مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٨) العدد (٥) ٢٠٢٤

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (8) No. (5) 2024

دراسة محدودية مؤثر تكامل كوشي الشاذ في الصف التابعي $L_{p_0}(.)$ المتفرع عن $L_{p}(.)$

أ.م.د عائدة صائمة*

حسن علي**

(تاريخ الإيداع ٢٠٢٤/٥/٢٩ – تاريخ النشر ٢٠٢٤/١٢/١)

□ ملخّص □

قمنا في هذا العمل بدراسة محدودية مؤثر تكامل كوشي الشاذ على صف تابعي متفرع عن فضاء ليبيغ المعمم وذلك باستخدام التحويل العكسي على أسرة المنحنيات الشهيرة ديني الملساء ، وتوصلنا إلى بعض النتائج التي تخص هذه الدراسة.

الكلمات المفتاحية : مؤثر تكامل كوشي الشاذ ، فضاء ليبيغ المعمم ، منحني ديني الأملس ، منحني كارلسون ، المحدودية.

*أستاذ مساعد في قسم الرياضيات جامعة طرطوس

**طالب دراسات عليا في قسم الرياضيات جامعة طرطوس

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٨) العدد (٥) ٢٠٢٤

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (8) No. (5) 2024

On the Boundedness of the Cauchy Singular Integral operator In Functional Class $L_{p_0}(.)$ Branched From $L_p(.)$

Dr. Aida Sayma*
Hasan Ali**

(Received 29/5/2024.Accepted 1/12/2024)

□ABSTRACT □

In this work, we have studied the boundness of the Cauchy singular integral operator on a functional class branching off the generalized Lebesgue space, using the inverse transformation on the family of the famous Dini-smooth curves. And we reached some results related to this study.

Key words: Cauchy Singural integral operator , Generalized Lebesgue space , Dini-smooth curve, Carleson curve , The boundedness

***Associate prof., Department of mathematics, faculty of Sciences, Tartous University, Tartous Syria**
****Postgraduate student in mathematics Department , faculty of Sciences, Tartous University, Tartous Syria**

مقدمة :

نشأ التحليل التابعي في أواخر القرن التاسع عشر وبالرغم من حداثته إلا أنه أصبح أحد أهم العلوم الرياضية النظرية المتفرعة عن التحليل الرياضي التقليدي ويندرج موضوع بحثنا الحالي ضمنه معتمدين بشكل خاص على مفاهيم نظرية التوابع العقدية . حيث بدأ الاهتمام بدراسة محدودية مؤثر تكامل كوشي الشاذ في العديد من الفضاءات التابعية المشهورة مثل فضاء ليبيغ وفضاء موري وفضاء أورليتش وتمثلت هذه الدراسة في إيجاد قيمة ومحدودية التكامل من الشكل **[3]:**

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}dz \quad ; \quad z_0\in\Gamma$$

حيث $f(z)$ تابع عقدي مستمر على Γ و يصبح شاذاً عندما تقع النقطة z_0 على المنحني Γ .

وهذه الدراسة تتعلق بقضيتين أساسيتين هما :

- ❖ الأسرة التي ينتمي إليها المنحني Γ.
- ❖ الصف التابعي (الفضاء) الذي ينتمي إليه التابع f.

حيث قام الباحث Alexi Karlovish عام 2014 [5] بدراسة محدودية مؤثر كوشي الشاذ في الفضاء $L^{p(.)}(R,W)$ من خلال إثبات إن مؤثر كوشي الشاذ محدود في الفضاء $L^{p(.)}(R,W)$ إذا وفقط إذا كان الوزن W من أسرة أوزان ماكنيهوبت.

وفي عام 2020 [10] درس الباحثان Taotao , Xiangxing محدودية تكامل كوشي الشاذ كمؤثر في جداء فضاءات ليبتشز.

أما في عام 2022 [3] قام الباحثون بولات سيليبكوف واخرون بدراسة محدودية وتراص صف المؤثرات التكاملية ذات الشذوذ اللوغاريتمي المتراصة وتطبيقاتها وتوصلوا إلى عدة نتائج متعلقة بهذا الخصوص.

