

دراسة تأثير تغير شحنة الغبار على التصادم الرأسي بين الأمواج السوليتونية الصوتية في البلازما المغبرة

الدكتور علي ابراهيم أسد *

(تاريخ الإيداع ٢٠٢٤ /٦/٢٥ - تاريخ النشر ٢٠٢٤ /٨/١٣)

□ ملخص □

تم في هذا البحث دراسة تأثير تغير شحنة الغبار على التصادم الرأسي بين الأمواج الصوتية السوليتونية في بلازما مغبرة مكونة من إلكترونات وأيونات تخضع لتوزيع بولتزمان وحيبيات غبار مشحونة بشحنة سالبة. تم استخدام طريقة (بونكاريه - ليثل - كو) (PLK) بهدف اختزال جملة معادلات المائع الغباري إلى معادلتين كورديفيك دي فريس (KdV)، حيث يمثل حل كل معادلة أحد السوليتونين المصادمين. إضافة لذلك، يمكن من خلال هذه الطريقة الحصول على سرعة طور السوليتونين وعلى الانزياحات الطورية الناتجة عن التصادم. تبين من خلال هذا البحث أن تغير شحنة الغبار يؤدي إلى تعديل كل من سعة وعرض السوليتونات المتصادمة إلى حد كبير، كما تؤثر على الانزياحات الطورية الناتجة عن التصادم.

كلمات مفتاحية : بلازما مغبرة - شحنة غبار متغيرة - طريقة (بونكاريه - ليثل - كو) - معادلة كورديفيك دي فريس.

Study of Effect of change of dust charge on the head collision between acoustic solitary waves in the dusty plasma

Dr. Ali Ebrahim Asad*

(Received 25/6/2024. Accepted 13/8/2024)

□ABSTRACT □

In this research, The effect of charge of dust charge was studied on head-on collision of acoustic solitary waves in dusty plasma with Boltzmann distributed electrons and ions, and negatively charged dust grains. Two opposite directional Kortewg-de-vries (KdV) equations and phase speed are derived and the phase shift due to collision is obtained using the extended version of Poincare´-Lighthill-Kuo method. It is found that charge of dust charge plays a significant role on amplitude, width of colliding solitary waves, In addition to the phase shifts resulting from the collision.

Keywords: dusty plasma, variable dust charge, Poincare´-Lighthill-Kuo method, Kortewg-de-vries (KdV) equation.

* Physics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria

مقدمة:

تزايد الاهتمام بدراسة الظواهر اللاخطية في البلازما المغيرة بسبب وجود الغبار في مختلف البيئات الفضائية والفلكية، كالحلقات الكوكبية والمذنبات والغلاف الأيوني للأرض، والسحب الجزيئية بين النجوم [1,2,3]،... الخ، وفي فترة لاحقة تعود إلى أواخر القرن الماضي تم التركيز على دراسة البلازما المغيرة مخبرياً نظراً للتطبيقات التكنولوجية العديدة في مجال الصناعة، حيث تم العثور على حبيبات الغبار أثناء عمليات تصنيع الرقائق الإلكترونية باستخدام النقش البلازمي، كما أنها فتحت المجال لأبحاث جديدة تربط بين فيزياء البلازما والمادة الكثيفة وعلم البلورات بعد اكتشاف امكانية تبلور الحبيبات (والموافقة لكون درجة حرارتها منخفضة بالنسبة لدرجة حرارة المكونات الأخرى) في بنية بلورية تسمى بلورة البلازما أو بلورة كولوم [4,5].

تتشكل البلازما المغيرة من مكونات البلازما العادية (إلكترونات وأيونات) يضاف إليها حبيبات صلبة مشحونة تتراوح أنصاف أقطارها بين $(100 \text{ nm} - 100 \text{ }\mu\text{m})$. تشحن هذه الحبيبات غالباً بشحنة سالبة نظراً لأن السرعة الحرارية للإلكترونات أكبر من سرعة الأيونات [6].

عند وجود حبيبة غبار نصف قطرها $1 \mu\text{m}$ في البلازما مع درجة حرارة إلكترونية (1 eV) ستشحن بشحنة مساوية لبضعة آلاف من شحنة الإلكترون وتكون نسبة الشحنة الناتجة إلى الكتلة $\frac{q}{m} < 1$. تؤثر الشحنة الكبيرة نسبياً ودرجة الحرارة المنخفضة لحبيبات الغبار على معظم خصائص البلازما المغيرة، حيث تكون نسبة طاقة تفاعل كولوم بين الحبيبات إلى الطاقة الحركية الحرارية أكبر بكثير من الواحد، وفي هذه الحالة تشكل حبيبات الغبار بنى شبه صلبة تدعى بلورات البلازما [6].

يساهم وجود حبيبات الغبار في البلازما في إثارة أنماط جماعية جديدة، كالأمواف الصوتية الغبارية ($\text{Dust-acoustic (DA)}$) والأمواج الصوتية الأيونية الغبارية ($\text{Dust-ion-acoustic (DIA)}$)) والبنى المترابطة اللاخطية كالأمواف السوليتونية الصوتية الغبارية ($\text{Dust-acoustic solitary (DAS)}$) والأمواج السوليتونية الصوتية الأيونية الغبارية ($\text{Dust-ion-acoustic solitary (DAIS)}$)) في البلازما المغيرة [7].

درس العديد من الباحثين خصائص الأمواج السوليتونية الصوتية الغبارية بما فيها تصادم هذه الأمواج مع بعضها في البلازما المغيرة. حيث قام كل من Gh. Forozani وآخرون [8] بدراسة الأمواج السوليتونية الصوتية الغبارية في بلازما مغيرة تحوي على إلكترونات خاضعة لتوزيع بولتزمان وأيونات غير حرارية (nonthermal) وحبيبات غبار مشحونة بشحنة سالبة متغيرة واستخدموا في دراستهم طريقة الجهد الزائف لساكديف وحصلوا على حلول سوليتونية، كما أثبتوا من خلال دراستهم هذه أن لكثافة ودرجة حرارة الأيونات غير الحرارية تأثير واضح على سلوك الأمواج السوليتونية.

درس Kuldeep Singh وآخرون [9] سنة (2017) خصائص التصادم الرأسي بين الأمواج السوليتونية الصوتية الغبارية في بلازما مغيرة مكونة من مائع غباري وإلكترونات وأيونات وبوزيترونات فائقة الحرارة خاضعة لتوزيع كايا، استخدموا طريقة بونكاريه - ليثيل - كو الاضطرابية الاختزالية بهدف اختزال جملة معادلات المائع الغباري بمعادلتين كورديفيك - دي فريس، وحصلوا باستخدام هذه الطريقة على الانزياحات الطورية ومسارات الأمواج السوليتونية بعد التصادم، ووجدوا أن لكل من تركيز ودرجة حرارة الإلكترونات والبوزيترونات والأيونات تأثير واضح على الانزياحات الطورية ومسارات الأمواج المتصادمة.

