

مقارنات بين ثلاث طرائق عددية لحل نموذج من المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد

د. سليمان محمد محمود*

د. منال ناصر حسين**

موسى عدنان زعرور***

(تاريخ الإيداع ٢٠٢٤ / ١ / ١١ - تاريخ النشر ٢٠٢٤ / ٤ / ٢٨)

□ ملخص □

نقدم في هذا العمل مقارنات بين ثلاث طرائق عددية لإيجاد الحل لنموذج من المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد. تم حساب عمليات وينر العشوائية المستمرة مع الزمن بمحاكاة حاسوبية منفصلة. تمت دراسة التقارب العددي لطرائق أولر مارياما و رانج كوتا و مليستين بتطبيقها مع عملية وينر على مسألتي اختبار من نفس نمط المسألة. تم إعداد البرامج اللازمة لهذه الطرائق باستخدام لغة البرمجة *Mathematica*، حيث تشير نتائج الحلول العددية والمقارنات إلى أفضلية طريقتي رانج كوتا ومليستين من حيث الدقة والفعالية على طريقة أولر مارياما ذات التقارب الضعيف والقوي.

تبين الدراسة إلى أن طريقة أولر-مارياما المطبقة لنموذج من المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد متقارب بضعف من المرتبة 1 وبقوة من المرتبة 1/2، في حين أن كلتا طريقتي رانج كوتا ومليستين متقاربتين بقوة من المرتبة 1 .

الكلمات المفتاحية : معادلات تفاضلية عشوائية متأخرة من النوع المحايد ، عملية وينر ، مرتبة التقارب العددي.

* أستاذ في قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

E-mail: Suliman_mmn@yahoo.com

** مدرس في قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة طرطوس - طرطوس - سورية.

*** طالب دراسات عليا (ماجستير) - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة طرطوس - طرطوس - سورية.

Comparisons of Three Numerical Methods for Solving a Model of Neutral Stochastic Delay Differential Equations

Dr.Suliman M. Mahmood*

Dr. Manal N. Hoseen**

Mousa A.Zaarour***

(Received 11/1/2024.Accepted 28/4/2024)

□ABSTRACT □

In this paper, comparisons of three numerical methods for solving a model of neutral stochastic delay differential equations are presented (NSDDEs). We calculate Wiener continuous stochastic processes by computer discrete simulations. The numerical convergence of the Euler-Maruyama, Range-Kutta and Milstein methods are studied by applying them with the Wiener process to two test problems of the same problem type.

The programs required for these methods were prepared using the Mathematica programming language. Numerical results and comparisons indicate that the Range-Kutta and Milstein methods are numerically more accurate than the Euler-Maruyama method with weak and strong convergence. The study shows that the Euler-Maruyama method applied to a model of NSDDEs is weakly convergent of order 1 and strongly of order 1/2, while the methods Range-Kutta and Milstein are strongly convergent of order 1

Keywords: *Neutral Stochastic Delay Differential Equations, Wiener Process Convergence Order.*

* Prof., Depart. of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen Universty, Lattakia, Syria.

**Prof., Depart. of Mathematics, Faculty of Science, Tartous Universty, Tartous, Syria.

***Postgraduate student,Depart. of Mathematics, Tartous Universty, Tartous, Syria.

١- مقدمة : introduction

تعد المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد إحدى الوسائل الأساسية لنمذجة عمليات الضجيج في الطبيعة فنجد لها استخدامات واسعة في نمذجة ومحاكاة الأنظمة الإحصائية ذات المتغيرات العشوائية، إن التأخير سمة هامة موجودة في العديد من العمليات والظواهر في الطبيعة وفي الصناعات التكنولوجية، فمثلاً في الفيزياء يلعب التأخير دوراً بارزاً في تصفية الترددات لأموج الراديو والأجهزة الالكترونية، وأيضاً في الكيمياء الحيوية للتأخير دور هام في ديناميكا الشبكات المنظمة وراثياً. كما ونجد للمعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة أيضاً استعمالات وتطبيقات واسعة، في نمذجة الأنظمة الفيزيائية الخاضعة للتقلبات الحرارية، في الاقتصاد المالي لنمذجة أسعار الأسهم غير المستقرة، وفي البيولوجيا كنمذجة الوقوف المتوازن للإنسان الخاضع للسيطرة العصبية وتقلصات العضلات مع تأخير زمني للأجسام الصحيحة والمعتلة، حيث يكون لتأخير ضخ الدم أثر كبير على أجهزة الجسم واستقرارها. كذلك في حركة السكان لنمذجة عمليات الولادة والموت (معدل النمو، معدل الوفيات)، في حالة انتشار الأمراض الوبائية مثل فيروس الايدز ومرض العصر فيروس كورونا...الخ.

إن للمعادلة التفاضلية المتأخرة حل وحيد من أجل كل تحديد لشروط ابتدائية مناسبة، في حين أن للمعادلة التفاضلية المتأخرة العشوائية حلول ذات عمليات عشوائية مستمرة مع الزمن، بمعنى أن الحل قد يكون معلوم في اللحظة الحالية عند الزمن t ولكن في اللحظة $t+dt$ سيكون الحل غير معروف.

• أهمية البحث: Importance of Research

تكمن أهمية هذا البحث من الناحية التطبيقية بأن مسألة المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد المطروحة تعد نموذجاً مناسباً ومثالياً للكثير من الظواهر الطبيعية والحقيقية في مجالات الحياة المختلفة التجارية والاقتصادية والصناعية ومؤخراً تستخدم بشكل خاص في التطبيقات العلمية الحديثة، كنماذج الفيروسات المستجدة مثل الايدز - إيبولا - كورونا الخ . ولسوء الحظ فإن الحل الدقيق لمعظم هذه النماذج لا يمكن إيجادها بالطرائق المألوفة وبالتالي فإن محاكاة الحل لمثل هذه النماذج يؤدي إلى تفسيرها أو تقديم الكثير من المعلومات الهامة حول هذه المسائل وجميع المسائل الأخرى المشابهة التي نجدها في الإحصاء والفيزياء، والكيمياء، وعلم الحياة، والاقتصاد، الخ .