ودرس الدكتور محمد علي (Ali) وآخرون عام 2023 [11] محدودية مؤثر تكامل كوشي الشاذ في فضاء موري مع الوسيط(t) $L^{p,\varphi,t}$

وفي هذا البحث تمت دراسة محدودية هذا التكامل على صف تابعي متفرع من فضاء ليبيغ المعمم $L_{p(.)}$ وتم التوصل لبعض النتائج التي تخص هذه الدراسة.

أهمية البحث وأهدافه :

تأتي أهمية هذا البحث من كون الموضوع المدروس هو محدودية مؤثر تكامل كوشي الشاذ الذي يملك تطبيقات نظرية وعملية هامة في كل من التحليل العقدي والتحليل التابعي ويهدف هذا البحث إلى ما يلي :

١. دراسة العلاقة بين نظيم التابع f في الفضاء $L_{p(.)}$ ونظيم التابع f_0 في الفضاء $L_{p_0(.)}$.

٢. دراسة العلاقة بين نظيم تكامل كوشي الشاذ للتابع f ونظيم تكامل كوشي الشاذ للتابع f_0.

٣. دراسة محدودية مؤثر كوشي الشاذ في الفضاء $L_{p_0(.)}(\gamma,\tilde{V})$.

طرائق البحث وموارده :

تعتمد دراسة هذا البحث على بعض المفاهيم والتعاريف الرياضية المعروفة في التحليل التابعي لأن البحث يقع ضمن الرياضيات النظرية وبشكل خاص في مادة التحليل العقدي لذلك فإن الطرق المتبعة فيه نظرية وتعتمد بشكل خاص على أدبيات نظرية التوابع التحليلية.

تعاريف ومفاهيم أساسية :

نورد فيما يلي بعض الرموز و المصطلحات الأساسية المستخدمة في هذا البحث [4] :

ليكن Γ منحني جوردان ذو طول محدود يقسم المستوي العقدي Z إلى قسمين منفصلين نرمز لهما بالرمز :

$$G = int\,\Gamma \quad , \quad G^- = ext\,\Gamma$$

حيث G منطقة وحيدة الاتصال في المستوي العقدي بحيث أن محيطها $\Gamma = \partial G$.

ولنرمز بـ $\gamma = \{ w : |w| = 1\}$ لدائرة الواحدة في المستوي W، بحيث يكون :

$D = int\,\gamma \quad , \quad D^- = ext\,\gamma$، حيث D هو قرص الواحدة المفتوح و D^- هو جزء المستوي الواقع خارج قرص الواحدة المغلق .

وليكن $w = \varphi(z)$ هو التابع الذي يحول G^- من المستوي Z إلى D^- في المستوي W

بحيث يتحقق : $\quad \lim\limits_{z\to\infty} \frac{\varphi(z)}{z} > 0 \quad , \quad \varphi(\infty) = \infty$

ولنرمز لتابعه العكسي بالرمز $z = \psi(w) = \varphi^{-1}(w)$ وهو التابع الذي يحول بشكل محافظ خارج دائرة الواحدة γ إلى خارج المنحني Γ .

أيضاً إذا كان التابع $f(z)$ معرفاً على المنحني Γ فإننا سنرمز للتابع $f(\psi(w))$ بالرمز $f_0(w)$ وهو معرف على دائرة الواحدة.

كما أن $C(\Gamma)$ هي أسرة كل التوابع f المعرفة والمستمرة على المنحني Γ .

تعريف 1[1] :

لتكن الدالة $f(z)$ دالة مستمرة على المنحني Γ عندئذ نسمي التكامل :

$$S_\Gamma f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz \quad ; \quad z_0\in\Gamma$$

بمؤثر تكامل كوشي الشاذ ونرمز له بالرمز $S_\Gamma f$.