درست Hayam Darweesh وآخرون [10] سنة (2018) تفاعل الأمواج السوليتونية الصوتية الغبارية في بلازما مغبرة شديدة الاقتران مع إلكترونات وأيونات خاضعة لتوزع غير ممتد (Nonextensive)، استخدموا في دراستهم طريقة بونكاريه - ليثيل - كو، تبين من خلال دراستهم هذه أن خصائص التصادم المباشر والانزياح الطوري الناتج عن التصادم يرتبط بقوة بالبارامتر غير الممتد (Nonextensive parameter)، وبنسبة كثافة الأيونات إلى كثافة الإلكترونات، ونسبة درجة الحرارة الأيونية إلى الإلكترونية.

درس السراجي وآخرون [11] سنة (2018) خصائص انتشار الأمواج الصوتية الغبارية في بلازما مغبرة مكونة من حبيبات غبار متغيرة الحجم وإلكترونات خاضعة لتوزع هجين غير ممتد وغير حراري، استخدموا نظرية الحركة المدارية المحدودة (the orbital-motion-limited) لوصف عملية شحن حبيبات الغبار، استخدموا طريقة الاضطراب الاختزالية للحصول على معادلة زاخاروف - كورنتسوف (Zakharov-Kuznetsov) التي تصف الانتشار اللاخطي للأمواج الصوتية الغبارية، تبين لهم أن البارامترات غير الحرارية وغير الممتدة لها تأثير واضح على خصائص هذه الأمواج. كما أظهرت نتائجهم أن الأمواج التخلخالية يمكن أن تنتشر بشكل أساسي في نموذج البلازما المدروس بينما الأمواج الانضغاطية لم يتم الكشف عنها إلا من أجل مجال صغير جداً لبارامترات التوزع لأنواع البلازما.

سنقوم في هذا العمل بدراسة تأثير شحنة الغبار المتغيرة على سلوك الأمواج السوليتونية المتصادمة في جملة بلازما مكونة من إلكترونات وأيونات خاضعة لتوزع بولترمان وحبيبات غبار مشحونة بشحنة سالبة باستخدام طريقة بونكاريه - ليثيل - كو الاضطرابية الاختزالية، ومقارنة النتائج التي تم التوصل إليها خلال هذا البحث مع الدراسات المرجعية السابقة.

أهمية البحث:

• يمكننا هذا البحث الفهم الدقيق لسلوك الأنماط الموجية اللاخطية التي يمكن أن تتشكل في البلازما المغبرة.

• إن قدرة حبيبات الغبار على اكتساب شحنة كبيرة نسبياً مقارنةً بمكونات البلازما الأخرى التي تؤدي إلى ازدياد طاقة تفاعل كولوم بين الحبيبات، وبالتالي قدرتها على تشكيل بنى شبه صلبة (بلورات البلازما) لم يكن بالإمكان الحصول عليها في البلازما العادية، دفع الباحثين التجريبيين والنظريين إلى دراسة تأثير تغير الشحنة على سلوك هذه الحبيبات.

• كما أن مشكلة الملوثات الغبارية في البلازما التي تنتج عن تقشر الجدران الداخلية للأوعية الحاوية على البلازما بسبب تفاعلها مع مكونات البلازما، والتي تتمكن من الإفلات من تأثير الحقل المغناطيسي المستخدم في حصر البلازما، دفع الباحثين لإجراء المزيد من الدراسات النظرية والمخبرية من أجل الفهم الدقيق لآليات شحن هذه الحبيبات.

أهداف البحث:

• استنتاج علاقة شحنة الغبار المتغيرة انطلاقاً من معادلة توازن تيارات الحركة المدارية المحدودة (orbital motion limit) OML للأيونات والإلكترونات.

• دراسة تأثير شحنة الغبار المتغيرة على سلوك الأمواج السوليتونية الصوتية الغبارية المتصادمة انطلاقاً من معادلات نموذج المائع الغباري، حيث استخدمنا في دراستنا هذه طريقة بونكاريه - ليثل - كو (PLK) بهدف اختزال جملة معادلات المائع الغباري بمعادلاتي كورديفيك دي فريس (KdV)، التي لها حلول سوليتونية تمثل الأمواج السوليتونية المتصادمة.

- دراسة تأثير شحنة الغبار المتغيرة على الانزياحات الطورية الناتجة عن التصادم.
- مناقشة النتائج التي تم التوصل إليها عددياً وبيانياً ومقارنتها مع الأعمال السابقة ذات الصلة.

منهجية البحث ومواده:

تتعامل في هذا البحث مع جملة بلازمية مغبرة مكونة من إلكترونات وأيونات وحبيبات غبار ميكروية الحجم مشحونة بشحنة سالبة، والتي يمكن دراستها باستخدام معادلات المائع الغباري الحاكمة لهذه الجملة بالشكل الآتي [12]:

$$\frac{\partial n_d}{\partial t} + \frac{\partial(n_d \vartheta_d)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vartheta_d}{\partial t} + \vartheta_d \frac{\partial \vartheta_d}{\partial x} = Z_d \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = Z_d n_d + n_e - n_i \quad (3)$$

حيث n_i ، الكثافة العددية للأيونات، n_e الكثافة العددية للإلكترونات، n_d الكثافة العددية للغبار، ϑ_d سرعة المائع الغباري، Z_d عدد شحنة الغبار و Φ الكمون الكهربائي الساكن، تعطى الكثافات العددية للإلكترونات والأيونات وفق توزيع مكسويل بولتزمان بالشكل الآتي:

$$n_i = \mu \exp(-\Phi) \quad (4)$$

$$n_e = \nu \exp(\beta \Phi) \quad (5)$$

في المعادلات أعلاه، $\beta = \frac{T_i}{T_e}$ نسبة درجة الحرارة الأيونية إلى درجة الحرارة الإلكترونية، $\delta = \frac{n_{i0}}{n_{e0}}$ نسبة الكثافة العددية للأيونات إلى الكثافة العددية للإلكترونات، $\mu = \frac{\delta}{\delta-1}$ ، $\nu = \frac{1}{\delta-1}$ ، تم تنظيم كثافات الإلكترونات والأيونات بالإضافة إلى المتغيرات $\Phi, \vartheta_d, n_d, x, t$ والحصول على مقادير عديمة الأبعاد كالآتي [10,12]:

$$n_j \rightarrow \frac{n_j}{n_{j0}}, \quad \vartheta_d \rightarrow \frac{\vartheta_d}{C_D}, \quad x \rightarrow \frac{x}{\lambda_{Dd}}, \quad t \rightarrow t\omega_{pd}, \quad \Phi \rightarrow \frac{e\Phi}{K_B T_i}$$

حيث: $\lambda_{Dd} = \left(\frac{T_d}{4\pi n_{d0} Z_{d0}^2 e^2}\right)^{1/2}$ ، التواتر البلازمي الغباري، $\omega_d = \left(\frac{4\pi n_{d0} Z_{d0}^2 e^2}{m_d}\right)^{1/2}$ $j = e, i, d$ طول ديبياي الغباري، n_{d0} كثافة حبيبات الغبار في الحالة غير المضطربة، $C_d = \left(\frac{Z_{d0} T_d}{m_d}\right)^{1/2}$ سرعة الصوت الغبارية، Z_{d0} عدد شحنة الغبار غير المضطرب ويقاس بوحدة شحنة الإلكترون، m_d كتلة الغبار، و T_d درجة حرارة الغبار.

