and some generalizations."* Palacky University Press, Olomouc, 2009 .

[7] Sinyukov, N. S.*" Geodesic mappings of Riemannian spaces*. " Nauka , Moscow ,
1 979 .

[8] Thomas ,T. Y." *The dierential invariants of generalized spaces*. " III, Cambridge
Univ. Pres, 1934 .

[9] Weyl, H., Zur Infinitesimalgeometrie . *Einordnung der projektiven und der konformen Auf fassung* , Gottinger Nachrichten (1921) , 99 - 112 .

[10] H.Chuda and M.Shiha,"Conformal holomorphically projective mappings satisfying a certain initial condition." *Miskolc Math Notes*, vol.14,no.2,pp.569-574,2013.

[11] H.Chuda, M.Chodorova, and M.Shiha,"*On Composition of conformal and holomorphically projective mappings between conformally Kahlerian spaces*,"J.Appl.Math. Bratislava, vol. 5,no. 3, pp. 91-96, 2012.

[12] I.Hinterleitner and J. Mikes, *"Geodesic mappings of (pseudo-) Riemannian manifolds preserve class of differentiability*."Miskolc Math .Notes, vol. 14, no. 2, pp. 575-582, 2013.

[13] P.Peska, J. Mikes, H. Chuda and M. Sheha, *"On holomorphically Projective Mappings Of Parabolic Kahler Manifolds."* Miskolc Math. Notes, Vol. 17, no. 2, PP. 1011-1019,2017.

[14] H. Chuda, J. Mikes. *"Conformally Geodesic Mappings Satisfying a Certain Initial Condition ."* Arch. Math, Vol. 47, no. 5, PP. 389-394,2011.

[15] مفيد مندو – د.محسن شيحه *." التطبيقات التوافقية الجيوديزية بين K – فضاءات* " ، مجلة جامعة البعث ، مجلد (٣٦)– العدد (٥) ، عام ٢٠١٤.

[16] رنا محمد – د.محسن شيحه *." التطبيقات التوافقية بين شبه الفضاءات الكيليرية(H_n – فضاءات)* " ، مجلة جامعة البعث ، مجلد (٤٤)، عام ٢٠٢٢.

[17] رنا محمد – د.محسن شيحه ."*التطبيقات الجيوديزية بين شبه الفضاءات الكيليرية(H_n – فضاءات)* " ، مجلة جامعة البعث ، مجلد (٤٤) ، عام ٢٠٢٢.