تعريف 2 [7]:

يقال عن المنحني Γ أنه منحني كارلسون إذا تحقق الشرط الآتي :

$$\sup_{t\in\Gamma}\sup_{\varepsilon>0}\frac{1}{\varepsilon}|\Gamma(t,\varepsilon)|<\infty$$

حيث $\Gamma(t,\varepsilon)$ هو جزء المنحني Γ الواقع داخل القرص المفتوح الذي مركزه النقطة $t\in\Gamma$ ونصف قطره ε أي: $\quad \Gamma(t,\varepsilon) = \{\tau\in\Gamma \;;\; |\tau - t| < \varepsilon\}$

و $|\Gamma(t,\varepsilon)|$ تمثل طول $\Gamma(t,\varepsilon)$

تعريف 3 [4]:

لتكن h دالة مستمرة على المجال $[0,2\pi]$ معامل استمراريتها معرف بالعلاقة :

$$w(t,h) = \sup_{|t_1 - t_2| \le t} |h(t_1) - h(t_2)|$$

يقال عن الدالة h أنها دالة ديني–مستمرة إذا حققت الشرط الاتي :

$$\int_0^{\pi} \frac{w(t,h)}{t} dt < \infty \quad \dots\dots\dots (1)$$

ويقال عن المنحني Γ أنه منحني ديني– أملس إذا كان له التمثيل $0 \le t \le 2\pi$; $\Gamma: z = z(t)$ ويحقق الشرط (1) وكانت الدالة $\acute{Z}(t)$ دالة ديني مستمرة وتحقق الشرط $\acute{Z}(t) \ne 0$ لكل $t \in [o, 2\pi]$

وكما هو معلوم فإن أسرة منحنيات ديني الملساء هي أسرة جزئية من أسرة منحنيات كارلسون [2] .

تعريف 4 [4]:

ليكن Γ منحني جوردن ذو طول محدود و ε مجموعة جزئية من $[0,2\pi]$ عندئذ إذا كانت $p(.): \varepsilon \to [0, \infty)$ دالة قابلة للقياس على ليبيغ نعرف مايلي :

$$1 \le p_- := \operatorname*{ess\,inf}_{z \in \varepsilon} p(z) \le \operatorname*{ess\,sup}_{z \in \varepsilon} p(z) =: p^+ < \infty$$

ملاحظة (1) [4]:

ليكن $z \in C$ عندئذ إذا كانت $t \in [0,2\pi]$ حيث $|z| = 1$ فإن : $z = e^{it}$

تعريف 5 [9]:

يقال عن التابع $f(z)$ المعرف على Γ أنه يحقق شرط هولدر من المرتبة α على المنحني Γ إذا حقق الشرط الأتي :

$$|f(z_1) - f(z_2)| \le k|z_1 - z_2|^{\alpha} \quad ; \forall \ z_1, z_2 \in \Gamma$$

حيث أن $k > 0$ ثابت و $0 < \alpha \le 1$

نرمز لأسرة جميع التوابع التي تحقق هذا الشرط بالرمز $H^{\alpha}(\Gamma)$

تعريف 6 [4] :

لتكن $p: \Gamma \to [0, \infty[$ تابع قابل للقياس حسب لوبيغ يعرف فضاء ليبيغ ذو الأس المتغير $L_{p(.)}(\Gamma)$ على أنه جميع التوابع التي تحقق الشرط :

$$\int_{\Gamma} |f(z)|^{p(z)} |dz| < \infty$$

وهو يشكل فضاء باناخ تحت النظيم المعرف عليه بالشكل :

$$||f||_{L_{p(.)}} = \inf \left\{ \lambda > 0 \ : \ \int_{\Gamma} \left| \frac{f(z)}{\lambda} \right|^{p(z)} |dz| \le 1 \right\} < \infty$$

ملاحظة (2):

إذا كانت $p(.) = p$ حيث p عدد ثابت فإن $L_{p(.)}(\Gamma)$ يصبح فضاء ليبيغ الكلاسيكي $L_p(\Gamma)$.

تعريف 7 [8] :

لتكن $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$ نرمز بـ $A_{\mathrm{p}}(\Gamma)$ لمجموعة كل توابع الوزن $\mathrm{v} : \Gamma \longrightarrow [0,\infty]$ التي تحقق الشرط الآتي :

$$\underset{t\epsilon\Gamma}{\mathrm{Sup}}\ \underset{\varepsilon>0}{\mathrm{Sup}}\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma(t,\varepsilon)}\left(\mathrm{v}(\mathrm{w})\right)^{\mathrm{p}}|\mathrm{dw}|\right)^{\frac{1}{\mathrm{p}}}\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma(t,\varepsilon)}\left(\mathrm{v}(\mathrm{w})\right)^{-\mathrm{q}}|\mathrm{dw}|\right)^{\frac{1}{\mathrm{q}}} < \infty$$

حيث $\frac{1}{\mathrm{p}} + \frac{1}{q} = 1$ ، وندعو أسرة توابع الوزن هذه أسرة توابع أوزان مكنيهوبت .

