مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٨) العدد (٣) ٢٠٢٤

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (8) No. (3) 2024

تقريب دوال فضاء موري $L_{p,\lambda}$ على مجموعات مختلفة في المستوى العقدي

د. محمد علي*

د. أحمد كنج **

علي المحمد***

(تاريخ الإيداع ٢٠/٣/ ٢٠٢٤ – تاريخ النشر ٢٣/٧/ ٢٠٢٤)

□ ملخّص □

درسنا في هذا البحث المسألة المباشرة في نظرية التقريب للدوال العقدية من دوال فضاء موري $L_{p,\lambda}(\Gamma)$ حيث $0 < \lambda \leq 1$ و $1 < p < \infty$ المعرفة على أسرة منحنيات ديني الملساء بالمجاميع الجزئية لمتسلسلة فابير_ لورنت، ولتقدير الفروق بين الدالة وتقريباتها استخدمنا معامل الملوسة من المرتبة r الذي عُرف من قبل الباحث Aykol و آخرون عام ٢٠١٩، وعلاوة على ذلك توصلنا إلى تقريب دوال فضاء موري سيميرنوف $E_{p,\lambda}(G)$ المعرفة على منطقة G بسيطة الترابط في المستوى العقدي محاطة بمنحنٍ Γ ينتمي إلى أسرة منحنيات ديني ـ الملساء بالمجاميع الجزئية لمتسلسلة فابير.

الكلمات المفتاحية: نظرية التقريب، فضاء موري، معامل الملوسة، منحنيات ديني الملساء، كثيرات حدود فابير، متسلسلة فابير– لورنت.

*أستاذ–قسم الرياضيات–كلية العلوم–جامعة تشرين– اللاذقية–سورية.

**مدرس–قسم الرياضيات–كلية العلوم–جامعة تشرين– اللاذقية–سورية , a.kinj@tishren.edu.sy .

*** طالب دراسات عليا (ماجستير)–قسم الرياضيات–كلية العلوم–جامعة تشرين– اللاذقية–سورية.

مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٨) العدد (٣) ٢٠٢٤

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (8) No. (3) 2024

Approximation of functions of Morrey space $L_{p,\lambda}$ on different sets in the complex plane

Dr. Mohammad Ali*
Dr. Ahmed Kinj **
Ali AL Mohammad***

(Received 20/3/2024.Accepted 23/7/2024)

□ABSTRACT □

In this research, we have studied the direct problem of approximation theory of complex functions from Morrey spaces $L_{p,\lambda}(\Gamma)\ ;1 < p < \infty, 0 < \lambda \leq 1$, defined on Dini-smooth curve Γ, using partial sums of the Faber-Laurent series. To estimate the difference between the function and its approximation, we used the modulus of smoothness of the order r, which was defined by Aykol et al. in 2019. Moreover, we have obtained approximation of functions of Morrey-Smirnov spaces defined on a simply connected domain G in the complex plane bounded by a curve Γ belonging to the class of Dini smooth curves by the partial sums of the Faber series.

Keywords: Approximation Theory, Morrey spaces, Modulus of smoothness, Dini-smooth curves, Faber polynomials, Faber-Laurent series.

***Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
****Assistant Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria,** a.kinj@tishren.edu.sy.
*****Postgraduate student, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria**

مقدمة:

تندرج نظرية التقريب ضمن إحدى الموضوعات الرئيسية للتحليل الدالي، وقد اهتمت هذه النظرية بشكل رئيسي باستبدال الدوال الصعبة بدوال رياضية يسهل التعامل معها ضمن فروق بسيطة مسيطر عليها. ظهرت نظرية التقريب في البداية من أجل الدوال القابلة للاشتقاق في جوار نقطة ما والتي يمكن بحسب نظرية تايلور نشرها في متسلسلة قوى تتقارب إلى هذه الدالة. قام Chebyshevعام ١٨٥٥ في دراسة تقريب الدوال المستمرة على مجال مغلق ومحدود بكثيرات حدود. في عام ١٩٥٠ توصل الباحث Mergelyan إلى تقريب الدوال العقدية التحليلية في منطقة ما G والمستمرة على محيطها بكثيرات حدود. في الآونة الأخيرة اهتم العديد من الباحثين في تقريب الدوال في بعض الفضاءات الدالية الشهيرة، ففي عام ٢٠٠٨ [1] درس Israfilov و Tozmanتقريب دوال فضاء موري المعرفة على منطقة بسيطة الترابط ومحاطة بمنحنٍ ديني أملس بالمجاميع الجزئية لمتسلسلة فابير. تابع الدكتور محمد علي وآخرون العمل بتقريب دوال فضاء موري المعرفة على منحني ديني أملس عام ٢٠١٦ في[2] وتقريب دوال فضاء موري المعرفة على منطقة ثنائية الترابط ومحاطة بمنحنيين أملسين عام ٢٠١٨ [3]. كما درس الباحث Javarov عام ٢٠٢١ في [4] تقريب دوال فضاء سميرنوف موري ذي الأس المتغير المعرفة على منحنٍ ديني أملس. وتابع الدكتور أحمد كنج عام ٢٠٢١ [5]هذا العمل بتقريب دوال فضاء سميرنوف موري ذي الأس المتغير المعرفة على منطقة ثنائية الترابط ومحاطة بمنحنيين أملسين بدوال كسرية. في عام2019 عرف Aykol وآخرون في [6] معامل ملوسة جديد من المرتبة r لتقدير الفرق بين دالة وتقريبها ودرسوا أهم خواصه وتوصلوا إلى أن هذا المعامل صغير يسعى إلى الصفر بما فيه الكفاية وبناءً عليه تمكنوا من دراسة تقريب دوال فضاء موري المعرفة على دائرة الواحدة أو على المجال $[0,2\pi]$ بكثيرات حدود مثلثية. قمنا في هذا العمل بالاستفادة من معامل الملوسة الذي تم تعريفه في المرجع [6] في دراسة تقريب دوال فضاء موري المعرفة على منحنٍ ديني _ أملس بالمجاميع الجزئية لمتسلسلة فابير لورنت وتوصلنا أيضاً إلى تقريب دوال فضاء موري سميرنوف المعرفة على منطقة بسيطة الترابط ومحاطة بمنحني ديني ـ أملس.

