مجلة جامعة طرطوس للبحوث والدراسات العلمية_ سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٨) العدد (١) ٢٠٢٤

Tartous University Journal for Research and Scientific Studies –Basic Sciences Series Vol. (8) No. (1) 2024

دراسة بعض تطبيقات معادلة شرودنغر

د. أحمد شفيق بيشاني *

د. سمر فيصل عمران**

رهف اسد عيسى***

(تاريخ الإيداع ١٧/١٢/ ٢٠٢٣ – تاريخ النشر ٢٨/٤/ ٢٠٢٤)

□ ملخّص □

تم في هذا البحث حل معادلة شرودنغر مع نوعين من الكمون.

الحالة الأولى: $V(r) = -V_0$ وانطلاقاً من تحويل معادلة شرودنغر إلى معادلة بيسل الكروية حيث توصلنا إلى جذور بيسل الكروية χ_{nl} وحسابها من أجل سويات طاقية مختلفة $(1s, 1p, 1d, 2s, \ldots.)$ وبالتالي تم التعبير عن الطاقة E_{nl} بدلالة جذور بيسل الكروية χ_{nl} وثوابت ومتغيرات أخرى وحسابها.

الحالة الثانية: $V(r) = -V_0 + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$ حيث أن القيم الذاتية للطاقة تعطى بالعلاقة $E_{nl} = \left(N + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega$ وعليه تم حساب E_{nl} لسويات طاقية مختلفة ومقارنتها مع الحالة الأولى.علماً أنه تم تطبيق الحالتين على نوى نيكليون مفرد وهي $({}^{41}_{20}Ca), ({}^{13}_{6}C), ({}^{17}_{8}O), ({}^{5}_{2}He)$.

كلمات مفتاحية: نموذج النكليون المفرد ، معادلة شرودنغر، معادلة بيسل الكروية ، الهزاز التوافقي ، الدوال فوق الهندسية

*أستاذ – قسم الفيزياء – كلية العلوم – جامعة طرطوس – طرطوس – سوريا

**مدّرس – كلية العلوم – جامعة طرطوس – طرطوس – سوريا

***طالبة دراسات عليا(ماجستير) – قسم الفيزياء – كلية العلوم – جامعة طرطوس – سوريا

A Study some Schrödinger equation applications

Dr. Ahmad Shafek Bishani*
Dr. Samar Faisal Omran**
Rahaf Assd Issa**

(Received 17/12/2023.Accepted 28/4/2024)

□ABSTRACT □

In this research, Schrödinger's equation was solved with two types of the potential,

First case: $\boldsymbol{V(r) = -V_0}$,And from the conversion of the Schrödinger equation to the Bessel spherical equation, where we reached the spherical Bessel roots $\boldsymbol{\chi_{nl}}$ and calculated it for different energy levels $(\boldsymbol{1s, 1p, 1d, 2s, \ldots.})$. the energy values $\boldsymbol{E_{nl}}$ are expressed by Bessel's spherical roots $\boldsymbol{\chi_{nl}}$ and other constants and variables, and their calculation.

Two case : $\boldsymbol{V(r) = -V_0 + \frac{1}{2} m\omega^2 r^2}$, where the self-energy values are given by the formula $\boldsymbol{E_{nl} = \left(N + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega}$, Accordingly, it was calculated $\boldsymbol{E_{nl}}$ for different energy levels and compared to the first case. Note that the two cases were applied to the single Nucleon nuclei, which are: $({}^{5}_{2}\boldsymbol{He}), ({}^{17}_{8}\boldsymbol{O}), ({}^{13}_{6}\boldsymbol{C}), ({}^{41}_{20}\boldsymbol{Ca})$.

Key words : Single Nickelon Model، Schrödinger's equation، Bessel spherical equation ، harmonic vibrator ، Hypergeometric functions

*Professor- Department of physics-Faculty of Scieneces-Tartous university-Tartous Syria.
** Doctor - Faculty of Scieneces - Tartous University - Tartous - Syria.
***Master Student,Department of physics,Faculty of Scieneces,Tartous University,Tartous ,Syria.

مقدمة:

في عام 1926 حصل العالم إروين شرودنغر (Erwin Schrödinger) على معادلة وصفت وشرحت بشكل مناسب الظواهر الذرية والتي أصبحت محوراً ديناميكياً لميكانيكا الموجات الكمومية، وهي معادلة شرودنغر حيث أنها معادلة تفاضلية جزئية من الدرجة الثانية تسمح لنا بإنشاء نموذج كامل للذرة، وتنتج بذلك التوابع الذاتية للجسيم في جهد طاقة، أي تمكنا من حساب دالة الموجة المرتبطة $u(r)$ لجسيم يتحرك داخل حقل قوة موصوف بواسطة $V(r)$ وبذلك نحصل على مجموعة من الطاقات المقابلة لحالات الجسيم المسموح بها في الذرة [1] [2] [3].