يمكن الحصول على شحنة الغبار المتغيرة Q_d من خلال معادلة تيارات الشحن:

$$\frac{\partial Q_d}{\partial t} + \vartheta_d \frac{\partial Q_d}{\partial x} = I_e + I_i \quad (6)$$

بما أن الإلكترونات أكثر قدرة على الحركة من الأيونات فإن الجسم سوف يشحن بشكل عام بشحنة سالبة. لحساب التيارات نفرض أن كمون الجسم سالب بالنسبة إلى كمون البلازما هذا يعني $\Phi_p < 0$. وبالتالي فإن

حبيبات الغبار السالبة ستجذب الأيونات وتتأثر مع الإلكترونات. تعطى تيارات OML للأيونات والإلكترونات بالعلاقات الآتية [13]:

$$I_i = \pi a^2 n_i e \sqrt{\frac{8KT_i}{\pi m_i}} \left(1 - \frac{e\Phi_p}{KT_i}\right) \quad (7)$$

$$I_e = -\pi a^2 n_e e \sqrt{\frac{8KT_e}{\pi m_e}} \exp\left(\frac{e\Phi_p}{KT_e}\right) \quad (8)$$

Φ_p : كمون سطح الحبيبة، a : نصف قطر الحبيبة. من المعروف أن الزمن المميز لحركة الغبار للحبيبات بحجم الميكرومتر هو من رتبة الملي ثانية، بينما زمن شحن الغبار عادة ما يكون من رتبة 10^{-8} s، ولذلك فإن حركة الغبار ليست سريعة بحيث أن مساهمة التيار الإلكتروني على سطح الحبيبة تتساوى مع مساهمة التيار الأيوني، تكتب معادلة توازن التيارين بالشكل الآتي:

$$I_e + I_i = 0 \quad (9)$$

بتعويض العلاقات (7) و (8) في (9) وإجراء بعض الحسابات الرياضية نحصل على المعادلة

الآتية:

$$\alpha \delta \left(1 - \frac{e\Phi_p}{KT_i}\right) \exp(-\Phi) - \exp\left(\frac{e\Phi_p}{KT_e} + \beta\Phi\right) = 0$$

حيث: $\alpha = \sqrt{\frac{\beta}{\mu_i}}$ ، $\mu_i = \frac{m_i}{m_e}$ ، بفرض أن $\Psi = \frac{e\Phi_p}{T_i}$ ، فتأخذ المعادلة الشكل الآتي:

$$\alpha \delta(1 - \Psi) \exp(-\Phi) - \exp(\beta(\Phi + \Psi)) = 0 \quad (10)$$

يعطى عدد شحنة الغبار المنظم بالشكل الآتي:

$$Z_d = \frac{\Psi}{\Psi_0} \quad (11)$$

حيث $\Psi_0 = \Psi(\Phi = 0)$ هو كمون طفو (floating potential) سطح الغبار ويتم تحديده بتعويض

$\Phi = 0$ في المعادلة (10) فتصبح بالشكل:

$$\alpha \delta(1 - \Psi_0) - \exp(\beta\Psi_0) = 0 \quad (12)$$

بتعويض (11) في (10) تصبح المعادلة بالشكل الآتي:

$$\alpha \delta(1 - \Psi_0 Z_d) \exp(-\Phi) - \exp(\beta(\Phi + \Psi_0 Z_d)) = 0 \quad (13)$$

نقوم بنشر المعادلة (13) في سلسلة قوى بجوار $\Phi = 0$ فنحصل على العلاقات الآتية:

$$Z_{d1} = \gamma_1 \Phi_1 \quad (14)$$

$$Z_{d2} = \gamma_1 \Phi_2 + \gamma_2 \Phi_1^2 \quad (15)$$

حيث:

$$\gamma_1 = -\frac{1}{\Psi_0} \frac{(1 + \beta)(1 - \Psi_0)}{1 + \beta(1 - \Psi_0)}$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{2\Psi_0} \left(\frac{((1 - \Psi_0)(1 - \beta^2(1 + \Psi_0\gamma_1^2))) + 2\Psi_0\gamma_1}{1 + \beta(1 - \Psi_0)} \right)$$

المتحولان γ_1 و γ_2 هما بارامتران فيزيائيان يصفان تغير شحنة الغبار وبوضع $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ نحصل

على حالة شحنة غبار ثابتة أي $Z_d = 1$.

طريقة بونكاريه - ليثيل - كو (PLK) و معادلات (KdV):

سنعمل من خلال هذا البحث على دراسة تغير الانزياحات الطورية (phase shifts) لموجتين سوليتونيتين صوتيتين غباريتين (DASWs) تتحركان باتجاهين متعاكسين وتتصادمان مع بعضهما البعض باستخدام طريقة (PLK) الاضطرابية لدراسة تأثيرات التصادم، بفرض المتحولات التابعة الآتية [10, 12]:

$$\begin{aligned} \xi &= \varepsilon(x - c_1 t) + \varepsilon^2 P_0(\eta, \tau) + \varepsilon^3 P_1(\xi, \eta, \tau) + \dots \\ \eta &= \varepsilon(x + c_2 t) + \varepsilon^2 Q_0(\eta, \tau) + \varepsilon^3 Q_1(\xi, \eta, \tau) + \dots \\ \tau &= \varepsilon^3 t \end{aligned} \quad (16)$$

حيث ε بارامتر اضطرابي صغير، يمكن تمثيل مسارات DASWs المتصادمة من خلال المتغيرين ξ و η ، كما يمكن تحديد الكميتين $P_0(\eta, \tau)$ و $Q_0(\eta, \tau)$ وسرعتي طور الموجتين السوليتونيين c_1 و c_2 لاحقاً. يمكن نشر الكميات الفيزيائية (الكثافة، السرعة، الكمون الكهربائي، وعدد الشحنة) في سلسلة قوى كالتالي:

$$\left. \begin{aligned} n_d &= 1 + \varepsilon^2 n_1 + \varepsilon^3 n_2 + \varepsilon^4 n_3 + \dots \\ \vartheta_d &= \vartheta_0 + \varepsilon^2 \vartheta_1 + \varepsilon^3 \vartheta_2 + \varepsilon^4 \vartheta_3 + \dots \\ \Phi &= \varepsilon^2 \Phi_1 + \varepsilon^3 \Phi_2 + \varepsilon^4 \Phi_3 + \dots \\ Z_d &= 1 + \varepsilon^2 Z_{d1} + \varepsilon^3 Z_{d2} + \varepsilon^4 Z_{d3} \dots \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