أهمية البحث وأهدافه:

تكمن أهمية هذا البحث في تقريب الدوال العقدية، من خلال إيجاد دوال كسرية قريبة منها بدرجة كافية واستبدالها بها، ولذلك يتجلى الهدف الرئيسي لهذا البحث في دراسة المسألة المباشرة في تقريب دوال فضاء موري المعرفة على منحنيٍ ديني أملس بدوال كسرية متعلقة بالمجاميع الجزئيّة لمتسلسلات فابيرـ لورنت.

طرائق البحث ومواده:

يقع البحث ضمن اختصاص الرياضيات النظرية، وبشكل خاص ضمن التحليل الدالي والتحليل العقدي ونظرية تقريب الدوال، لذلك فالطرق المتبعة تعتمد بشكل رئيسي على مفاهيم التحليل العقدي، وأدبيات نظرية تقريب الدوال العقدية.

تعاريف ومفاهيم أساسية ومبرهنات مساعدة:

تعريف(1):[8]منحني ديني – أملس($Dini-smooth\ curve$)

يقال عن المنحني $\Gamma: \chi(t),\ 0 \le t \le 2\pi$ إنه منحني ديني–أملس إذا تحقق الشرط الآتي:

$$\int_0^{\pi} \frac{\omega(\chi', t)}{t} dt < \infty.$$

حيث $\omega(\chi', t)$ معامل الاستمرارية للدالة $\chi'(t)$ وكان $\chi'(t) \neq 0$.

ومن المعلوم أنه إذا كان Γ ديني–أملس فإنه يوجد ثوابت c_1, c_2, c_3, c_4 بحيث يتحقق:

$$\begin{aligned} 0 < c_1 \le |\psi'(w)| \le c_2 < \infty, \qquad |w| \ge 1 \\ 0 < c_3 \le |\varphi'(z)| \le c_4 < \infty, \qquad z \in G^- \end{aligned} \tag{1}$$

تعريف(2):[13] التحويل المحافظ (Conformal mapping)

لتكن G و'G منطقتين في المستوي العقدي و $f: G \to G'$ تقابلاً، يُقال عن f إنَّه تحويلٌ محافظٌ للمنطقة G في المنطقة 'G **إذا** كان f تحليلي في المنطقة G باستثناء نقطة واحدة على الأكثر تكون فيها قطباً بسيطاً (قطباً من المرتبة الأولى) للدالة f.

- من المعلوم أنَّه إذا كان $f: G \to G'$ تحويلاً محافظاً متبايناً للمنطقة G في المنطقة 'G كان $f^{-1}: G \to G'$ تحويلاً محافظ متباين للمنطقة 'G في المنطقة G.

مبرهنة مساعدة(1):[8] ريمان في التحويلات المحافظة (Riemann Mapping Theorem)

لتكن G منطقة بسيطة الترابط في المستوي العقدي $\mathbb{C}$ متممتها تحوي أكثر من نقطة عندئذٍ يوجد تحويل محافظ متباين $w = f(z)$ ينقل المنطقة G إلى قرص الواحدة $D = \{w \in \mathbb{C}: |w| < 1\}$.

- إنَّ التحويل المحافظ الوارد في المبرهنة المساعدة ليس وحيداً. ولكي يكون وحيداً يجب أن يحقق من أجل نقطة كيفية $z_0 \in G$ الشرطين الآتيين:

$$f(z_0) = 0\ , f'(z_0) > 0.$$

من المبرهنة المساعدة نحصل على النتيجة الآتية:

نتيجة(1):[7]

ليكن Γ منحني جوردان محدود الطول في المستوي العقدي $\mathbb{C}$ و $G = int(\Gamma)$ و $G^- = ext(\Gamma)$ ولنفترض أنَّ $0 \in G$. عندئذٍ يوجد تحويل محافظ متباين وحيد $w = \varphi(z)$ ينقل المنطقة G^- إلى خارج قرص الواحدة $D^- = \{w \in \mathbb{C}: |w| > 1\}$ ويحقق:

$$\varphi(\infty) = \infty، \qquad \lim_{z\to\infty} \frac{\varphi(z)}{z} > 0\ .$$

كما يوجد تحويل محافظ متباين وحيد $w = \varphi_1(z)$ ينقل المنطقة G إلى خارج قرص الواحدة $D^- = \{w \in \mathbb{C}: |w| > 1\}$ ويحقق:

$$\varphi_1(0) = \infty، \qquad \lim_{z\to 0} z\varphi_1(z) > 0.$$

تعريف(3) [9] فضاء دوال ليبيغ (Lebesgue space)

ليكن Γ منحني جوردان محدود الطول في المستوي العقدي $\mathbb{C}$ وليكن $1 \le p < \infty$ عدداً حقيقياً. يُعرف فضاء ليبيغ $L_p(\Gamma)$ بأنه مجموعة كل الدوال العقدية $f: \Gamma \to \mathbb{C}$ التي يكون من أجلها $|f|^p$ قابلة للمكاملة على المنحني Γ أي تحقق الشرط الآتي:

$$\int_{\Gamma} |f(z)|^p \ |dz| < \infty.$$

إنَّ فضاء ليبيغ $L_p(\Gamma)$ يشكل فضاء باناخ إذا عرف عليه النظيم بالشكل الآتي:

$$\|f\|_{L_p(\Gamma)} = \left(\int_{\Gamma} |f(z)|^p \ |dz|\right)^{\frac{1}{p}}.$$

تعريف (٤) [10] فضاء دوال سميرنوف (Smirnov space)