تعطى معادلة شرودنغر بالعلاقة:

$$\widehat{\mathrm{H}}\psi = \mathrm{E}\psi \qquad (1)$$

حيث $\widehat{\mathrm{H}}$:مؤثر هاملتوني ، E: الطاقة ، ψ :الدالة الموجية

نعرّف الموثر الهاملتوني $\widehat{\mathrm{H}}$ بالعلاقة الآتية: $\widehat{\mathrm{H}} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r)$

تعطى عبارة اللابلاسيان بالشكل:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

نفرض أن كمون هذه المعادلة يعتمد فقط على (r) أي أن معادلة شرودنغر مستقلة عن الزمن وهذا يشير إلى أنه يمكننا تمثيل الأحداثيات الكروية بدلاً من الأحداثيات الديكارتية،علماً أن الدالة الموجية تأخذ الصيغة:

$$u(r) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\varphi) \qquad (2)$$

حيث قيم $R_{nl}(r)$ (الجزء القطري للدالة) نحصل عليها من المعادلة الشعاعية للحقل المركزي ، وقيم $Y_{lm}(\theta,\varphi)$

(الدالة التوافقية الكروية) نحصل عليها من المعادلة الزاوية للحقل المركزي.

علاوةً على ذلك و بفضل طبيعة القوى النووية قصيرة المدى والأمكانيات المقابلة للحفرة الكمومية بحدود حادة وتوزيعات المادة النووية يعد ذلك كافياً لحساب كلا الحالتين الآتيتين [4] :

الحالة الأولى:حفرة كمومية :لدينا (▪□) حيث R نصف قطر الحفرة، r نصف قطر التأثير

$$V(r) = -V_0 \quad ; r < R$$
$$V(r) = \infty \quad ; r > R \qquad ▪□$$

الحالة الثانية: حفرة كمومية مضاف لها كمون الهزاز التوافقي:لدينا(▪□▪□)

$$V(r) = -V_0 + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \qquad ▪□▪□$$

أهمية البحث وأهدافه:

تتمثل أهمية البحث في:

1 _ إمكانية حساب طاقة السويات E_{nl} بدلالة جذور بيسل الكروية χ_{nl} التي تم الحصول عليها بتحويل معادلة شرودنغر إلى معادلة بيسل الكروية علماً أن الكمون أو الجهد النووي المستخدم يعبر عن التأثيرات المتبادلة المركزية (كمون مركزي).

2 _ إمكانية إيجاد قيم الطاقة والعامل المشترك للتوابع الأساسية في الأحداثيات الديكارتية للهزاز التوافقي وذلك باستخدام معادلة شرودنغر لهزاز توافقي ثلاثي الأبعاد في الإحداثيات الديكارتية.

طريقة البحث ومواده:

أولاً_ حل معادلة شرودنغر مع حفرة كمومية :

يجب أن تكون التوابع الذاتية معدومة عند $r > R$ لذلك يجب أن نكتفي في حلول داخل النواة $r \leq R$ وعليه أن حل معادلة شرودنغر يتيح لنا الحصول على ما نصبوا إليه وذلك بتحويل معادلة شرودنغر إلى معادلة بيسل الكروية:

انطلاقاً من المعادلة (1) وباستخدام طريقة فصل المتغيرات علماً أن الدالة الموجية تعطى بالصيغة (2) :[5]

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left\{Y(\theta,\varphi)\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)R(r)+R(r)\frac{1}{r^2 sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]Y(\theta,\varphi)\right\} - [E-V(r)]R(r)Y(\theta,\varphi)=0 \qquad (3)$$

بقسمة المعادلة السابقة على $R(r)Y(\theta,\varphi)$ وضربها ب $-\frac{2mr^2}{\hbar^2}$ نحصل على المعادلة:

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right)+\frac{2mr^2}{\hbar^2}[E-V(r)] = -\frac{1}{Y(\theta,\varphi)sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]Y(\theta,\varphi) \qquad (4)$$

نلاحظ أن الطرف الأول من المعادلة السابقة يعتمد على (r) والطرف الثاني يعتمد على (θ,φ) وهذا يعني أنّ الطرفان تابعان لمتحولان مختلفان فلا يمكن أن يتساويا ألا إذا كان كل من التابعان متساويان ومنه نستطيع أن نعرف الطرفان بثابت عبارته $l(l+1)$ ويدعى بثابت التفرقة وعليه نحصل على معادلتين:

المعادلة الشعاعية:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right)+\frac{2mr^2}{\hbar^2}[E-V(r)] = l(l+1)R(r) \qquad (5)$$

المعادلة الزاوية:

$$-\left[\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\mathrm{Y}(\theta,\varphi) = l(l+1)\mathrm{Y}(\theta,\varphi) \qquad (6)$$

حيث في معادلة شرودنغر الشعاعية يعطى اللابلاسيان في الأحداثيات الكروية بالشكل

$$\nabla^2=\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)-\frac{L^2}{\hbar^2 r^2}$$

L : العزم الحركي المداري ونعرف L^2 بالعبارة التالية:

$$L^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] = l(l+1)\hbar^2$$

l هو العدد الكمي الثانوي ويأخذ القيم .. $l = 0,1,2,..$

نلاحظ أن حل المعادلة الشعاعية يعتمد فقط على اختيار الكمون المركزي $V(r)$ وعليه يمكن كتابة المعادلة الشعاعية بالشكل:

$$\frac{d^2R(r)}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+\left[\frac{2m}{\hbar^2}\,(\,E-V(r)\,)-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R(r)=0 \qquad (7)$$