حيث: ϑ_0 سرعة المائع الغباري في الحالة غير المضطربة (حالة التوازن)، بتعويض المعادلات (17 - 14) في المعادلات (3 - 1) ومساواة أمثال ε^2 نحصل على المعادلة الآتية:

$$\Phi_1 = \Phi_\xi(\xi, \tau) + \Phi_\eta(\eta, \tau) \quad (18)$$

$$n_1 = -[1 + \gamma_1 + (\nu\beta + \mu)] [\Phi_\xi(\xi, \tau) + \Phi_\eta(\eta, \tau)] \quad (19)$$

$$\vartheta_1 = -\frac{1}{(c_1 - \vartheta_0)} \Phi_\xi + \frac{1}{(\vartheta_0 + c_2)} \Phi_\eta \quad (20)$$

حيث ϑ_1 تمثل سرعة المائع الغبار الاضطرابية من المرتبة الأولى. بحل جملة المعادلات (18) - (20) نحصل على سرعة طور الموجة السوليتونية الصوتية الغبارية الأولى:

$$c_1 = \left(\frac{1}{1 + \gamma_1 + (\nu\beta + \mu)} \right)^{\frac{1}{2}} + \vartheta_0 \quad (21)$$

وسرعة طور الموجة السوليتونية الصوتية الغبارية الثانية:

$$c_2 = \left(\frac{1}{1 + \gamma_1 + (\nu\beta + \mu)} \right)^{\frac{1}{2}} - \vartheta_0 \quad (22)$$

كما نحصل بمساواة أمثال ε^3 بالصفير على المعادلات الآتية:

$$\Phi_2 = \Phi_\xi(\xi, \tau) + \Phi_\eta(\eta, \tau) \quad (23)$$

$$n_2 = -(1 + \gamma_1 + (\nu\beta + \mu)) [\Phi_\xi(\xi, \tau) + \Phi_\eta(\eta, \tau)] \quad (24)$$

$$\vartheta_2 = -\frac{1}{(c_1 - \vartheta_0)} \Phi_\xi + \frac{1}{(\vartheta_0 + c_2)} \Phi_\eta \quad (25)$$

حيث ϑ_2 تمثل سرعة المائع الغباري الاضطرابية من المرتبة الثانية. وبمساواة أمثال ε^4 و ε^5 ، وبالاستفادة من المعادلات (18) - (25) نحصل على المعادلة الآتية:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{(1 + \gamma_1 + (v\beta + \mu))} \frac{\partial^2 \vartheta_3}{\partial \xi \partial \eta} \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \Phi_\xi}{\partial \tau} + A \Phi_\xi \frac{\partial \Phi_\xi}{\partial \xi} + B \frac{\partial^3 \Phi_\xi}{\partial \xi^3} \right) + \left(C \frac{\partial P_0}{\partial \eta} + D \Phi_\eta \right) \frac{\partial^2 \Phi_\xi}{\partial \xi^2} \\ &+ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \Phi_\eta}{\partial \tau} - A \Phi_\eta \frac{\partial \Phi_\eta}{\partial \eta} - B \frac{\partial^3 \Phi_\eta}{\partial \eta^3} \right) - \left(C \frac{\partial Q_0}{\partial \xi} + D \Phi_\xi \right) \frac{\partial^2 \Phi_\eta}{\partial \eta^2} \quad (26) \end{aligned}$$

تكامل بالنسبة لـ ξ و η :

$$\begin{aligned} & \frac{2}{(1 + \gamma_1 + (v\beta + \mu))} \vartheta_3 \\ &= \int \left(\frac{\partial \Phi_\xi}{\partial \tau} + A \Phi_\xi \frac{\partial \Phi_\xi}{\partial \xi} + B \frac{\partial^3 \Phi_\xi}{\partial \xi^3} \right) d\eta + \int \left(\frac{\partial \Phi_\eta}{\partial \tau} - A \Phi_\eta \frac{\partial \Phi_\eta}{\partial \eta} - B \frac{\partial^3 \Phi_\eta}{\partial \eta^3} \right) d\xi \\ &+ \iint \left(C \frac{\partial P_0}{\partial \eta} + D \Phi_\eta \right) \frac{\partial^2 \Phi_\xi}{\partial \xi^2} d\xi d\eta \\ &- \iint \left(C \frac{\partial Q_0}{\partial \xi} + D \Phi_\xi \right) \frac{\partial^2 \Phi_\eta}{\partial \eta^2} d\xi d\eta \quad (27) \end{aligned}$$

حيث:

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{1}{E} \left[2(v\beta + \mu)^2 + (v\beta + \mu)(2\gamma_1 - 1) - \gamma_1 + 2 \left[\gamma_2 + \left(\frac{\beta^2 v - \mu}{2} \right) \right] \right] \\ B &= \frac{1}{E} \\ C &= \frac{1}{2(1 + \gamma_1 + (v\beta + \mu))^{\frac{1}{2}}} \\ D &= \frac{1}{E} \left[(v\beta + \mu)^2 + 4\gamma_1^2 + 5\gamma_1(v\beta + \mu) - 2 \left[\gamma_2 + \left(\frac{\beta^2 v - \mu}{2} \right) \right] \right] \\ E &= 2(1 + \gamma_1 + (v\beta + \mu))^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \right\} (28)$$

يتناسب الحد الأول من الطرف الأيمن في المعادلة (27) مع η لأن التكامل مستقل عن η ، في حين

يتناسب الحد الثاني من الجانب الأيمن في المعادلة (27) مع ξ لأن التكامل مستقل عن ξ ،

$$\frac{\partial \Phi_\xi}{\partial \tau} + A \Phi_\xi \frac{\partial \Phi_\xi}{\partial \xi} + B \frac{\partial^3 \Phi_\xi}{\partial \xi^3} = 0 \quad (29)$$

$$\frac{\partial \Phi_\eta}{\partial \tau} - A \Phi_\eta \frac{\partial \Phi_\eta}{\partial \eta} - B \frac{\partial^3 \Phi_\eta}{\partial \eta^3} = 0 \quad (30)$$

نلاحظ أن للمعادلتين (29) و (30) نفس معاملات اللاخطية (nonlinear) A والتبدد (dispersion)

B . بالعودة إلى المعادلتين (18) و (23) نستنتج أن $\frac{\partial^2 \Phi_\xi}{\partial \xi^2} \neq 0$ و $\frac{\partial^2 \Phi_\eta}{\partial \eta^2} \neq 0$ ، وبالتالي فإن أمثال كل

منهما في الطرف الأيمن من المعادلة (27) يكون معدوماً أي أن [10,12]:

$$C \frac{\partial P_0}{\partial \eta} = -D \Phi_\eta \quad (31)$$

$$C \frac{\partial Q_0}{\partial \xi} = -D \Phi_\xi \quad (32)$$

تعطى حلول المعادلتين (29) و (30) بالصيغة الآتية [14]:

$$\Phi_\xi = \Phi_{A1} \operatorname{sech}^2 \left[\left(\frac{A \Phi_{A1}}{12B} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\xi - \frac{1}{3} A \Phi_{A1} \tau \right) \right] \quad (33)$$

$$\Phi_\eta = \Phi_{A2} \operatorname{sech}^2 \left[\left(\frac{A \Phi_{A2}}{12B} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\eta + \frac{1}{3} A \Phi_{A2} \tau \right) \right] \quad (34)$$