لتكن G منطقة بسيطة الترابط في المستوي العقدي $\mathbb{C}$ ولتكن Γ_r صورة أسرة الدوائر $\gamma_r = \{w \in \mathbb{C}: |w| = r, 0 \leq r < 1\}$ وفق تحويل محافظ ينقل قرص الواحدة D إلى المنطقة G. يُرمز بـ $E_1(G)$ لأسرة جميع الدوال $f: G \to \mathbb{C}$ التحليلية في المنطقة G، والتي تحقق الشرط الآتي:

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int_{\Gamma_r} |f(z)| \, |dz| < \infty$$

يُعرف فضاء دوال سميرنوف $E_p(G)$ ، $1 \leq p < \infty$ بالعلاقة:

$$E_p(G) = \{f \in E_1(G): \ f \in L_p(\Gamma)\}$$

إن $E_p(G)$ فضاء باناخ، إذا زوّد بالنظيم $\|f\|_{E_p(G)} = \|f\|_{L_p(\Gamma)}$.

في الحالة الخاصة، التي يكون فيها $G = D$ قرص الواحدة في المستوي العقدي، فإنَّ فضاء سميرنوف $E_p(G)$ يؤول إلى فضاء هاردي $H_p(D)$.

تعريف(5) [9] فضاء دوال موري (Morrey space)

ليكن Γ منحني جوردان محدود الطول و $1 \leq p < \infty$ و $0 \leq \lambda \leq 1$. يقال عن الدالة $f: \Gamma \to C$ القابلة للمكاملة على المنحني Γ إنها تنتمي إلى فضاء دوال موري $L_{p,\lambda}(\Gamma)$ إذا وجد ثابت موجب α بحيث تتحقق من أجل أي قرص B مركزه نقطة كيفية من المنحني Γ المتراجحة الآتية:

$$\int_{\Gamma \cap B} |f(z)|^p \ |dz| \leq \alpha |\Gamma \cap \ B|^{1-\lambda}$$

حيث $|B \cap \Gamma|$ يرمز لقياس ليبيغ للمجموعة $B \cap \Gamma$.

من المعلوم أن فضاء دوال موري يشكل فضاء باناخ إذا عرف عليه النظيم بالشكل الآتي:

$$\|f\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)} = \sup_{B} \left\{ \frac{1}{|B \cap \Gamma|^{1-\lambda}} \int_{B \cap \Gamma} |f(z)|^p |dz| \right\}^{\frac{1}{p}}$$

حيث sup مأخوذ على كل الأقراص B التي مركزها نقطة من المنحني Γ ونصف قطرها r .

في الحالة الخاصة، التي يكون فيها المنحني Γ هو دائرة الواحدة، فإنَّ فضاء دوال موري $L_{p,\lambda}(\gamma_0)$ يمكن تعريفه بأنه مجموعة كل الدوال $f: \gamma_0 \to \mathbb{C}$ القابلة للمكاملة على دائرة الواحدة والتي تحقق الشرط الآتي:

$$\|f\|_{L_{p,\lambda}(\gamma_0)} = \sup_{I} \left\{ \frac{1}{|I|^{1-\lambda}} \int_{I} \left| f(e^{it}) \right|^p |dt| \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty$$

حيث sup مأخوذ على كل المجالات الجزئية I من المجال $[0,2\pi]$ ويرمز $|I|$ لطول المجال I .

ملاحظات :

عندما $\lambda = 1$ فإن فضاء موري يتطابق مع فضاء ليبيغ $L_p(\Gamma)$.

عندما $\lambda = 0$ فإن فضاء موري يتطابق مع فضاء الدوال المحدودة أساسياً $L_{\infty}(\Gamma)$.

إن فضاءات موري متداخلة طرداً من أجل قيم λ ومتداخلة عكساً من أجل قيم p أي،

إذا كان $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$ فإن: $L_{p_2,\lambda}(\Gamma) \subseteq L_{p_1,\lambda}(\Gamma)$.

إذا كان $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq 1$ فإن: $L_{p,\lambda_1}(\Gamma) \subseteq L_{p,\lambda_2}(\Gamma)$.

من الملاحظات السابقة نتوصل إلى العلاقة الآتية:[2]

$$L_{p,\lambda}(\Gamma) \subseteq L_p(\Gamma) \subseteq L_1(\Gamma). \qquad (2)$$

تعريف (٦) [1] فضاء دوال موري–سميرنوف (Morrey–Smirnov space)

لتكن G منطقة محدودة وبسيطة الترابط في المستوي العقدي محاطة بمنحني جوردان Γ محدود الطول وليكن $1 \leq p < \infty$ و $0 \leq \lambda \leq 1$. يُعرف فضاء موري–سميرنوف $E_{p,\lambda}(G)$ بالعلاقة:

$$E_{p,\lambda}(G) = \{f \in E_1(G) : f \in L_{p,\lambda}(\Gamma)\}.$$

إن فضاءدوال موري–سميرنوف بشكل فضاء باناخ إذا عرف عليه النظيم بالشكل $\|f\|_{E_{p,\lambda}(G)} = \|f\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)}$