في حالة الحفرة الكمومية نستخدم الصيغة التالية [14]:

$$\rho = kr = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\;r$$

و بتعويض $r=\frac{\rho}{k}$ في العلاقة (7) نحصل على:

$$\frac{d^2R(\rho)}{d\rho^2}k^2+\frac{2}{\rho}k\frac{dR(\rho)}{d\rho}k+\left[\frac{2m}{\hbar^2}(E-0)-\frac{l(l+1)}{\rho^2}k^2\right]R(\rho)=0 \qquad (8)$$

بالقسمة على k^2 حيث $k^2=\frac{2mE}{\hbar^2}$ نجد :

$$\frac{d^2R(\rho)}{d\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{dR(\rho)}{d\rho}+\left[1-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]R(\rho)=0 \qquad (9)$$

وهذه معادلة بيسل التفاضلية الكروية،يمكن التعبير عن تابع $R(\rho)$ من حيث تابع بيسل الكروي $j_l(\rho)$ العامة عند

$\rho = 0$ [6].

$$R(\rho) = j_l(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}\,J_{l+\frac{1}{2}}(\rho) = (-1)^l\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)^l\frac{sin\rho}{\rho} \qquad (10)$$

تمثل J تابع بيسل (Bessel functions) من المرتبة $l+\frac{1}{2}$

$$J_{l+\frac{1}{2}}(\rho) = (-1)^l\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\rho^{l+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)^l\frac{sin\rho}{\rho} \qquad (11)$$

وبصورة مماثلة الحلول غير المنتظمة للمعادلة(8) تكون توابع نيومان (Neuman functions)

$$n_l(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}\,N_{l+\frac{1}{2}}(\rho) = (-1)^{l+1}\sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}\,J_{-l-\frac{1}{2}}(\rho) = -(-1)^l\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)^l\frac{cos\rho}{\rho} \qquad (12)$$

$$N_{l+\frac{1}{2}}(\rho) = -(-1)^l\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\rho^{l+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)^l\frac{cos\rho}{\rho} \qquad (13)$$

l	$J_l(\rho)$	$n_l(\rho)$
0	$\frac{\sin\rho}{\rho}$	$-\frac{\cos\rho}{\rho}$
1	$\frac{\sin\rho}{\rho^2}-\frac{\cos\rho}{\rho}$	$-\frac{\cos\rho}{\rho^2}-\frac{\sin\rho}{\rho}$
2	$\left(\frac{3}{\rho^3}-\frac{1}{\rho}\right)\sin\rho-\frac{3}{\rho^2}\cos\rho$	$-\left(\frac{3}{\rho^3}-\frac{1}{\rho}\right)\cos\rho-\frac{3}{\rho^2}\sin\rho$

الجدول الأول: يمثل قيم تابعي بيسل $j_l(\rho)$ و نيومان $n_l(\rho)$ من أجل $l = 0,1,2,..$

يعطى الحل العام للمعادلة (9) بالشكل[6] :

$$R(r) = AJ_l(\rho) + BJ_l(\rho) \qquad (14)$$

حيث A و B ثوابت أختيارية، B يؤول للصفر لأنه عند المركز $V = 0$ أي الجسم لايستطيع اختراق الحاجز عند $r \geq R$ وهذا ناتج عن كمون الحاجز الذي لا حد لارتفاعه $V(R) = \infty$ لذلك تؤول الدالة للصفر.

ومنه نستنتج أن: $J_l(\rho) = 0$ و بحل هذه العلاقة عند $l = 0,1,2,3$ نحصل على جذور بيسل الكروية.

نأخذ قيم $J_l(\rho)$ من الجدول الثاني الموافقة للحالة $l = 0$ فنجد:

$$J_l(\rho) = 0 \ \rightarrow \ J_0(\rho) = 0 \rightarrow \frac{\sin\rho}{\rho} = 0 \ \ \sin\rho = 0\ ;\ \rho = n\pi\ ; n = 1,2,3,\dots$$

وبتعويض قيم n في الحل $\rho = n\pi$ نجد قيمة الجدوز $\chi_{nl} = n\pi$ من أجل $l = 0$ الموافقة للسوية الطاقية s:

$$\chi_{nl} = \chi_{10} = 1\pi = 3{,}142 \ \ ,\chi_{20} = 2\pi = 6{,}283\ ,\chi_{30} = 3\pi = 9{,}425$$

وبالمثل نجد قيمة الجذور من أجل $l = 1$ الموافقة للسوية الطاقية p.

Number of zero; n	$\chi_0(\rho)$	$\chi_1(\rho)$
1	3,142	4,493
2	6,283	7,725
3	9,425	10,904
4	12,566	14,066
5	15,708	17,220

يمثل الجدول الثاني قيم جذور بيسل الكروية من أجل $l = 0,1$.