حيث: $\Phi_{A1} = \frac{3U_0}{A}$ ، $\Phi_{A2} = \frac{3U_0}{A}$ ، $W_1 = \sqrt{\frac{4B}{U_0}}$ سعة وعرض الموجة الأولى على الترتيب، $W_2 = \sqrt{\frac{4B}{U_0}}$ ، $\Phi_{A2} = \frac{3U_0}{A}$ ، سعة وعرض الموجة الثانية على الترتيب، U_0 سرعة الموجة السوليتونية. تحسب الانزياحات الطورية الناتجة عن

التصادم من المعادلتين (31) و (32) وفق الشكل الآتي:

$$P_0(\eta, \tau) = -\frac{D}{C} \left(\frac{12B \Phi_2}{A} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\tanh \left(\left(\frac{A \Phi_2}{12B} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\eta + \frac{1}{3} A \Phi_2 \tau \right) \right) + 1 \right] \quad (35)$$

$$Q_0(\xi, \tau) = -\frac{D}{C} \left(\frac{12B \Phi_1}{A} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\tanh \left(\left(\frac{A \Phi_1}{12B} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\xi - \frac{1}{3} A \Phi_1 \tau \right) \right) - 1 \right] \quad (36)$$

بتعويض (35) و (36) في (16) نحصل على مسارات الأمواج السوليتونية المتصادمة:

$$\xi = \varepsilon(x - c_1 t) - \varepsilon^2 \frac{D}{C} \left(\frac{12B \Phi_2}{A} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\tanh \left(\left(\frac{A \Phi_2}{12B} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\eta + \frac{1}{3} A \Phi_2 \tau \right) \right) + 1 \right] + O(\varepsilon^3) \quad (37)$$

$$\eta = \varepsilon(x + c_2 t) - \varepsilon^2 \frac{D}{C} \left(\frac{12B \Phi_1}{A} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\tanh \left(\left(\frac{A \Phi_1}{12B} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\xi - \frac{1}{3} A \Phi_1 \tau \right) \right) - 1 \right] + O(\varepsilon^3) \quad (38)$$

للحصول على الانزياحات الطورية الناتجة عن تصادم السوليتونين، نفرض أن السوليتونين (1) و (2) بعيدان عن بعضهما في اللحظة الابتدائية، حيث يتواجد السوليتون (1) في $(\xi = 0, \eta = -\infty)$ والسوليتون (2) في $(\eta = 0, \xi = +\infty)$. يبتعد السوليتونان عن بعضهما بعد التصادم من جديد، هذا يعني السوليتون (1) في $(\xi = 0, \eta = +\infty)$ والسوليتون (2) في $(\eta = 0, \xi = -\infty)$. باستخدام المعادلات (37) و (38) نحصل على الانزياحات الطورية ΔP_0 و ΔQ_0 كآتي:

$$\Delta P_0 = \varepsilon(x - c_1 t)|_{\xi=0, \eta=+\infty} - \varepsilon(x - c_1 t)|_{\xi=0, \eta=-\infty}$$

$$\Delta Q_0 = \varepsilon(x + c_2 t)|_{\eta=0, \xi=+\infty} - \varepsilon(x + c_2 t)|_{\eta=0, \xi=-\infty}$$

وبالتالي يعطى الانزياح الطوري للسوليتونات (1) و (2) وفق الصيغة الآتية:

$$\Delta P_0 = 2\varepsilon^2 \frac{D}{C} \left(\frac{12B \Phi_2}{A} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (39)$$

$$\Delta Q_0 = -2\varepsilon^2 \frac{D}{C} \left(\frac{12B\Phi_1}{A} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (40)$$

بما أن الموجة السوليتونية (1) تنتقل لليمين والموجة السوليتونية (2) تنتقل لليسار نستطيع الملاحظة من المعادلتين (39) و (40) أن نتيجة اصطدام كل موجة سوليتونية تملك انزياح طور موجب في اتجاه انتقال الموجة.

النتائج والمناقشة:

قمنا في هذا العمل بدراسة تأثير شحنة الغبار المتغيرة على سلوك الأمواج السوليتونية الصوتية المتصادمة في البلازما المغبرة، أجرينا الرسم البياني باستخدام برنامج (Maple 2018) [15]، من أجل بارامترات البلازما الموضحة في الجدول (1) [16]:

الجدول (1): بارامترات البلازما المستخدمة في البحث

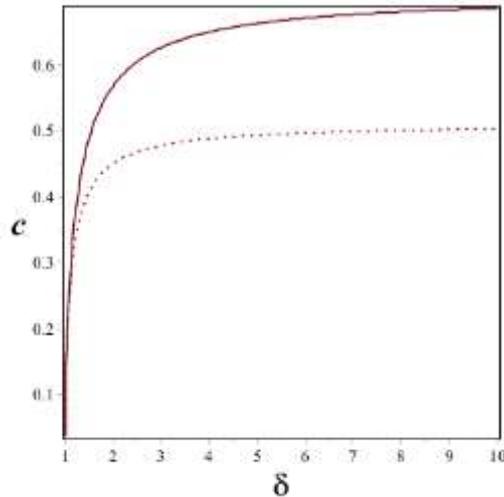
البارامتر	مجال البارامتر
n_{i0}	$(10 - 100) \times 10^{13} m^{-3}$
n_{e0}	$(1 - 10) \times 10^{13} m^{-3}$
$K_B T_i$	$(0.5 - 2) eV$
$K_B T_e$	$(3 - 4) eV$
$K_B T_d$	$0.2 eV$
a	$0.2 \mu m$
m_d	$1 \times 10^{-13} Kg$
$\mu_i = \frac{m_i}{m_e}$	72822

تتعلق قيمة البارامترين γ_1 و γ_2 بقيمة النسبة β وبالتالي يتحدد مجال تغير شحنة الغبار كما هو موضح في الجدول (2):

الجدول (2): مجال تغير شحنة الغبار

β	0.1	0.35	0.6
γ_1	1.833333	1.588235	1.454545
γ_2	2.202546	1.170567	0.685199

لإظهار تأثير شحنة الغبار المتغيرة على سرعة طور الموجة السوليتونية قمنا برسم تغيرات سرعة طور الموجة (العلاقة (21)) بتابعة النسبة $\delta = \frac{n_{i0}}{n_{e0}}$ فحصلنا على الشكل (1):



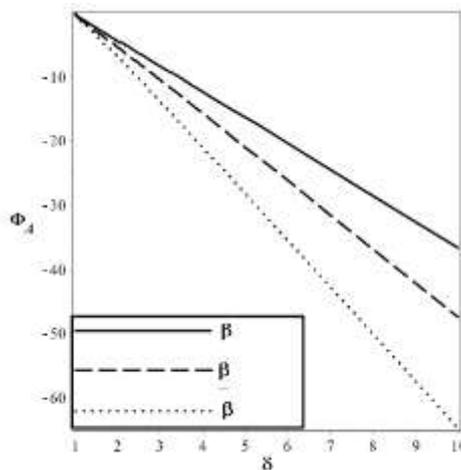
الشكل (١): تغيرات سرعة طور الموجة السوليتونية بتابعة النسبة $\delta = \frac{n_{i0}}{n_{e0}}$ بثبات $\beta = 0.1$ و $\vartheta_0 = 0$ ، في الحالتين، شحنة غبار ثابتة $\gamma_1 = 0$ (الخط المستمر)، وشحنة غبار متغيرة (الخط المنقط).