تعريف 8 [6] :

لتكن $w: \Gamma \longrightarrow [0,\infty[$ دالة وزن حيث $0 < w(\mathrm{t}) < \infty$; $\mathrm{t} \in \Gamma$

ولنفرض $p: \Gamma \longrightarrow [0,\infty[$ دالة قابلة للقياس .

يرمز بـ $\mathrm{L}_{\mathrm{p}(.)}(\Gamma, w)$ لأسرة كل الدوال f العقدية القابلة للقياس على Γ والتي تحقق الشرط :

$$\int_{\Gamma}|f(\mathrm{z})w(z)/\lambda|^{\mathrm{p}(z)}|\mathrm{dz}| < \infty$$

من أجل $\lambda > 0$ ويدعى فضاء ليبيغ المعمم الموزن وهو يشكل فضاء باناخ تحت النظيم المعرف بالشكل:

$$\|f\|_{\mathrm{L}_{\mathrm{p}(.)}(\Gamma,w)} = \inf\left\{\lambda > 0\ :\ \int_{\Gamma}|f(z)w(z)/\lambda|^{p\,(z)}\,|\mathrm{dz}|\ \leq 1\right\} < \infty$$

تعريف 9 [4] :

إذا كان Γ منحني ديني أملس عندئذ:

$$f_0 \in \mathrm{L}_{\mathrm{p}_0(.)}(\gamma) \iff f \in \mathrm{L}_{\mathrm{p}(.)}(\Gamma)$$

ومنه صف التوابع $L_{p_0(.)}$ يعرف بالشكل :

$$L_{p_0(.)} = \left\{f_0(w)\ ;\ f_0(w) = f\big(\Psi(w)\big) \in \mathrm{L}_{\mathrm{p}(.)}(\Gamma)\right\}$$

النتائج والمناقشة :

مبرهنة مساعدة [6] : ليكن Γ منحني كارلسون بسيط ولتكن $\mathrm{p}: \Gamma \to [0,\infty[$ دالة مستمرة تحقق :

$$|p(\tau) - p(t)| \leq -\frac{A_\Gamma}{log|\tau - t|} \quad ; \qquad \forall\ |\tau - t| \leq 1/2$$

حيث: A_Γ ثابت موجب يتعلق فقط بـ Γ ولتكن $w_1, \dots\dots, w_n \in W$ تعطى بالعلاقة :

$$w(t) = \prod_{k=1}^{n} w_k(|\tau - t|) \quad , \quad t \in \Gamma$$

عندئذ إذا كان $\frac{1}{p(t_k)} + m(w_k) > 0 \quad ; \quad k\epsilon\,\{1, \dots\dots, n\}$

و $\frac{1}{\mathrm{p}(\mathrm{t_k})} + \mathrm{M}(\mathrm{w_k}) < 1\ \ for\ all\ \ k\epsilon\,\{1, \dots\dots, n\}$

حيث : $m(w_k) = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\log\Phi(\mathrm{t})}{\log t} \quad , \quad M(w_k) = \lim\limits_{t\to\infty}\frac{\log\Phi(\mathrm{t})}{\log t}$

و $\Phi(\mathrm{t}_1) = \lim\limits_{\mathrm{t}_2\to 0}\sup\frac{w_k(t_1\mathrm{t}_2)}{w_k(\mathrm{t}_2)} \quad , \quad \mathrm{t}_1 \leq \mathrm{t}_2 \quad , \quad \forall\ w_k \in W$

و $-\infty < m(w_k) \leq M(w_k) < +\infty$

فإن مؤثر كوشي الشاذ $\mathrm{S}_\Gamma f$ محدود في الفضاء $\mathrm{L}_{\mathrm{p}(.)}(\Gamma, w)$ أي أن :

$$\|S_\Gamma f\|_{L_{p(.)}(\Gamma,w)} \leq c\,\|f\|_{L_{p(.)}(\Gamma,w)}$$

ويكون w ينتمي إلى صف أوزان ماكنهوبت [5].