في الحالة الخاصة التي يكون فيها $\lambda = 1$ فإن فضاء موري سميرنوف $E_{p,1}(G)$ يؤول إلى فضاء سميرنوف $E_p(G)$. ومن أجل $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq 1$ فإن:

$$E_{p,\lambda_1}(G) \subseteq E_{p,\lambda_2}(G) . \qquad (3)$$

▪ **بعض الرموز والمصطلحات المستخدمة في هذا البحث:**

- ليكن Γ منحني جوردان محدود الطول في المستوي العقدي$\mathbb{C}$. يقسم المنحني Γ المستوي العقدي إلى منطقتين إحداهما محدودة $G = int(\Gamma)$ والأخرى غير محدودة $G^- = ext(\Gamma)$. سنفترض، دون المساس بعمومية الدراسة، أن $0 \in G$ لنرمز بـ γ_0 لدائرة الواحدة في المستوي العقدي أي $\gamma_0 = \{w \in \mathbb{C}: |w| = 1\}$. لنرمز لقرص الواحدة المفتوح في المستوي العقدي بالرمز D أي، $D = \{w \in \mathbb{C}: |w| < 1\}$ كما سنرمز D^- للمنطقة الواقعة خارج دائرة الواحدة أي، $D^- = \{w \in \mathbb{C}: |w| > 1\}$.
- لنرمز بـ $w = \varphi(z)$ للدالة التي تنقل بشكل محافظ المنطقة G^- إلى خارج قرص الواحدة D^- وتحقق $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{\varphi(z)}{z} > 0$, $\varphi(\infty) = \infty$ وبالرمز بـ ψ للدالة العكسية للدالة φ.
- لنرمز بـ $\boldsymbol{w = \varphi_1(z)}$ للدالة التي تنقل بشكل محافظ المنطقة $\boldsymbol{G}$ إلى خارج قرص الواحدة $\boldsymbol{D^-}$ وتحقق الشرط $\boldsymbol{\lim\limits_{z\to 0} z\varphi_1(z) > 0}$ ،$\boldsymbol{\varphi_1(0) = \infty}$ ولنرمز بـ $\boldsymbol{\psi_1}$ للدالة العكسية للدالة $\boldsymbol{\varphi_1}$.

تعريف(7):[12] كثير حدود فابير (Faber polynomials)

لنفرض أن منشور لورنت للدالة $\varphi(z)$ في جوار اللانهاية له الشكل:

$$\varphi(z) = bz + b_0 + \frac{b_{-1}}{z} + \frac{b_{-2}}{z^2} + \cdots ; b > 0$$

من أجل أي عدد طبيعي k يكون لدينا:

$$[\varphi(z)]^k = \left[bz + b_0 + \frac{b_{-1}}{z} + \frac{b_{-2}}{z^2} + \cdots\right]^k = b^k z^k + \beta_{k-1} z^{k-1} + \cdots \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_{-n}}{z^n}$$

يُسمى $b^k z^k + \beta_{k-1} z^{k-1} + \cdots \beta_0$ كثير حدود فابير من الدرجة k ويرمز له بالرمز $F_k(z)$
أي أن كثير حدود فابير $F_k(z)$ من الدرجة k هو مجموع الحدود ذات القوى غيرالسالبة من منشور لورانت للدالة $[\varphi(z)]^k$ في جوار اللانهاية.

بالطريقة نفسها إذا نشرنا $\varphi_1(z)$ في متسلسلة لورنت بجوار الصفر بالشكل الآتي:

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + \cdots a_n z^n + \cdots$$

فإنه من أجل أي عدد طبيعي k يكون لدينا:

$$[\varphi_1(z)]^k = \left[\frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + \cdots a_n z^n + \cdots\right]^k = \frac{1}{z^k} + \frac{m_1}{z^{k-1}} + \cdots + \frac{m_{k-1}}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} m_{-n} z^n$$

يُسمى $\widetilde{F_k}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^k} + \frac{m_1}{z^{k-1}} + \cdots + \frac{m_{k-1}}{z}$ كثير حدود فابير بقوى $\frac{1}{z}$ من الدرجة k.

إن كثيرات حدود فابير يمكن تعريفها بالعلاقات الآتية: [12]

من أجل $z \in G$ فإن:

$$\frac{\psi'(w)}{\psi(w) - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k(z)}{w^{k+1}}$$

من أجل $z \in G^-$ فإن:

$$\frac{\psi_1'(w)}{\psi_1(w) - z} = \sum_{k=1}^{\infty} - \frac{\widetilde{F_k}\left(\frac{1}{z}\right)}{w^{k+1}}$$

كما أن كثيرات حدود فابير تقبل تمثيلاً تكاملياً بالشكل الآتي: [13]

$$F_k(z) = \varphi^k(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi^k(\xi)}{\xi - t} d\xi \quad , \in G^- \tag{4}$$

$$\widetilde{F_k}\left(\frac{1}{z}\right) = \varphi_1{}^k(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi_1{}^k(\xi)}{\xi - t} d\xi \quad , z \in G \setminus \{0\} \tag{5}$$

.

تعريف (8) :[2]

ليكن Γ منحني ديني – أملس و $f \in L_{p,\lambda}(\Gamma)$ حيث $1 < p < \infty, 0 < \lambda \leq 1$.نعرف الدالتين f_0, f_1 على دائرة الواحدة بالعلاقتين الآتيتين:

$$f_0(w) := (f o \psi)(w) = f(\psi(w)) \quad ; w \in D^- \tag{6}$$

$$f_1(w) := (f o \psi_1)(w) = f(\psi_1(w)); \ w \in D \tag{7}$$

بالاستفادة من العلاقة (1) فإنه يكون لدينا:

$$f_0, f_1 \in L_{p,\lambda}(\gamma_0) \ . \tag{8}$$

تعريف (٩) [14]تكامل كوشي الشاذ (Singular Cauchy's Integral)

ليكن Γ منحني جوردن محدود الطول في المستوي العقدي $\mathbb{C}$ و $f \in L_1(\Gamma)$ يعرف تكامل كوشي الشاذ للدالة f بالعلاقة:

$$S_\Gamma f(z) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma \cap \{\xi : |\xi - z| > \varepsilon\}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \qquad ; z \in \Gamma$$

إن المؤثر $S_\Gamma: L_{p,\lambda}(\Gamma) \to L_{p,\lambda}(\Gamma)$ المعرف وفق $f \to S_\Gamma(f)$ يُسمى مؤثر كوشي الشاذ.

تبين المبرهنة المساعدة الآتية أنَّ مؤثر كوشي الشاذ يكون محدوداً في فضاء دوال موري $L_{p,\lambda}(\Gamma)$.