فأنَّ قيم الجذور التي حصلنا عليها في الحل التحليلي السابق من أجل $l = 0,1$ الموافقة للسويات الطاقية s,p مطابقة للقيم التي وردت في الأبحاث [7].

المدار Orbit (nl)	جذور بيسل χ_{nl}	عدد $N_{nl} 2(2l+1)$ النكليونات	عدد $\Sigma_{n,l} N_{nl}$ النكليونات الكلي
1s	3,142	2	2
1p	4,493	6	8
1d	5,763	10	18
2s	6,283	2	20
1f	6,988	14	34
2p	7,725	6	40
1g	8,183	18	58
2d	9,095	10	68
1h	9,356	22	90
3s	9,425	2	92
2f	10,417	14	106
1i	10,513	26	132
3p	10,904	6	138
2g	11,705	18	156

يمثل الجدول الثالث حالات الجسيم الواحدي للحفرة الكمومية مع جذور بيسل الكروية [8].

انطلاقاً من الشرط الحدي:

$$j_l(\rho) = 0 \quad ; \ \rho = kR \qquad (15)$$

و من عبارة العدد الموجي $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ تعطى عبارة الطاقة في حالة حفرة كمومية بالشكل التالي:

$$E_{nl} = \frac{\hbar^2}{2m} K_{nl}^2 = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\chi_{nl}^2}{R^2} \qquad (16)$$

وبالتالي وفقاً للمعادلات (2,10,16) يُعطى تابع الموجة للحالة المدروسة بالصيغة التالية [14]

$$u_{nlm}(K_{nl} r) = A_{nl}\, j_l(K_{nl} r) Y_{lm} \ ; \ A_{nl} = (2R^{-3})^{\frac{1}{2}} \frac{1}{j_{l+1}(K_{nl} R)} \qquad (17)$$

العمودان الثالث والرابع في الجدول الثالث يعطيان على التوالي عدد النكليونات N_{nl}في مجموعات فرعية مختلفة والعدد الأجمالي للنكليونات بما في ذلك المجموعة الفرعية المكتملة الأخيرة،حيث سمينا الأغلفة والمجموعات الفردية حالات الجسيم المفرد.

لابد من الأشارة أنّ نموذج الجسيم المفرد (simple particle) يستند إلى حقيقتين [9]:

أنّ كل نكليون من نكليونات النواة يتحرك في الحقل الوسطي للنكليونات الأخرى

وأنّ التأثير المتبادل بين العزم السبيني والعزم المداري موجود وهو ذو طبيعة نسبية.

ثانياً: حل معادلة شرودنغر مع كمون حفرة مضافاً إليه كمون الهزاز التوافقي:

بالنسبة لهزاز توافقي في نظام الأحداثيات الكروية، عند تعويض $V(r) = -V_0 + \frac{1}{2} m\omega^2 r^2$

في المعادلة (5) وباستخدام طريقة فصل المتغيرات نحصل على الصيغة التالية:

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \left[\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2} r^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] R(r) = 0 \qquad (18)$$

يمكن كتابة الحلول لهذه المعادلة على النحو الآتي [14]:

$$U_{nlm}(r,\theta,\varphi) = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\left(l+\frac{1}{2}\right)!}\, n^{l+n+\frac{1}{2}}}\; r^l\, e^{-\frac{1}{2}\lambda r^2} \times {}_1F_1\left(-n, l + \frac{3}{2}, \lambda r^2\right) Y_{lm} \qquad (19)$$

علماً أن عبارة طاقة السويات في حالة كمون هزاز توافقي تحسب من العلاقة[9] :

$$E_{nl} = \hbar\omega\left(2n + l + \frac{3}{2}\right) = \hbar\omega\left(N + \frac{3}{2}\right); n = 0,1,2 \qquad (20)$$

حيث: ${}_1F_1$ التابع الهايبرجيومتري، أن الأعداد الرئيسة المعينة بالعلاقة $N = 2n + l$ لمستوى واحد من الطاقة

$E = \hbar\omega(N + \frac{3}{2})$ تملك عدة توابع ذاتية خاصة،حيث إذا كان N عدد زوجي يمكن أخذ كل القيم الصحيحة الزوجية من () $0 \rightarrow N$ بفرض N=6 نجد:

$$n = 0; l = 6 \,\&\, n = 1; l = 4 \,\&\, n = 2; l = 2 \,\&\, n = 3; l = 0$$

N	$E_{N,\hbar\omega}$	Orbit (n,l)	$\Sigma_{nl}\, 2(2l+1)$	عدد الجسيمات الكلي
0	3/2	0s	2	2
1	5/2	0p	6	8
2	7/2	1s,0d	12	20
3	9/2	1p,0f	20	40
4	11/2	2s,1d,0g	30	70
5	13/2	2p,1f,0h	42	112
6	15/2	3s,2d,1g,0i	56	168

إذا كان Nعدد فردي يمكن أخذ كل القيم الصحيحة الفردية من ($1 \rightarrow N$) بفرض N=5 نجد:

$$n = 0; l = 5 \,\&\, n = 1; l = 3 \,\&\, n = 2; l = 1$$

الجدول الرابع: يمثل حالات الجسيم الواحدي للحفرة الكمومية المضاف إليها كمون الهزاز حيث$N = 2n + l$

في الكثير من الأحيان بدلاً من نظام الإحداثيات الكروية يكون العمل في النظام الديكارتي أكثر ملائمة، وعليه تعطى معادلة شرودنغر لحالة هزاز توافقي ثلاثي الأبعاد في الإحداثيات الديكارتية بالشكل:

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (K_1^2 - \lambda^2 x^2)u\right] + \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (K_2^2 - \lambda^2 y^2)u\right] + \left[\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (K_3^2 - \lambda^2 z^2)u\right] = 0 \qquad (21)$$

علماً أنّ كل حد من حدود المعادلة السابقة يساوي الصفر.