نتيجة (1):

بما أن أسرة منحنيات ديني الملساء تشكل أسرة جزئية من أسرة منحنيات كارلسون بالتالي نستنتج أن المبرهنة المساعدة محققة على أسرة منحنيات ديني الملساء.

- نثبت في المبرهنة الآتية انتماء التابع f_0 إلى الفضاء $L_{p_0(.)}$

مبرهنة (1):

ليكن Γ منحني ديني أملس بسيط عندئذ اذا كان $f \in L_{p(z)}(\Gamma)$ و $w = \varphi(z) \epsilon H^1(\Gamma)$ حيث $|\varphi'(z)| \leq B$ و $B > 1$ فإن:

$$f_0(w) = f(\Psi(w)) \in L_{p_0(w)}(\gamma)$$

الإثبات:

لدينا $f \in L_{p(z)}(\Gamma)$ أي يحقق $\int_\Gamma |f(z)|^{p(z)}|dz| < \infty$ وبما أن $w = \varphi(z)$ فإن: $dw = \varphi'(z)dz$ وبالتالي يكون:

$$\int_\gamma |f_0(w)|^{p_0(w)}|dw| = \int_\gamma |f(\Psi(w))|^{p(\Psi(w))}|dw| = \int_\Gamma |f(z)|^{p(z)}|\varphi'(z)||dz|$$

$$= \int_\Gamma |f(z)|^{p(z)}B|dz| < B < \infty$$

ومنه نجد أن : $f_0(w) = f\big(\Psi(w)\big) \in L_{p_0(w)}(\gamma)$

- المبرهنة الآتية تبين العلاقة ما بين أوزان ماكنهوبت على المنحني Γ و أوزان ماكنهوبت على المنحني γ .

مبرهنة (2):

إذا كان v من أوزان ماكنهوبت على منحني ديني الأملس Γ و $|\varphi'(z)| \leq B$ و $B > 1$ فإن : $\tilde{v}(w) = v(\Psi(w))$ من أوزان ماكنهوبت على المنحني γ .

الإثبات :

حتى تكون $\tilde{v}$ وزن ماكنيهوبت يجب أن نبرهن أن:

$$\sup_{t\epsilon\gamma}\sup_{\varepsilon>0}\Big(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\gamma(t,\varepsilon)}\big(\tilde{v}(w)\big)^p|dw|\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\gamma(t,\varepsilon)}\big(\tilde{v}(w)\big)^{-q}|dw|\Big)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

حيث $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ و $\gamma(t,\varepsilon) := (\tau \in \gamma\,;\, |\tau - t| < \varepsilon)$

لدينا :

$$\sup_{t\epsilon\gamma}\sup_{\varepsilon>0}\Big(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\gamma(t,\varepsilon)}\big(\tilde{v}(w)\big)^p|dw|\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\gamma(t,\varepsilon)}\big(\tilde{v}(w)\big)^{-q}|dw|\Big)^{\frac{1}{q}} =$$

$$\sup_{t\epsilon\Gamma}\sup_{\varepsilon>0}\Big(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma(t,\varepsilon)}\big(v(z)\big)^p|\varphi'(z)||dz|\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma(t,\varepsilon)}\big(v(z)\big)^{-q}|\varphi'(z)||dz|\Big)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \sup_{t\epsilon\Gamma}\sup_{\varepsilon>0}\Big(\frac{B}{\varepsilon}\int_{\Gamma(t,\varepsilon)}\big(v(z)\big)^p|dz|\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\frac{B}{\varepsilon}\int_{\Gamma(t,\varepsilon)}\big(v(z)\big)^{-q}|dz|\Big)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{1}{B}\Big(\sup_{t\epsilon\Gamma}\sup_{\varepsilon>0}\Big(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma(t,\varepsilon)}\big(v(z)\big)^p|dz|\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma(t,\varepsilon)}\big(v(z)\big)^{-q}|dz|\Big)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

- أما المبرهنة الآتية فتثبت انتماء الدالة $f_0(w)$ إلى صف التوابع الموزون $L_{p_0(w)}(\gamma,\check{v})$.