مبرهنة مساعدة (٢):[15] ليكن Γ منحني ديني . أملس وليكن $L_{p,\lambda}(\Gamma)$ فضاء دوال موري حيث $1 < p < \infty$, و $0 < \lambda \le 1$. فإن مؤثر كوشي الشاذ $S_\Gamma: L_{p,\lambda}(\Gamma) \to L_{p,\lambda}(\Gamma)$ يكون موجوداً ومحدوداً أي، يوجد ثابت $c_5 > 0$ بحيث تحقق العلاقة الآتية:

$$\|S_\Gamma(f)\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)} \le c_5 \|f\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)} \ \forall f \in L_{p,\lambda}(\Gamma) \tag{9}$$

مبرهنة مساعدة (٣)[11] : ليكن Γ منحني جوردن محدود الطول في المستوي العقدي $\mathbb{C}$ و $f \in L_1(\Gamma)$ عندئذ تكون الدالتان $f^+: G \to \mathbb{C}$ و $f^-: G^- \to \mathbb{C}$ المعرفتين بالعلاقتين الآتيتين:

$$f^+(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - t} d\xi \ \ ;t \in G \tag{10}$$

$$f^-(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - t} d\xi \ \ ;t \in G^- \tag{11}$$

تحليليتان في G و G^- على الترتيب ويكون أيضاً $f^-(\infty) = 0$ وتحقق من أجل أي t من Γ علاقات سوخوتسكي الآتية:

$$f^+(z) = S_\Gamma f(z) + \frac{1}{2} f(z)\ , \tag{12}$$

$$f^-(z) = S_\Gamma f(z) - \frac{1}{2} f(z), \tag{13}$$

و بالإستفادة من العلاقتين (١٢) و (١٣) نجد أن:

$$f(z) = f^+(z) - f^-(z). \tag{14}$$

تعريف(10) [6] معامل الملوسة في فضاءموري(Modulus of smoothness in Morrey spaces)

لتكن γ_0 دائرة الواحدة في المستوي العقدي ومن أجل $1 < p < \infty , 0 < \lambda \le 1$ يعرف معامل الملوسة من المرتبة $r \in N$ للدالة $f \in L_{p,\lambda}(\gamma_0)$ وفق العلاقة الآتية:

$$\Omega^r(f,h) = \sup_{0<\delta\le \min\{2\pi,h\}} \left\| \frac{1}{\delta}\int_0^\delta | \Delta_t^r (f,w)| \, dt \right\|_{L_{p,\lambda}(\gamma_0)} \ ,t \ ,\delta , h > 0$$

حيث

$$\Delta_t^r(f,w) = \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} (-1)^{r+s+1} f(we^{ist}) ; \ w \in \gamma_0 \ ,t > 0 \ , s \in N$$

إن معامل الملوسة يحقق الخواص الآتية:

يوجد ثابت موجب c بحيث تكون المتراجحة الآتية محققة:

$$\Omega^r(f,h) \le c\|f\|_{L_{p,\lambda}(\gamma_0)}$$

من أجل $g,f \in L_{p,\lambda}(\gamma_0)$ فإن:

$$\Omega^r(f+ g ,h) \le \Omega^r(f,h) + \Omega^r(g ,h), \qquad h > 0$$

إن معامل الملوسة هو معامل جيد لتقدير الفرق فهو يسعى إلى الصفر عندما h تسعى إلى الصفر إي،

$$\lim_{h\to 0}\Omega^r(f,h)=0$$

من أجل اي عدد طبيعي n يكون لدينا:

$$\Omega^r(f,n\,h)\le n^r\,\Omega^r(f,h)\ ,n\in N$$

من أجل أي عدد حقيقي موجب η يكون لدينا:

$$\Omega^r(f,\eta\,h)\le(\eta+1)^r\,\Omega^r(f,h)$$

بالاستفادة من العلاقتين الأخيرتين نجد أنه أياً يكن $h>0, n\in N$ فإن:

$$\Omega^r(f,h)\le\left((n+1)h+1\right)^r\Omega^r\left(f,\frac{1}{n+1}\right).$$

<u>**مبرهنة مساعدة (4) [6] :**</u> لتكن g دالة تحليلية في قرص الواحدة D وتحقق أنَّ $g\in E_{p,\lambda}(D)$ حيث $1<p<\infty, 0<\lambda\le 1$ ، وليكن $\sum_{k=0}^{n}a_k w^k$ المجموع الجزئي من الدرجة n لمتسلسلة ماك لوران للدالة g عندئذٍ من أجل عدد طبيعي r يوجد ثابت موجب c_6 بحيث يكون التقدير الآتي محققاً:

$$\left\|g(w)-\sum_{k=0}^{n}a_k w^k\right\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)}\le c_6\,\Omega^r\left(g,\frac{1}{n}\right);n=1,2,3\ldots \qquad (15)$$

النتائج والمناقشة:

- لتكن f دالة تنتمي لفضاء دوال موري $L_{p,\lambda}(\Gamma)$ عندئذٍ بالاستفادة من المبرهنة المساعدة (3) يكون لدينا:

$$f(z)=f^+(z)-f^-(z)$$

الأمر الذي يعني أنه لنشر الدالة f يكفي نشر كل من الدالتين f^- و f^+

من أجل كل $z\in G$ يكون لدينا:

$$f^+(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$$

بإجراء التحويل $\xi=\psi(w)$ نجد أن:

$$f^+(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0}\frac{f(\psi(w))\psi'(w)}{\psi(w)-z}dw$$

ولما كان $\frac{\psi'(w)}{\psi(w)-z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{F_k(z)}{w^{k+1}}$ فإن:

$$f^+(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0}\frac{f(\psi(w))}{w^{k+1}}dw\right]F_k(z)$$

وبوضع $a_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0}\frac{f(\psi(w))}{w^{k+1}}dw$ نجد أن:

$$f^+(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k F_k(z)$$

الآن عندما $z\in G^-$ فإن:

$$f^-(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$$

بإجراء التحويل $\xi = \psi_1(w)$ نجد أن:

$$f^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0} \frac{f(\psi_1(w))\psi_1'(w)}{\psi_1(w) - z} dw$$