نلاحظ من الشكل (١) أن سرعة الطور تزداد بشكل كبير بتابعة δ عندما $\delta < 3$ وتصبح التغيرات أكثر سلاسة عندما $\delta > 3$ ، كما نلاحظ أن سرعة الطور تتساوى في حالتين (تغير وثبات شحنة الغبار) عندما تكون $\delta < 1.5$ بينما تتناقص سرعة الطور بشكل واضح في حالة الشحنة المتغيرة عندما تكون $\delta > 1.5$.

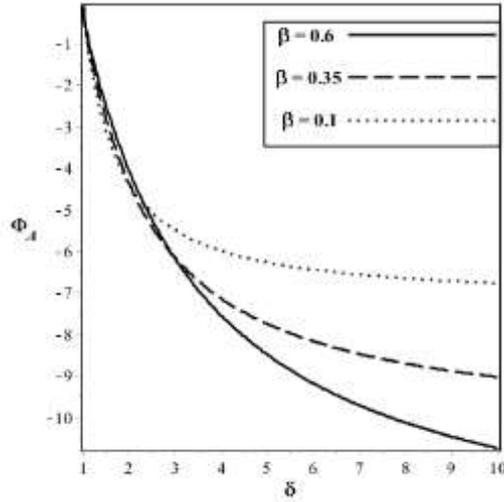
تعبّر النسبة γ_1 عن الفرق بين كمون سطح حبيبة الغبار وكمون البلازما المحيطة. يتضح من الشكل (١) أن ازدياد الفرق بين كثافة مكونات البلازما يؤدي إلى شحن بطيء لحبيبات الغبار وهذا يسبب ازدياد الفرق بين كمون الحبيبة وكمون البلازما أي تصبح النسبة γ_1 أكبر مما يسبب نقصان في سرعة طور الموجة السوليتونية. من جانب آخر، عند تكون كثافة مكونات البلازما متقاربة أي $\delta \rightarrow 1$ ، بفرض أن الفرق بين درجة حرارة المكونات ثابت (β قيمتها ثابتة)، وبالتالي $\nu, \mu \rightarrow \infty$ فيصبح تأثير γ_1 مهمل في مقام العلاقة (٢١) وهذا هو سبب تقارب المنحنيين البيانيين في الحالة $\delta \rightarrow 1$ ، ويفسر ذلك بأن تأثير مكونات البلازما على سطح الحبيبة يصبح متوازن في هذه الحالة مما يجعل شحنتها ثابتة وبالتالي يكون الفرق بين كمون سطح الحبيبة وكمون البلازما معدوماً.

لإظهار تأثير شحنة الغبار المتغيرة على سعة الموجة السوليتونية قمنا برسم تغيرات السعة بتابعة δ من أجل عدة

قيم للنسبة $\beta = \frac{T_i}{T_e}$ وحصلنا على الشكلين (٢) و (٣):



الشكل (٢): تغيرات سعة الموجة السوليتونية بتابعة النسبة δ في حالة شحنة غبار ثابتة $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0$ من أجل عدة قيم للنسبة β .



الشكل (٣): تغيرات سرعة الموجة السوليتونية بتابعة النسبة δ في حالة شحنة غبار متغيرة (قيم متغيرة لـ γ_1 و γ_2) من أجل عدة قيم للنسبة β .

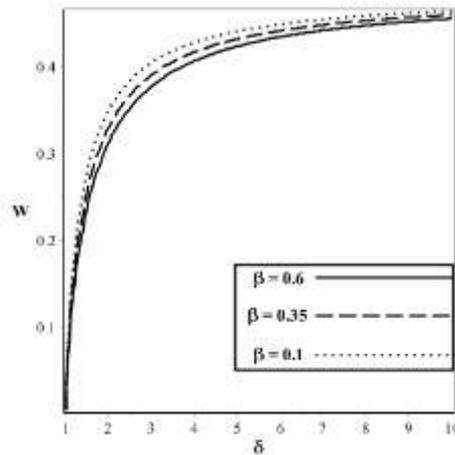
يمكننا تسجيل الملاحظات الآتية من الشكلين (٢) و (٣):

• إن سرعة الموجة السوليتونية تزداد بازدياد النسبة δ (تدل الإشارة السالبة على محور السرعة على جهة تشكل الموجة السوليتونية نحو الأسفل)، لكن يكون التزايد بشكل خطي تقريباً في حالة الشحنة الثابتة، بينما في حالة الشحنة المتغيرة يكون التزايد بشكل كبير عندما تكون $\delta \rightarrow 1$ ويصبح أكثر سلاسة عندما تكون $\delta > 3$.

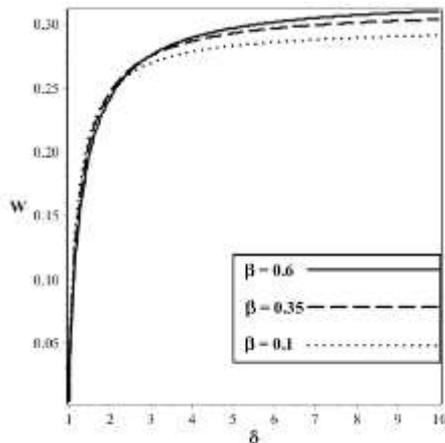
• في الشكل (١) (حالة شحنة ثابتة) تزداد سرعة الموجة السوليتونية بنقصان النسبة β من أجل قيمة محددة للنسبة δ ويتناقص هذا الفرق باقتراب قيمة النسبة δ من الواحد ($\delta \rightarrow 1$). بينما في الشكل (٢) (حالة شحنة متغيرة) تزداد سرعة الموجة السوليتونية بازدياد النسبة δ من أجل قيمة محددة للنسبة δ ويتناقص هذا الفرق عندما تصبح $\delta \rightarrow 1$.

لإظهار تأثير شحنة الغبار المتغيرة على عرض الموجة السوليتونية قمنا برسم تغيرات العرض بتابعة

النسبة δ من أجل قيم مختلفة للنسبة β وحصلنا على الشكلين (٤) و (٥):



الشكل (٤): تغيرات عرض الموجة السوليتونية بتابعة النسبة δ في حالة شحنة غبار ثابتة $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0$ من أجل عدة قيم للنسبة β .



الشكل (٥): تغيرات عرض الموجة السوليتونية بتابعية النسبة δ في حالة شحنة غبار متغيرة (قيم متغيرة لـ γ_1 و γ_2) من أجل عدة قيم للنسبة β .

بالمقارنة بين الشكلين (٤) و (٥) يمكن تسجيل الملاحظات الآتية:

• يزداد عرض الموجة السوليتونية بشكل كبير بازدياد النسبة δ عندما تكون $\delta \rightarrow 1$ ويصبح أكثر سلاسة عندما تصبح $\delta > 3$.