مبرهنة (3):

إذا كان Γ منحني ديني الأملس وكان $f \in \mathrm{L}_{p(z)}(\Gamma,\mathrm{v})$ وكان $|\varphi'(\mathrm{z})| \le \mathrm{B}$ و $\mathrm{B} > 1$ فإن :

$$f_0(w) = f\big(\Psi(w)\big) \in L_{p_0(w)}(\gamma,\check{v})$$

حيث أن : $\tilde{v}(w) = v(\Psi(w))$ و γ هي دائرة الواحدة .

الإثبات :

لدينا $f \in \mathrm{L}_{p(.)}(\Gamma,v)$ أي أن :

$$\int_\Gamma \left|\frac{f(z).v(z)}{\lambda}\right|^{p(z)} |\mathrm{dz}| < \infty$$

الآن لنأخذ :

$$\int_\gamma \left|\frac{f_0(w).\tilde{v}(w)}{\lambda}\right|^{p_0(w)} |dw| = \int_\gamma \left|\frac{f\big(\Psi(w)\big).v(\Psi(w))}{\lambda}\right|^{p(\Psi(w))} |dw|$$

$$= \int_\Gamma \left|\frac{f(z).v(z)}{\lambda}\right|^{p(z)} |\varphi'(z)|\,|\mathrm{dz}| \le \mathrm{B}\int_\Gamma \left|\frac{f(z).v(z)}{\lambda}\right|^{p(z)} |\mathrm{dz}| \le \mathrm{B} < \infty$$

ما يعني أن: $f_0 \in \mathrm{L}_{p_0(w)}(\gamma,\tilde{v})$

- فيما يلي نستنتج العلاقة بين النظيم على الفضاء $\mathrm{L}_{p(.)}(\Gamma,v)$ والنظيم على الفضاء $\mathrm{L}_{p_0(w)}(\gamma,\tilde{v})$ من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة (4):

إذا كان Γ منحني ديني أملس و$f_0 \in \mathrm{L}_{p_0(w)}(\gamma,\tilde{v})$ و $1 \le \mathrm{p}^- < p(z) < \mathrm{p}^+ < \infty$ وليكن $B > 1$ بحيث $|\Psi'(w)| \le B$ عندئذ :

$$\|f\|_{\mathrm{L}_{p(.)}(\Gamma,v)} \le \mathrm{B}\,\|f_0\|_{\mathrm{L}_{p_0(w)}(\gamma,\tilde{v})}$$

الإثبات: ليكن $f_0 \in \mathrm{L}_{p_0(w)}(\gamma,\tilde{v})$ عندئذ بحسب تعريف النظيم نجد :

$$\int_\gamma \left|\frac{f_0(w).\,\tilde{v}(w)}{\|f_0\|_{\mathrm{L}_{p_0(.)}}}\right|^{p_0(w)} |\mathrm{dw}| < 1$$

ومنه لدينا :

$$\int_\Gamma \left|\frac{f(z).v(z)}{B.\|f_0\|_{\mathrm{L}_{p_0(.)}}}\right|^{p(z)} |\mathrm{dz}| = \int_\Gamma \left|\frac{f\big(\Psi(w)\big).v(\Psi(w))}{B.\|f_0\|_{\mathrm{L}_{p_0(.)}}}\right|^{p(\Psi(w))} .|\Psi'(w)||dw|$$

$$= \int_\gamma \frac{1}{\mathrm{B}^{p(z)}}\left|\frac{f_0(w).\tilde{v}(w)}{\|f_0\|_{\mathrm{L}_{p_0(.)}}}\right|^{p_0(w)} .|\Psi'(w)||dw| \le \frac{1}{\mathrm{B}^{p-}}\int_\gamma \left|\frac{f_0(w).\tilde{v}(w)}{\|f_0\|_{\mathrm{L}_{p_0(.)}}}\right|^{p_0(w)} \mathrm{B}\,|dw|$$

$$\le \frac{1}{\mathrm{B}^{p-}}\int_\gamma \left|\frac{f_0(w).\tilde{v}(w)}{\|f_0\|_{\mathrm{L}_{p_0(.)}}}\right|^{p_0(w)} \mathrm{B}^{p-}\,|dw| = \int_\gamma \left|\frac{f_0(w).\tilde{v}(w)}{\|f_0\|_{\mathrm{L}_{p_0(.)}}}\right|^{p_0(w)} |dw| \le 1$$

$$\Leftarrow \int_\gamma \left|\frac{f(z).v(z)}{B.\|f_0\|_{\mathrm{L}_{p_0(.)}}}\right|^{p(z)} |\mathrm{dz}| \le 1$$