ولما كان $\frac{\psi_1'(w)}{\psi_1(w)-z} = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{\tilde{F}_k\left(\frac{1}{z}\right)}{w^{k+1}}$ فإن:

$$f^-(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0} \frac{f(\psi_1(w))}{w^{k+1}} dw\right]\tilde{F}_k\left(\frac{1}{z}\right)$$

بتعويض $\tilde{a}_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0} \frac{f(\psi_1(w))}{w^{k+1}} dw$ نجد أن:

$$f^-(z) = -\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k \tilde{F}_k\left(\frac{1}{z}\right)$$

بالتعويض بالعلاقة (14) يكون لدينا:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k F_k(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k \tilde{F}_k\left(\frac{1}{z}\right) \quad ; z \in \Gamma$$

بأخذ المجموع الجزئي من متسلسلة فابير لورنت للدالة f نحصل على الدالة الكسرية:

$$R_n(f,z) = \sum_{k=0}^{n} a_k F_k(z) + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{a_k}\widetilde{F_K}\left(\frac{1}{z}\right).$$

مبرهنة(1): ليكن Γ منحني ديني – أملس، f دالة من فضاء دوال موري $L_{p,\lambda}(\Gamma)$، حيث $1 < p < \infty$، $0 < \lambda \leq 1$ عندئذٍ الدالة f^+ يمكن تقريبها بكثير حدود $p_n(f,z) = \sum_{k=0}^{n} a_k F_k(z)$ بحيث تتحقق المتراجحة الآتية:

$$\|f^+(z) - p_n(z)\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)} \leq c_7 \Omega^r\left(f_0^+, \frac{1}{n}\right)$$

حيث $\Omega^r\left(f_0^+, \frac{1}{n}\right)$ يسعى إلى الصفر عندما n تسعى إلى اللانهاية.

البرهان: ليكن $f \in L_{p,\lambda}(\Gamma)$ عندئذ من(8) ينتج أن $f_0 \in L_{p,\lambda}(\gamma_0)$ الأمر الذي يعني أنّ: $f_0 \in L_1(\gamma_0)$ وبالاستفادة من المبرهنة المساعدة (3) يكون لدينا:

$$f_0(w) = f_0^+(w) - f_0^-(w) . \tag{16}$$

بالاستفادة من العلاقة (6) بإجراء التحويل $z = \psi(w)$ في العلاقة (16) نحصل على أن:

$$f(z) = f_0^+(\varphi(z)) - f_0^-(\varphi(z)) . \tag{17}$$

وبأسلوب مماثل لما ورد في المبرهنة (1) في المرجع $[16]$ نجد أنَّ:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k F_k(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(z) + S_\Gamma\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(z) - f_0^+\left(\varphi^k(z)\right)\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^k(z) - f_0^+\left(\varphi^k(z)\right)\right] - f_0^-\left(\varphi(z)\right) + f^-(z). \tag{18}$$

من العلاقة (18) وبالاستفادة من العلاقتين(12) و(17) نجد أنَّ:

$$f^{+}(z)-\sum_{k=0}^{n}a_k\,F_k(z)=\frac{1}{2}\left(f_0^{+}\left(\varphi^k(z)\right)-\sum_{k=0}^{n}a_k\,\varphi^k(z)\right)$$
$$+S_\Gamma\left(f_0^{+}\left(\varphi^k(z)\right)-\sum_{k=0}^{n}a_k\,\varphi^k(z)\right).$$

وبأخذ النظيم لطرفي العلاقة نجد أن:

$$\left\|f^{+}(z)-\sum_{k=0}^{n}a_k\,F_k(z)\right\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)}\le\frac{1}{2}\left\|f_0^{+}\left(\varphi^k(z)\right)-\sum_{k=0}^{n}a_k\,\varphi^k(z)\right\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)}$$
$$+\left\|S_\Gamma\left(f_0^{+}\left(\varphi^k(z)\right)-\textstyle\sum_{k=0}^{n}a_k\,\varphi^k(z)\right)\right\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)}.$$

وبالاستفادة من محدودية مؤثر كوشي الشاذ في المبرهنة المساعدة (2) يكون لدينا:

$$\left\|f^{+}(z)-\sum_{k=0}^{n}a_k\,F_k(z)\right\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)}\le\left(c_5+\frac{1}{2}\right)\left\|f_0^{+}\left(\varphi^k(z)\right)-\sum_{k=0}^{n}a_k\,\varphi^k(z)\right\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)}.$$

وبإجراء التحويل $w=\varphi(z)$على الطرف الأيمن للمتراجحة الأخيرة نجد أنَّ:

$$\left\|f^{+}(z)-\sum_{k=0}^{n}a_k\,F_k(z)\right\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)}\le\left(c_5+\frac{1}{2}\right)\left\|f_0^{+}(w)-\sum_{k=0}^{n}a_k\,w^k\right\|_{L_{p,\lambda}(\gamma_0)}.$$

وبالاستفادة من المبرهنة المساعدة(4) نحصل على:

$$\left\|f^{+}(z)-\sum_{k=0}^{n}a_k\,F_k(z)\right\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)}\le c_6\left(c_5+\frac{1}{2}\right)\Omega^r\left(f_0^{+},\frac{1}{n}\right).$$

وبوضع $c_7=c_6\left(c_5+\frac{1}{2}\right)$ نحصل على المتراجحة:

$$\|f^{+}-p_n(f,.)\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)}\le c_7\,\Omega^r\left(f_0^{+},\frac{1}{n}\right).$$

وبذلك نكون قد توصلنا إلى تقريب الدالةf^{+} بالمجاميع الجزئية لمتسلسلة فابير للدالة f .