• عندما تكون الشحنة ثابتة يتناقص عرض الموجة السوليتونية بازدياد النسبة β من أجل قيمة محددة للنسبة δ عندما تكون $\delta > 2$ ، بينما يثبت العرض بتغيير النسبة β عندما تكون $\delta \rightarrow 1$.

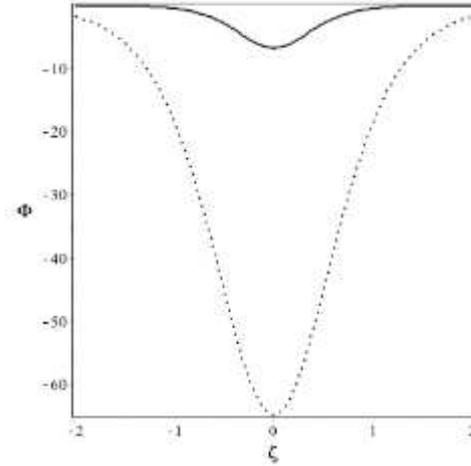
• عندما تكون الشحنة متغيرة يزداد عرض الموجة بازدياد النسبة β عندما تكون $\delta > 3$ بينما يثبت العرض بينما يثبت العرض بتغيير النسبة β عندما تكون $\delta \rightarrow 1$.

يعود تغير شحنة الغبار إلى عدة عوامل منها اختلاف درجة حرارة مكونات البلازما حيث تكون درجة حرارة الإلكترونات أكبر من درجة حرارة الأيونات لذلك تستطيع الإلكترونات الوصول إلى حبيبات الغبار بسرعة أكبر وشحنها بشحنة سالبة. بالإضافة إلى أن ازدياد كثافة المكونات يؤدي إلى ازدياد عدد التصادمات التي تحدث بين حبيبات الغبار ومكونات البلازما الأخرى حيث تساهم هذه التصادمات في تغيير شحنة الغبار. يساهم هذا التغير في الشحنة في زيادة سعة الموجة السوليتونية وإنقاص عرضها فينتج عن ذلك انحدار الموجة مسيئاً ظهور نمط جديد من الأنماط الصوتية الغبارية اللاخطية تسمى موجة الصدم الصوتية الغبارية وتم ملاحظة هذه الأنماط في جميع المذنبات [17].

تتفق هذه النتيجة مع النتائج الواردة في المرجع [18] التي خلصت إلى أن تغير شحنة الغبار الناتج عن التصادم اللاخطي يؤدي إلى تطور أمواج صدم صوتية غبارية في بلازما لا تصادمية (collisionless).

يفسر تقارب الخطوط البيانية في الأشكال السابقة من خلال الحد $(v\beta + \mu)$ حيث يتضح أن تأثير النسبة β يصبح مهماً عندما $\delta \rightarrow 1$ ، هذا يعني أن تأثير اختلاف درجة حرارة مكونات البلازما على شكل الموجة السوليتونية يصبح مهماً عندما تتساوى كثافة المكونات في حالة التوازن.

يوضح الشكل (٦) مقارنة بين النبضة السوليتونية في حالة الشحنة الثابتة وحالة الشحنة المتغيرة:

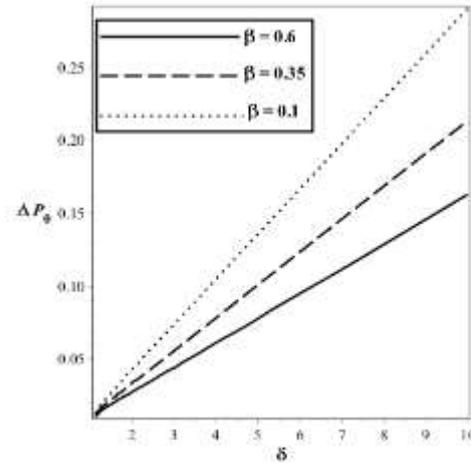


الشكل (٦): النبضة السوليتونية في حالة الشحنة الثابتة $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0$ (الخط المنقط) وفي حالة الشحنة المتغيرة $\gamma_1 \neq 0$ و

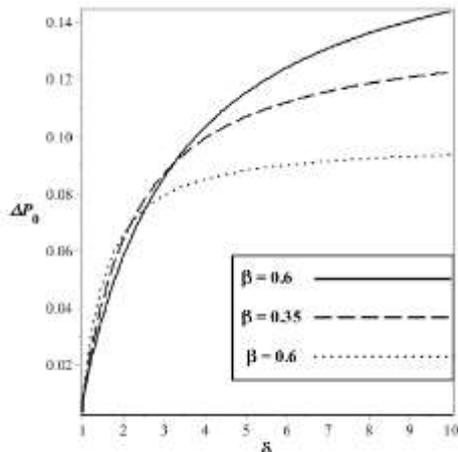
$$\gamma_2 \neq 0 \text{ (الخط المستمر)، } \beta = 0.1, \delta = 10$$

يتضح من الشكل (٦) أن عرض الموجة السوليتونية وسعتها يتناقصان بشكل كبير في حالة شحنة الغبار المتغيرة، بمعنى آخر يؤدي ازدياد التباين بين كمون سطح حبيبة الغبار وكمون البلازما إلى انخفاض احتمال تشكل الأمواج السوليتونية في البلازما.

مما لا شك فيه أن هذه التغيرات في سعة الموجة السوليتونية نتيجة التغير في شحنة الغبار يؤثر على الانزياحات الطورية كما هو واضح في العلاقتين (٣٩) و (٤٠)، ولإظهار تأثير الشحنة المتغيرة على الانزياحات الطورية الناتجة عن التصادم قمنا برسم تغيرات الانزياحات الطورية بتابعة النسبة δ من أجل قيم مختلفة للنسبة β وحصلنا على الشكلين (٧) و (٨):



الشكل (٧): تغيرات الانزياح الطوري بتابعة النسبة δ في حالة شحنة غبار ثابتة $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0$ من أجل عدة قيم للنسبة β .



الشكل (٨): تغيرات الانزياح الطوري بتابعية النسبة δ في حالة شحنة غبار متغيرة (قيم متغيرة لـ γ_1 و γ_2 من أجل عدة قيم للنسبة β . بالمقارنة بين الشكلين (٧) و (٨) يمكن تسجيل الملاحظات الآتية:

• في الشكل (٧) (حالة شحنة غبار ثابتة) يزداد الانزياح الطوري بتابعية النسبة δ بشكل خطي، بينما في الشكل (٨) (حالة شحنة غبار متغيرة) يزداد الانزياح الطوري بشكل كبير عندما تكون $\delta < 3$ ويصبح التزايد أكثر سلاسة عندما تصبح $\delta > 3$.

• في حالة شحنة غبار ثابتة يتناقص الانزياح الطوري بازدياد النسبة β من أجل قيمة محددة لـ δ وتتقارب الخطوط البيانية باقتراب النسبة δ من الواحد $\delta \rightarrow 1$.