العمود الرابع في الجدول السابق يعطي عدد الجسسمات الموجودة على الأجزاء الفرعية المقابلة [14]

لدينا:

$$K^2 = K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad , \lambda = \frac{m\omega}{\hbar}$$

حيث:

$$u(x, y, z) = f(x)g(y)h(z) \qquad (22)$$

بتعويض المعادلة (22) في (21) نحصل على ثلاث معادلات متشابهة تماماً لهزاز توافقي آحادي البعد حيث تم الحل باستخدام طريقة فصل المتغيرات [14]:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + (K_1^2 - \lambda_x^2 x^2)f(x) = 0 \qquad (23)$$
$$\frac{d^2 g(y)}{dy^2} + \left(K_2^2 - \lambda_y^2 y^2\right)g(y) = 0$$
$$\frac{d^2 h(z)}{dz^2} + (K_3^2 - \lambda_z^2 z^2)h(z) = 0$$

حلول هذه المعادلة [11] .

الطاقة $E = \hbar\omega\left(n_1 + \frac{1}{2}\right)$ حيث n_1عدد صحيح ،التابع الموجي يأخذ الشكل التالي:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}\lambda x^2} \times {}_1F_1\left(-n, \frac{1}{2}, \lambda x^2\right) \qquad ; n_1 = 2n$$
$$f(x) = x e^{-\frac{1}{2}\lambda x^2} \times {}_1F_1\left(-n, \frac{3}{2}, \lambda x^2\right) \qquad ; n_1 = 2n + 1 \qquad (24)$$

إن إجمالي الطاقة:

$$E = \hbar\omega\left(n_1 + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega\left(n_2 + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega\left(n_3 + \frac{1}{2}\right) \qquad (25)$$

نوجد حل المعادلة (18) في نظام الاحداثيات الكروية ونرى مايتوافق معها في الإحداثيات الديكارتية كمثال نأخذ $n = 1, l = 2$ وذلك بالنسبة للمعادلة(19).

وعليه الطاقة المقابلة:

$$E = \hbar\omega\left(4 + \frac{3}{2}\right) \qquad (26)$$

الحلول الطبيعة للتابع تأخد الصيغة [14] :

$$u_{12}(r)Y_{20} = r^2 e^{-\frac{1}{2}\lambda r^2} \times_1 F_1\left(-1, \frac{7}{2}, \lambda r^2\right) p_2(cos\theta)$$
$$= r^2\, e^{-\frac{1}{2}\lambda r^2}\left(1 - \frac{2}{7}\lambda r^2\right)\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right) \qquad (27)$$

هذه التوابع الذاتية يجب أن تكون تركيبة خطية $f_{n_1}(x)g_{n_2}(y)h_{n_3}(z)$ لكل حالة توافق:

$$n_1 + n_2 + n_3 = (2n + l) = 4 \qquad (28)$$

كل حد يحوي المضروب $e^{-\frac{1}{2}\lambda r^2} = e^{-\left(\frac{1}{2}\right)\lambda(x^2+y^2+z^2)}$ داخل في u يمكن حذفه لأنه تابع أسي متناقص،

علاوةً على ذلك لدينا[14]:

$$F\left(0, \frac{1}{2}, \lambda x^2\right) = 1$$
$$F\left(-1, \frac{1}{2}, \lambda x^2\right) = 1 - 2\lambda x^2 \qquad (29)$$
$$F\left(-2, \frac{1}{2}, \lambda x^2\right) = 1 - 4\lambda x^2 + \frac{4}{3}\lambda^2 x^4$$
$$xF\left(0, \frac{3}{2}, \lambda x^2\right) = x$$
$$xF\left(-1, \frac{3}{2}, \lambda x^2\right) = x\left(1 - \frac{2}{3}\lambda x^2\right)$$

وهي قيم التابع الهايبرجيومتري عند التعويض بقانونه العام الذي يعطى بالصيغة $1F1(a,b,x) = \Sigma_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\frac{x^n}{n!}\right)$

ويدعى في هذه الحالة التابع بتابع كومير (Kummer’s functions)حيث أن هذا التابع يستخدم لحل التكاملات والتسلسلات والمعادلات التفاضلية والتفاضلية الجزئية. [12,13].