مبرهنة (٢): ليكن Γ منحني ديني – أملس، f دالة من فضاء دوال موري $L_{p,\lambda}(\Gamma)$، حيث, $1<p<\infty$ $0<\lambda\le1$ عندئذٍ الدالة f^{-} يمكن تقريبها بكثير حدود $Q_n\left(f,\frac{1}{z}\right)=-\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\widetilde{F_K}\left(\frac{1}{z}\right)$ بحيث تتحقق المتراجحة الآتية:

$$\left\|f^{-}(z)-Q_n\left(f,\frac{1}{z}\right)\right\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)}\le c_{10}\Omega^r\left(f_1^{+},\frac{1}{n}\right).$$

حيث $\Omega^r\left(f_1^{+},\frac{1}{n}\right)$ يسعى إلى الصفر عندما n تسعى إلى اللانهاية.

البرهان: ليكن $f\in L_{p,\lambda}(\Gamma)$ عندئذ من (٨) ينتج أن $f_1\in L_{p,\lambda}(\gamma_0)$ الأمر الذي يعني أنَّ $f_1\in L_1(\gamma_0)$

وبالاستفادة من المبرهنة المساعدة (3) يكون لدينا:

$$f_1(w)=f_1^{+}(w)-f_1^{-}(w)\qquad(21)$$

بالاستفادة من العلاقة (٧) بإجراء التحويل $z=\psi_1(w)$ في العلاقة (٢١) نحصل على أن:

$$f_1(z)=f_1^{+}(\varphi_1(z))-f_1^{-}(\varphi_1(z)) \tag{22}$$

وبأسلوب مماثل لما ورد في المبرهنة (1) في المرجع [16] نجد أنَّ:

$$\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\widetilde{F_K}(\frac{1}{Z})=\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\,\varphi_1^k(z)+S_\Gamma\left(\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\,\varphi_1^k(z)-f_0^{+}(\varphi(z))\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\,\varphi_1^k(z)-f_1^{+}(\varphi_1(z))\right]-f_1^{-}(\varphi_1(Z))-f^{+}(z). \tag{23}$$

من العلاقة (23) وبالاستفادة من العلاقتين (13) و(٢٢) نجد أنَّ:

$$f^{-}(z)+\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\widetilde{F_K}(\frac{1}{Z})=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\,\varphi_1^k(Z)-f_1^{+}(\varphi_1(Z))\right)$$
$$-S_\Gamma\left(\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\,\varphi_1^k(Z)-f_1^{+}(\varphi_1(Z))\right).$$

وبأخذ النظيم لطرفي العلاقة الأخيرة نجد أن:

$$\left\|f^{-}(z)+\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\widetilde{F_K}\left(\frac{1}{z}\right)\right\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)}\le\frac{1}{2}\left\|\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\,\varphi_1^k(z)-f_1^{+}(\varphi_1(z))\right\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)}$$
$$+\left\|S_\Gamma\left(\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\,\varphi_1^k(z)-f_1^{+}(\varphi_1(z))\right)\right\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)}$$

وبالاستفادة من محدودية تكامل كوشي الشاذ في المبرهنة المساعدة(1) يكون لدينا:

$$\left\|f^{-}(z)+\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\widetilde{F_K}(\frac{1}{z})\right\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)}\le\left(c_8+\frac{1}{2}\right)\left\|\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\,\varphi_1^k(Z)-f_1^{+}(\varphi_1(z))\right\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)}.$$

وبإجراء التحويل $w=\varphi_1(Z)$ على الطرف الأيمن للمتراجحة الأخيرة نجد أنَّ:

$$\left\|f^{-}(z)+\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\widetilde{F_K}(\frac{1}{z})\right\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)}\le c_9\left(c_8+\frac{1}{2}\right)\left\|f_1^{+}(w)-\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\,w^k\right\|_{L_{p,\lambda}(\gamma_0)}.$$

وبالاستفادة من المبرهنة المساعدة (4) وبوضع $Q_n\left(f,\frac{1}{z}\right)=-\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\widetilde{F_K}(\frac{1}{z})$ و $c_{10}=c_9(c_8+\frac{1}{2})$

نحصل على:

$$\left\|f^{-}-Q_n\left(f,\frac{1}{z}\right)\right\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)}\le c_{10}\Omega^r\left(f_1^{+},\frac{1}{n}\right).$$

وبذلك نكون قد توصلنا إلى تقريب الدالة f^{-} بالمجاميع الجزئية لمتسلسلة فابير للدالة f .

مبرهنة (٣): ليكن Γ منحني ديني ـ أملساً و f دالة من فضاء دوال موري $L_{p,\lambda}(\Gamma)$، حيث $1<p<\infty$ ، $0<\lambda\le 1$, عندئذٍ يمكن تقريب الدالة f بدالة كسرية

$R_n(f,z)=\sum_{k=0}^{n}a_k\,F_k(z)+\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\widetilde{F_K}\left(\frac{1}{z}\right)$ بحيث يكون التقدير الآتي محققاً:

$$\|f(z)-R_n(f,z)\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)}\le c_{11}\left[\Omega^r\left(f_0^{+},\frac{1}{n}\right)+\Omega^r\left(f_1^{+},\frac{1}{n}\right)\right].$$

البرهان: بوضع

$$R_n(f,z)=\sum_{k=0}^{n} a_k\,F_k(z)+\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a_k}\widetilde{F_K}\left(\frac{1}{Z}\right)=p_n(f\,,z\,)-Q_n\left(f,\frac{1}{z}\right)$$

باستخدام العلاقة $f(z)=f^{+}(z)-f^{-}(z)$ من المبرهنتين (1) و (2) نجد أنَّ:

$$\|f(z)-R_n(f,z)\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)}\le\|f^{+}(z)-p_n(f,z)\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)}+\left\|f^{-}(z)-Q_n\left(f\,,\frac{1}{z}\right)\right\|_{L_{p,\lambda}(\Gamma)}.$$

$$\le c_7\Omega^r\left(f_0^{+},\frac{1}{n}\right)+c_{10}\Omega^r\left(f_1^{+},\frac{1}{n}\right).$$

$$\le c_{11}\left(\Omega^r\left(f_0^{+},\frac{1}{n}\right)+\Omega^r\left(f_1^{+},\frac{1}{n}\right)\right).$$

حيث $c_{11}=max\{c_7,c_{10}\}$

وبذلك نكون قد توصلنا إلى تقريب أي دالة f من فضاء دوال موري المعرفة على منحني ديني ـ أملس بالمجاميع الجزئية لمتسلسلة فابير ــ لورنت.