• في حالة شحنة غبار متغيرة يزداد الانزياح الطوري بازدياد النسبة β عندما تكون $\delta > 3$ وتصبح التغيرات أقل وتتقارب الخطوط البيانية عندما تكون $\delta < 3$.

بالمقارنة بين الشكلين (٧) و (٨) يتضح أن الخطوط البيانية في كلتا الحالتين تتقارب عندما $\delta \rightarrow 1$ وتفسر ذلك أن تأثير النسبتين γ_1 و γ_2 يصبح مهملًا عندما تكون كثافة مكونات البلازما في حالة التوازن قريبة من بعضها.

الاستنتاجات والتوصيات:

قمنا في هذا العمل بدراسة تأثير شحنة الغبار المتغيرة على سلوك الأمواج السوليتونية المتصادمة في بلازما مغبرة مكونة من إلكترونات وأيونات خاضعة لتوزيع مكسويل بولتزمان وحبيبات غبار مشحونة بشحنة سالبة باستخدام طريقة بونكاريه - ليثل - كو حيث تم الحصول على معادلتين كورديفيك دي فريس يمثل حل كل معادلة أحد السوليتونات المتصادمة.

وقد وجدنا أن شحنة الغبار المتغيرة تؤثر على سعة وعرض السوليتونات المتصادمة من خلال المقارنة بين تغيرات السعة والعرض بتابعية النسبة δ في الحالتين (شحنة غبار ثابتة - وشحنة غبار متغيرة)، حيث تبين أن شحنة الغبار المتغيرة تؤثر بشكل كبير على شكل الخطوط البيانية، كما تبين أن تأثير درجة الحرارة الأيونية إلى الإلكترونية β يختلف في حالة شحنة الغبار المتغيرة.

كما قمنا في هذا العمل بحساب الانزياحات الطورية الناتجة عن تصادم الأمواج السوليتونية، وتبين أن تغيرات الانزياحات الطورية بتابعية النسبة δ في حالة شحنة الغبار المتغيرة تختلف بشكل كبير عن حالة الشحنة الثابتة، كما يختلف تأثير النسبة β على الانزياحات الطورية في حالة الشحنة المتغيرة.

وأخيراً لابد من الإشارة إلى هذه الدراسة تمت في جملة بلازما مغبرة متوازنة حرارياً، أي أن مكوناتها تخضع لتوزيع مكسويل بولتزمان. نوصي بمتابعة هذه الدراسة في جمل بلازما غير متوازنة حرارياً تخضع فيها المكونات

لتوزيع مكسويل بولتزمان المعدل أو ما يسمى بتوزيع كايا (κ) حيث يمكن وصف الجسيمات ذات السرعات العالية بشكل افضل باستخدام هذا التوزيع.
كما يمكن تطوير هذه الدراسة لتشمل تصادم عدة سوليتونات باستخدام طريقة هيروتا، حيث يمكن الحصول على حل لعدة سوليتونات من خلال تطبيق هذه الطريقة على معادلة KdV.

المراجع:

- [1] GOERTZ, C. K., 1989, *Dusty plasmas in the solar system*, *Rev. Geophys.*, vol. 27, no. 2, 271–292.
- [2] HAVNES, O.; MELANDSO, F.; HOZ, C. L.; ASLAKSEN, T., 1992, Charged dust in the earth's mesopause; effects on radar backscatter, *Phys. Scripta*, vol. 45, no.5, 433.
- [3] SHUKLA, P. K.; MAMUN, A. A., 2002 *Introduction to Dusty Plasma Physics*. Bristol, U.K.: Institute of Physics.
- [4] BARKAN, A.; MERLINO, R. L., 1995, *Laboratory observation of the dust-acoustic wave mode*, *Phys. Plasmas*, vol. 2, 3563.
- [5] MERLINO, R. L.; BARKAN, A.; THOMPSON, C., 1998, *Laboratory studies of waves and instabilities in dusty plasmas*, *Phys. Plasmas*, vol. 5, no. 5, 1607.
- [6] BLOKH, P.; SINITSIN, V.; YAROSHENKO, V., 1995, *Dusty and self-gravitational plasma in space*, Kluwer Academic Publ, Dordrecht.
- [7] VERHEEST, F., 2000, *Waves in Dusty Space Plasmas*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1, 87.
- [8] FOROZANI, G.; MOHAMMADI, M., 2011, *Dust-acoustic solitary waves in dusty plasma with variable dust charge*, *physics plasma*, vol. 3, no. 3, pp. 150-161.
- [9] SINGH, K.; KAUR, N.; SAINI, N., 2017, *Head-on collision between two dust acoustic solitary waves and study of rogue waves in multicomponent dusty plasma*, *Phys. Plasmas*, vol. 24, no 24, 55 – 67.
- [10] DARWEESH, H.; EL-HANBALY, A. M.; ABULWAFI, E. M., 2018 *Theoretical Study of Dust Acoustic Solitary Waves Interaction in a Strongly Coupled Dusty Plasma with Nonextensive Electrons and Ions*, *Quant. Phys. Lett.*, Vol. 7, no. 1, 21- 28
- [11] EL-TAIBANY, W. F.; EL-SIRAGY, N. M.; BEHERY, E. E., 2018, *The effects of variable dust size and charge on dust acoustic waves propagating in a hybrid Cairns–Tsallis complex plasma*, *Indian J Phys*, vol. 92, no. 5, 661 – 668.
- [12] KUNDU, S. K.; CHATTERJEE, P., 2012, *Head-on collision of dust acoustic solitary waves with variable dust charge and two temperature ions in an unmagnetized plasma*, *Astrophys Space Sci*, vol. 340, pp. 87-92.
- [13] He G.-J.; DUAN, W. S.; TIAN, D. X., 2008, *Effects of dust size distribution on dust acoustic waves in two-dimensional unmagnetized dusty plasma*, *Physics of Plasmas*, vol. 15, no. 4, 43702.
- [14] GARDNER, C. S., GREEN, J. M., KRUSKAL, M. D., MIURA, R. M. *Method for solving the Korteweg-de Vries equation*. *Phys. Rev. Lett.* Vol. 19, 1967, pp. 1095–1098.
- [15] EBERHART, C., 2009, *Maple Problem Solving Handbook*. Department of Mathematics, University of Kentucky, 3th ed, USA, 133.

- [16] BANDYOPADHYAY, P.; PRASAD, G.; SEN, A.; KAW, P. K., 2008, *Experimental study of nonlinear dust acoustic solitary waves in a dusty plasma*, [*Physical Review Letters*](#), vol. 101, no. 6.
- [17] [NAEEM](#), I.; EHSAN, [Z.](#); MIRZA, [A. M.](#); MURTAZA [G.](#), 2020, *Shocklets in the comet Halley plasma*, *Physics of Plasmas*, vol. 2020, no. 27.
- [18] [TRIBECHE](#), M.; BACHA, [M.](#), 2013, *Dust-acoustic shock waves in a charge varying electronegative magnetized dusty plasma with nonthermal ions: Application to Halley Comet plasma*, *American Institute of Physics*, vol. 20, no. 10.