ومنه بحسب تعريف النظيم في $\mathrm{L}_{p(.)}(\Gamma,v)$ نجد :

$$\|f\|_{\mathrm{L}_{p(.)}(\Gamma,v)} \le \mathrm{B}\,\|f_0\|_{\mathrm{L}_{p_0(w)}(\gamma,\tilde{v})}$$

- تعطي المبرهنة الآتية العلاقة بين تكامل كوشي الشاذ للتابع f_0 مع تكامل كوشي الشاذ للتابع f في فضاء ليبيغ المعمم الموزون .

مبرهنة (5):

ليكن $1 \le p^- < p(z) < p^+ < \infty$ حيث : $|\varphi'(z)| \le A$ بحيث $A > 1$ و $f \in L_{p(z)}(\Gamma, v)$

فإن : $\|S_\gamma f_0\|_{L_{p_0(w)}(\gamma,\tilde v)} \le A \|S_\Gamma f\|_{L_{p(z)}(\Gamma,v)}$

الإثبات :

بحسب تعريف النظيم في $L_{p(.)}(\Gamma, v)$ نجد أن :

$$\int_\Gamma \left|\frac{S_\Gamma f(z).v(z)}{\|S_\Gamma f\|_{L_{p(.)}}}\right|^{p(z)} |dz| \le 1$$

الآن :

$$\int_\gamma \left|\frac{S_\gamma f_0(w).\tilde v(w)}{A.\|S_\Gamma f\|_{L_{p(.)}}}\right|^{p_0(w)} |dw| = \int_\gamma \left|\frac{S_\gamma f(\Psi(w)).v(\Psi(w))}{A.\|S_\Gamma f\|_{L_{p(.)}}}\right|^{p(\Psi(w))} |dw|$$

$$= \int_\Gamma \left|\frac{S_\Gamma f(z).v(z)}{A.\|S_\Gamma f\|_{L_{p(.)}}}\right|^{p(z)} |\varphi'(z)|\,|dz| = \int_\Gamma \frac{1}{A^{p(z)}}\left|\frac{S_\Gamma f(z).v(z)}{\|S_\Gamma f\|_{L_{p(.)}}}\right|^{p(z)} |\varphi'(z)|\,|dz|$$

$$\le \frac{1}{A^{p-}}\int_\Gamma \left|\frac{S_\Gamma f(z).v(z)}{\|S_\Gamma f\|_{L_{p(.)}}}\right|^{p(z)} A.|dz| \le \frac{1}{A^{p-}}\int_\Gamma \left|\frac{S_\Gamma f(z).v(z)}{\|S_\Gamma f\|_{L_{p(.)}}}\right|^{p(z)} A^{p-}.|dz|$$

$$= \int_\Gamma \left|\frac{S_\Gamma f(z).v(z)}{\|S_\Gamma f\|_{L_{p(.)}}}\right|^{p(z)} |dz| \le 1$$

عندئذ نجد:

$$\int_\gamma \left|\frac{S_\gamma f_0(w).\tilde v(w)}{\|S_\Gamma f\|_{L_{p(.)}}}\right|^{p_0(w)} |dw| \le 1$$

ومنه يتحقق لدينا حسب تعريف النظيم في $L_{p_0(w)}(\gamma,\tilde v)$ أن :

$$\|S_\gamma f_0\|_{L_{p_0(w)}(\gamma,\tilde v)} \le A\,\|S_\Gamma f\|_{L_{p(z)}(\Gamma,v)}$$

مبرهنة (6):