مبرهنة(4): لتكن G منطقة بسيطة الترابط في المستوي العقدي محاطة بمنحني ديني ـ أملس Γ ولتكن f دالة من فضاء دوال سميرنوف موري $E_{p,\lambda}(G)$ حيث $1<p<\infty\,,0<\lambda\le 1$ عندئذٍ يمكن تقريب الدالة f بالمجاميع الجزئية لمتسلسلة فابير للدالة f بحيث يكون التقدير الآتي محقق:

$$\left\|f(z)-\sum_{k=0}^{n}a_k\,F_k(z)\right\|_{E_{p,\lambda}(G)}\le c_{11}\Omega^r\left(f_0^{+},\frac{1}{n}\right).$$

البرهان: بما أن $f\in E_{p,\lambda}(G)$ فإن الدالة f تحليلية في المنطقة G فإنه أياً كانت $z\in G$ يكون لدينا:

$$f^{+}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi\ \ =f(z)$$

و $f^{-}(z)=0$ وبالاستفادة من المبرهنة (3) نجد أن:

$$\left\|f(z)-\sum_{k=0}^{n}a_k\,F_k(z)\right\|_{E_{p,\lambda}(G)}\le c_{11}\Omega^r\left(f_0^{+},\frac{1}{n}\right).$$

وبذلك نكون قد توصلنا إلى تقريب دوال فضاء سميرنوف موري المعرفة على منطقة بسيطة الترابط في المستوي العقدي والمحاطة بمنحني ديني ـ أملس بالمجاميع الجزئية لمتسلسلة فابير.

الاستنتاجات والتوصيات:

توصلنا في هذا المقال إلى تقريب دوال فضاء موري المعرفة على منحني ديني ـ أملس بالمجاميع الجزئية لمتسلسلة فابير لورنت باستخدام معامل ملوسة من المرتبة r وعلاوة على ذلك توصلنا إلى تقريب دوال فضاء موري سيمرنوف المعرف على منطقة بسيطة الترابط في المستوي العقدي ومحاطة بمنحني ديني – أملس بكثيرات حدود كما نوصي بمتابعة هذا العمل بدراسة تقريب دوال فضاء موري الموزونة على منطقة بسيطة الترابط بكثيرات حدود.

References

[1] ISRAFILOV, D, M; TOZMAN, N, P. 2008, *Approximation by polynomials in Morrey- Smirnov classes*. *East J, Approx*, vol.14, No.3, pp. 255-269.

[2] KINJ, A; ALI, M; MAHMOUD, S. 2016, *Approximation of Complex Functions from Morrey space on Dini smooth Curves*. *Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series*, vol. 38, no. 4, pp.61-73.

[3] KINJ, A. 2018, *Approximation by Rational Functions in Morrey-Smirnov classes*. *Kuwait Journal of Science*, vol. 45, no. 2, pp. 1-7.

[4] JAFAROV, S. 2021, *Approximation by Faber-Laurent rational functions in variable exponent Morrey spaces. Computational Methods and Function*, vol.22, no.4, pp. 629-643.

[5] KINJ, A. 2021, *Approximation by Rational Functions in Variable Exponent Morrey–Smirnov Classes*. *Journal of Mathematics*, Voll. 2022, pp. 1-7.

[6] CAKIR, Z; AYKOL, C; SOYLEMEZ, D; SERBETCI, A. 2019, *Approximation by trigonometric polynomials in Morrey spaces*. *Trans Natl Acad Sci, Azerb*, vol. 39, no.1, pp. 24–37.

[7] DZJADYK, V. 1977, *Introduction to the Theory of Uniform Approximation of Functions by Polynomials*. Nauka, Moscow.

[8] POMMERENKE, C. 1992, *Boundary behavior of conformal maps*. *Springer, Verlage*.

[9] KUFNER, A; JOHN, O; FUCIK, S. 2012, *Functions Spaces*. *Leyden, The Netherland, Walter de Gruyter*, pp. 494.

[10] ISRAFILOV, D; TESTICI, A. 2015, *Approximation in Smirnov classes with variable exponent*. *Complex Variables and Elliptic Equations*, vol. 60, No.9, pp . 1243-1253.

[11] GOLUZIN, G. 1969, *Geometric theory of functions of a complex variable*. 26 ed, *Providence, Rhode Island Translations of Mathematical Monographs. 2G, AMS*.

[12] SUETIN, P. 1998, *Series of Faber Polynomials. Amsterdam, Cordon and Breach Publishers*. pp. 320.

[13] MARKUSHEVICH, I, A. 1968, *Theory of Analytic Functions. Izdatelstvo Nauka, Moscow*. Vol. 2, pp. 359.

[14] BOTTCHER, A; KARLOVICH, Y. 1997, *Carleson curves. Muckenhoupt weights and Toeplitz operators. Basel, Birkhäuser*.

[15] KOKILASHVILI, A; MESKHI, A. 2008, *Boundedness of maximal and singular operators in Morrey spaces with variable exponent*. *Armenian, Journal of Mathematics*, vol. 1, no.1, pp. 18-28.

[16] TESTICI, A. 2021, *Approximation by rational functions on doubly connected domains in weighted generalized grand Smirnov classes*. *Ukrains' kyi Matematyc hnyi , Zhurnal*, vol. *73*,no.7, pp. 964−978.