يمكن تحقيق الشرط (28) ب خمسة عشر طريقة مدرجة في الجدول الخامس وذلك باستخدام العلاقة(29).من أجل $n_1 = 0, n_2 = 0, n_3 = 4$ اي يجب التعويض في

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}\lambda x^2} \times_1 F_1\left(-n, \frac{1}{2}, \lambda x^2\right); n_1 = 2n$$

لأن $n_3 = 2n = 2(2) = 4$ ومنه نجد قيمة $n = 2$ بالمقارنة مع الشرط (29) نحصل على التابع الموافق للحالة المذكورة حيث n_1, n_2, n_3 تمثل على التوالي x, y, z وعليه من هذه الحلول الخمسة عشر علينا إنشاء مثل هذه المجموعات الخطية التي تعطي التابع (27) من حيث x, y, z

$$r^2\left(1 - \frac{2}{7}\lambda r^2\right)\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{2}r^2\right)\left(1 - \frac{2}{7}\lambda r^2\right) =$$
$$= \frac{1}{7}\lambda x^4 + \frac{1}{7}\lambda y^4 - \frac{2}{7}\lambda z^4 + \frac{2}{7}\lambda x^2 y^2 - \frac{1}{7}\lambda y^2 z^2 - \frac{1}{7}\lambda x^2 z^2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + z^2 \qquad (30)$$

لأن هذا يشمل درجات زوجية فقط من x, y, z. من الخمسة عشر معادلة مشار لها في الجدول الخامس حيث يجب حذف تلك التي تحوي على أس فردي من x, y, z أذ يوجد واحدة على الأقل من الأرقام الكمومية n_1, n_2, n_3 فردياً .

العوامل التي يجب ضربها تختلف في الإحداثيات الديكارتية كما يظهر العمود الأخير في الجدول الخامس،في تراكيبنا الآن ستة وظائف ذاتية متبقية بالمقارنة بين الشرط (30) والعمود الرابع من الجدول الخامس نحصل كما هو ممثل على ستة عوامل، كانت مطابقة للدراسات السابقة.

n_1	n_2	n_3	التوابع الذاتية الخاصة في الإحداثيات الديكارتية	العامل
0	0	4	$1-4\lambda z^2+\frac{4}{3}\lambda^2 z^4$	$-\frac{3}{14}\lambda^{-1}$
0	1	3	$yz(1-\frac{2}{3}\lambda z^2)$	0
0	2	2	$(1-2\lambda y^2)(1-2\lambda z^2)$	$-\frac{1}{28}\lambda^{-1}$
0	3	1	$yz(1-\frac{2}{3}\lambda y^2)$	0
0	4	0	$1-4\lambda y^2+\frac{4}{3}\lambda^2 y^4$	$+\frac{3}{28}\lambda^{-1}$
1	0	3	$xz(1-\frac{2}{3}\lambda z^2)$	0
1	1	2	$xy(1-2\lambda z^2)$	0
1	2	1	$xz(1-2\lambda y^2)$	0
1	3	0	$xy(1-\frac{2}{3}\lambda y^2)$	0
2	0	2	$(1-2\lambda x^2)(1-2\lambda z^2)$	$-\frac{1}{28}\lambda^{-1}$
2	1	1	$yz(1-2\lambda x^2)$	0
2	2	0	$(1-2\lambda x^2)(1-2\lambda y^2)$	$+\frac{1}{14}\lambda^{-1}$
3	0	1	$xz(1-\frac{2}{3}\lambda x^2)$	0
3	1	0	$xy(1-\frac{2}{3}\lambda x^2)$	0
4	0	0	$1-4\lambda x^2+\frac{4}{3}\lambda^2 x^4$	$+\frac{3}{28}\lambda^{-1}$

الجدول الخامس: التوابع الخاصة الذاتية لهزاز توافقي في الأحداثيات الديكارتية [14].

النتائج والمناقشة:

١_ تم في هذا البحث تحويل معادلة شرودنغر لحفرة كمون إلى معادلة بيسل الكروية:

$$\frac{d^2R(\rho)}{d\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{dR(\rho)}{d\rho}+\left[1-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]R(\rho)=0$$

وعليه توصلنا إلى قيم جذور بيسل الكروية χ_{nl} الموضحة في الجدول الثاني وتم مقارنة النتائج مع الحسابات السابقة وكانت مطابقة.

٢_ حساب E_{nl} طاقة السويات لنوى ذات نيكليون مفرد: $({}^{5}_{2}He), ({}^{17}_{8}O), ({}^{13}_{6}C), ({}^{41}_{20}Ca)$ بطريقتين:

أولاً: باستخدام العلاقة $E_{nl}=\frac{\hbar^2}{2m}K_{nl}^2=\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\chi_{nl}^2}{R^2}$ ، حيث قيمة الثابت $\frac{\hbar^2}{2m}$ عند ضربه وقسمته c^2 تساوي إلى $\frac{\hbar^2c^2}{2mc^2}=20,719Mev.Fermi^2$ ،Rهي نصف قطر النواة المدروسة وتعطى بالصيغة $R=r_0\sqrt[3]{A}$

حيث $r_0 = 1.3Fermi$ وهو نصف القطر النووي للنوى المدروسة، A العدد الكتلي.