إذا كان $f \in L_{p(z)}(\Gamma, v)$ و $\varphi(z) \in H^1(z)$ حيث : $|\varphi'(z)| \le A$ بحيث أن $A > 1$ و Γ ينتمي إلى أسرة منحنيات ديني الملساء فإن :

$$\|S_\gamma f_0\|_{L_{p_0(.)}(\gamma,\tilde v)} \le k\,\|f_0\|_{L_{p_0(.)}(\gamma,\tilde v)}$$

الإثبات :

لدينا من المبرهنة (5) أن :

$$\|S_\gamma f_0\|_{L_{p_0(.)}(\gamma,\tilde v)} \le A\,\|S_\Gamma f\|_{L_{p(.)}(\Gamma,v)}$$

ومن المبرهنة المساعدة لدينا :

$$\|S_\Gamma f\|_{L_{p(.)}(\Gamma,v)} \le C\,\|f\|_{L_{p(.)}(\Gamma,v)}$$

ومن المبرهنة (4) أن :

$$\|f\|_{L_{p(.)}(\Gamma,v)} \le B\,\|f_0\|_{L_{p_0(.)}(\gamma,\tilde v)}$$

ومن هذه المبرهنات نستطيع أن نستنتج أن :

$$\left\|S_{\gamma}f_0\right\|_{L_{p_0(.)}(\gamma,\tilde{v})} \leq k\left\|f_0\right\|_{L_{p_0(.)}(\gamma,\tilde{v})}$$

حيث أن : $k = A.C.B$

الاستنتاجات والتوصيات :

توصلنا في هذا البحث إلى بعض النتائج التي تخص محدودية مؤثر تكامل كوشي الشاذ على صف تابعي متفرع عن فضاء ليبيغ المعمم على أسرة منحنيات ديني الملساء.

ونوصي بأن تتم الدراسة على صفوف تابعية أخرى مثل أورليتش وأورليتش المعمم وفضاءات موري وغيرها على أسر منحنيات أخرى مثل أسرة منحنيات ريس.

المراجع :

[1] Abreu blaya,D. reyes,J,b. Kats ,b. (2014).*Cauchy integral and singular integral operator over closed Jordan curves,. S*pringer-Verlag Wien.

[2] Böttcher.A; Karlovich.a.Y. (1997). *Carleson Curves, Muckenhoupt Weights, and Toeplitz Operators. Springer Basel AG*, Washington D.C, 407.

[3] Cardona,D., Ruzhansky, M.(2022). weak (1,1) *continuity and* L^p*-theory for oscillating singular integral operators, arXiv:*2201.12881v1 [math.FA] 30 Jan.

[4] Israfilov. D. Testici.A.(2018*),Multiplier and approximation theorems in Smirnov classes with variable exponent*. Turk.J.Math.42.1442-1456.

[5] Karlovich, A. Yu. and Spitkovsky,I. M. (2014). *The Cauchy Singular Integral Operator on Weighted Variable Lebesgue Space*s, operator theory : Advances and Applications . Vol.236,275-291.

[6] Karlovich.A.Yu.(2009). *Singular Integral Operators on Variable Lebesgue Spaces* With Radial osciiating Weights operator theory:Advances Application ,Vol.195.185-212.

[7] Karlovich,A. Yu. (2018). *THE Coburn-Simonenko Theorem For Toeplitz Operators Acting Between Hardy Type Subspaces Of Different Banach Function Spaces.* Mediterr.J.Math.15:19.

[8] Kokilashvili,V., Paatashvili, V. and Samko,S., (2006*). Boundedness in Lebesgue Spaces with Variable Exponent of the Cauchy Singular Operator on Carleson Curves .Operator theory Advances and Applications,* Vol. 170, 167–186.

[9] Wang,Y. and Du,J.(2024*). Boundedness of Cauchy singular integral operator under Holder norm. Z.* Anal. Anwend,Vol.43.PP. 209–235**.**

[10] Zheng,T. Xing,X. (2020). *theorem for the generalized singular integral operator on product Lipschitz spaces with para-accretive function*s,New York. J.Math.26 1028-1063.

[11] علي.محمد، خليفة.حسن و متوج.كوثر. (2023) . *دراسة محدودية مؤثر تكامل كوشي الشاذ في فضاء موري مع الوسيط(t)* $L^{p,\varphi,t}$. مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية –سلسلة العلوم الأساسية المجلد (45) العدد (1).