اعتماداً على ما ذكر أعلاه وعلى قيم χ_{nl} الموجودة في الجدول الثالث نستطيع حساب قيمة E_{nl}:

E_{nl}	$({}^{13}_{6}C)$	$({}^{17}_{8}O)$	$({}^{41}_{20}Ca)$
E_{1s}	$22{,}726\ Mev$	$18{,}344\ Mev$	$10{,}191\ Mev$
E_{1p}	$46{,}472\ Mev$	$37{,}511\ Mev$	$20{,}839\ Mev$
E_{1d}	$76{,}458\ Mev$	$61{,}715\ Mev$	$34{,}285\ Mev$
E_{2s}	$90{,}878\ Mev$	$73{,}354\ Mev$	$40{,}751\ Mev$
E_{1f}	$112{,}417\ Mev$	$90{,}740\ Mev$	$50{,}410\ Mev$
E_{2p}	$137{,}379\ Mev$	$110{,}833\ Mev$	$61{,}604\ Mev$

من أجل : $({}^{5}_{2}He)$ نجد لدينا $p = 2\ , n = 3$ و $R = r_0\sqrt[3]{A} = 1.3\ \sqrt[3]{5} = 2.2\ Fermi$

بالتعويض نجد القيم التالية:

$$Enl = E_{1s} = \frac{\hbar^2c^2}{2mc^2}\frac{\chi_{1s}^2}{R^2} = 20.719\frac{(3{,}142)^2}{(2{,}2)^2} = 42{,}260\ Mev$$

$$Enl = E_{1p} = \frac{\hbar^2c^2}{2mc^2}\frac{\chi_{1p}^2}{R^2} = 20.719\frac{(4{,}493)^2}{(2{,}2)^2} = 84{,}351\ Mev$$

$$Enl = E_{1d} = \frac{\hbar^2c^2}{2mc^2}\frac{\chi_{1d}^2}{R^2} = 20.719\frac{(5{,}763)^2}{(2{,}2)^2} = 142{,}174\ Mev$$

$$Enl = E_{2s} = \frac{\hbar^2c^2}{2mc^2}\frac{\chi_{2s}^2}{R^2} = 20.719\frac{(6{,}283)^2}{(2{,}2)^2} = 166{,}541\ Mev$$

$$Enl = E_{1f} = \frac{\hbar^2c^2}{2mc^2}\frac{\chi_{1f}^2}{R^2} = 20.719\frac{(6{,}988)^2}{(2{,}2)^2} = 209.039\ Mev$$

$$Enl = E_{2p} = \frac{\hbar^2c^2}{2mc^2}\frac{\chi_{2p}^2}{R^2} = 20.719\frac{(7{,}725)^2}{(2{,}2)^2} = 255{,}458\ Me$$

باستخدام هذة الطريقة من أجل $({}^{17}_{8}O), ({}^{13}_{6}C), ({}^{41}_{20}Ca)$ لدينا:

ثانياً: بتعويض قيم N الموجودة في الجدول الرابع في العلاقة(20) ، حيث أن قيمة الأزاحة الطاقية تعطى بالعلاقة . [15] $\hbar\omega = \frac{41}{\sqrt[3]{A}}$

وذلك من أجل $({}^{5}_{2}He)$ لدينا: $\hbar\omega = \frac{41}{\sqrt[3]{A}} = \frac{41}{\sqrt[3]{5}} = 23{,}97\ Mev$ نحصل على القيم التالية:

$$E_{nl} = E_{0s} = \hbar\omega\left(N + \frac{3}{2}\right) = \hbar\omega\left(0 + \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}(23{,}97) = 35{,}955\ Mev$$

$$E_{nl} = E_{0p} = \hbar\omega\left(N + \frac{3}{2}\right) = \hbar\omega\left(1 + \frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}(23{,}97) = 59{,}925\ Mev$$

$$E_{nl} = E_{0d} = \hbar\omega\left(N + \frac{3}{2}\right) = \hbar\omega\left(2 + \frac{3}{2}\right) = \frac{7}{2}(23{,}97) = 83{,}895\ Mev$$

$$E_{nl} = E_{1s} = \hbar\omega\left(N + \frac{3}{2}\right) = \hbar\omega\left(2 + \frac{3}{2}\right) = \frac{7}{2}(23{,}97) = 83{,}895\ Mev$$

$$E_{nl} = E_{0f} = \hbar\omega\left(N + \frac{3}{2}\right) = \hbar\omega\left(3 + \frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2}(23{,}97) = 107{,}865\ Mev$$

$$E_{nl} = E_{1p} = \hbar\omega\left(N + \frac{3}{2}\right) = \hbar\omega\left(3 + \frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2}(23,97) = 107,865\ Mev$$

E_{nl}	$({}^{13}_{6}C)$	$({}^{17}_{8}O)$	$({}^{41}_{20}Ca)$
E_{0s}	$26,155\ Mev$	$23,917\ Mev$	$17,835\ Mev$
E_{0p}	$43,592\ Mev$	$39,861\ Mev$	$29,725\ Mev$
E_{0d}	$61,029\ Mev$	$55,807\ Mev$	$41,615\ Mev$
E_{1s}	$61,029\ Mev$	$55,807\ Mev$	$41,615\ Mev$
E_{0f}	$78,466\ Mev$	$71,739\ Mev$	$53,505\ Mev$
E_{1p}	$78,466\ Mev$	$71,739\ Mev$	$53,505\ Mev$

باستخدام العلاقة السابقة من أجل $({}^{17}_{8}O), ({}^{13}_{6}C), ({}^{41}_{20}Ca)$ لدينا:

٣_ تم إيضاً التوصل للعامل المشترك للتوابع الذاتية للاحداثيات الديكارتية للهزاز التوافقي بحل المعادلة الشعاعية

$$\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \left[\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}r^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]R(r) = 0$$

وذلك باستخدام خواص التابع الهايبرجيومتري .

الاستنتاجات والتوصيات:

- الحل التحليلي لمعادلة شرودنغر لحفرة كمون سمح لنا بالوصول إلى عبارة طاقة السويات حيث تم حسابها باستخدام العلاقة $E_{nl} = \frac{\hbar^2}{2m} K_{nl}^2 = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\chi_{nl}^2}{R^2}$ ، وأيضاً تم حساب قيم طاقة السويات في حالة الهزاز التوافقي التي تعطى بالعلاقة $E_{nl} = \hbar\omega\left(2n + l + \frac{3}{2}\right) = \hbar\omega\left(N + \frac{3}{2}\right)$ وقد تبيّن أنه في الحالتين:

1_ انخفاض طاقة السويات بزيادة العدد الكتلي للنواة.

2_ زيادة قيمة الطاقة في الحالة الأول بازدياد قيمة جذور بيسل الكروية .

- لاحظنا ظهور فقط ثلاث أعداد سحرية في الحالتين المدروستين وهم 2,8,20 ، هذا يعني أنه يجب أضافة حد تفاعل إلى كمون الحفرة وكمون الهزاز التوافقي
- الحل العددي بواسطة برنامج حاسوبي يسهل لنا إيجاد قيم E_{nl}.
- إمكانية حل المعادلة (18) في الإحداثيات الأسطوانية.

المراجع:

1- Christianto,victor(2014).*A Review of schrödinger Equation & Classical Weve Equation*. University of New Mexico.

2- IQBAL,AZHAR(2012*). SOME ASPECTS ON THE SCHRÖDINGER EQUATION.* Sweden, Chalmers University of Technology and University of Gothenburg.

3- Efthimiades، Spyros. *Physical meaning and derivation of Schrodinger and Dirac equations*. Department of Natural Sciences, Fordham University.

4- S Assia, *Solution de l’équation de Schrödinger dépendante du temps pour un potentiel non central avec de plus un potentiel coulombien et un potentiel quadratique inverse,* mémoire de master,Université Mohamed Boudiaf - M’sila, (2017).

5- J. V. Lill, G. A. *Parker, and J.C.Light, J. V. Lill, G. A. Parker, and J.C.Light, Chem. Phys*. Lett. 89, 483 (1982), Chem. Phys. Lett. 89, 483 (1982).

6- أ.د.ناصر،إبراهيم؛د.عبدالهادي،عفاف(٢٠١٣). *أساسيات ميكانيكا الكم بأمثلة محلولة*.مكتبة العبيكان.

7- Suzuki,Masatsugu;Suzuki, *Itsuko S(2021). Finite spherical square well potential: deuteron,* with the use of Mathematica. Department of Physics, SUNY at Binghamton.

8- Feenberg E. *Shell Theory of the Nucleus. Princeton Univ.press,princeton,* New Jersey,1955.

٩- د.بيشاني،أحمد؛د.موسى،محمد(٢٠١٠). *حساب سويات الطاقة لنواة الكالسيوم Ca^{41} باستخدام معادلة ديراك في إطار نموذج النكليون المفرد*.مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الأساسية المجلد(٣٢) العدد (١).

10- MILLER. L.D(1975). *Relativistic SSingl-Particlefor Nuclei*.Ann.Phys.,V.91, 40-57.

11- Flűgge S., Marschall H(1952*). Rechenmethoden der Quantentheortie* .Springer Berlin-Gotttingen – Heidelberg.

12-pearsno,John;college,wercester(2009*).Computation of Hypergeomtric functions*. University of Oxford.

13-Andrews,Larry C;Young,Cynthia Y(2023).*Spherical Functions. Encyclopedia of Optical and Photonic Engineering* CRC Press.

14_Айзенберг Н., Грайнер В. *Моделнядер. Коллектнвные Н одночастнчные явления.* Пер.с англ. М., Атомиздат,1975.

١٥-بيشاني، أحمد(٢٠٠٧).*حساب ثابت الإزاحة الطاقية $\hbar\omega_*$ لبعض النوى باستخدام معادلة ديراك مع كمون نووي يحوي تأثيرات مركزية وتنسورية*.مجلة جامعة تشرين للدراسات والبحوث العلمية_سلسلة العلوم الأساسية المجلد (٢٩) العدد (١).