طرائق البحث ومواده: Methodology

تعتمد طرائق البحث في هذا العمل على بعض تقنيات التحليل العددي، والتحليل الرياضي وبعض المفاهيم الأساسية الأخرى في الإحصاء الرياضي المتمثلة بعملية وينر العشوائية. كما يحتاج البحث إلى استخدام علوم الخوارزميات والبرمجة الحاسوبية لمحاكاة الحل التي تمثلها الظواهر المدروسة عددياً، مع الأخذ بالحسبان أن هذه الحلول غير متاحة بسهولة بالطرائق التحليلية التقليدية. تم إجراء هذا البحث في قسم الرياضيات-كلية العلوم-جامعة طرطوس في الفترة الواقعة بين شباط ٢٠٢٣ وكان أول عام ٢٠٢٣.

دراسات سابقة: Literature Review

تعد الدراسات العددية للمعادلات التفاضلية المتأخرة العشوائية من النوع المحايد حديثة نسبياً وهي في طور البداية حيث نجد أن معظم الأبحاث تطرقت إلى معالجة وإيجاد الحلول العددية للمعادلات التفاضلية العشوائية مثلاً

[14,17,18]

والمعادلات التفاضلية العشوائية مع المتأخرة مثلا [1,3,5,6,8,9,10,16,21,26] وسنركز بشكل خاص على المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد: درس Mao عام ٢٠٠٣ مفهوم التقارب بمتوسط المربعات القوي لطريقة أولر مارياما لإيجاد الحلول العددية للمعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة [14]. درس Tan وآخرون في عام ٢٠١٤ الحلول العددية للمعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد مع قفزات (خطوات) بواسون تحت شرط ليبتشيز المحلي [24].

قدم Mahmoud وآخرون في عام ٢٠١٦ تقنية شرائحية بكثيرات حدود من الدرجة الخامسة بخمس نقاط تجميع لإيجاد الحلول العددية للمعادلات التفاضلية العشوائية وفق صيغة إيتو [15]. ناقش Tan and Yuan في عام ٢٠١٨ الاستقرار والتقارب العددي لطريقة Split-Theta لنماذج المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد [23]، وطور Li & Hong في عام ٢٠١٩ هذه الطريقة [13].

أوجد Zhou and Jin في عام ٢٠١٩ الحلول العددية للمعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة فوق الخطية من النوع المحايد [28]. طور Gao and Hu في عام ٢٠٢٠ طرائق عددية لحل نموذج من المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد اللاخطية [7]. قدم Wang and Xu في عام ٢٠٢٠ طريقة Averaging لدراسة الاستقرار والتقارب لنموذج من المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد [25]. قام Al في عام ٢٠٢١ بدراسة معدل التقارب للمعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد [11]. قدم Mahmoud وآخرون في عام ٢٠٢١ تقنية عددية لحل نموذج من المعادلات التفاضلية العشوائية من المرتبة الثانية [19].

2 - مفاهيم وتعريفات أساسية:

نبدأ بسرد بعض التعاريف والمفاهيم الأساسية. تعرّف المعادلة التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد بأنها معادلة تفاضلية تتضمن واحد أو أكثر من الحدود العشوائية والحدود العشوائية مع تأخير زمني كما تحوي على حد تفاضلي متأخر، ولهذا سيكون ناتج الحل النهائي عملية عشوائية أيضاً، والشكل النموذجي الأنسب لتعريفها رياضياً بحسب [7,11,13,23,24] هو صياغتها وفق مفهوم إيتو كالاتي:

$$\begin{cases} d(X(t) - rX(t - \tau)) = F(t, X(t), X(t - \tau))dt + G(t, X(t), X(t - \tau))dW(t), t \in [0, T] \\ X(t) = \phi(t), \quad t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (1)$$

حيث: $\phi(t); t \in [-\tau, 0]$ دالة المعطيات الابتدائية، وتعطي قيمة الحل في الزمن المتأخر ويدعى $\tau \in (0, \infty)$ بثابت التأخير وهو مقدار حقيقي موجب و $r \in \mathbb{R}$.

تسمى الدالة $F: [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ بدالة معامل الإزاحة (Drift Coefficient) للمعادلة التفاضلية العشوائية المتأخرة.

وتدعى الدالة $G: [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ بمعامل الانتشار (Diffusion Coefficient) للمعادلة التفاضلية العشوائية المتأخرة.

تسمى $W(t)$ عملية وينر (Wiener Process)، بينما $X(t): [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ فهي عملية عشوائية تمثل حل المعادلة التفاضلية العشوائية (1).

إذا كانت الدالتين F و G لا تعتمدان على الزمن t بشكل مباشر تسمى المعادلة (1) بالمعادلة المستقلة ذاتياً (Autonomous) وتعطى عندئذ كالاتي:

$$\begin{cases} d(X(t) - rX(t - \tau)) = F(X(t), X(t - \tau))dt + G(X(t), X(t - \tau))dW(t), t \in [0, T] \\ X(t) = \phi(t); t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (2)$$

ليكن $X(t)$ الحل الدقيق للمعادلة (1) وليكن $x(t_n)$ الحل العددي في اللحظة $t = t_n$ وفيه نفترض أن التقريبات في اللحظات السابقة محسوبة بدقة تامة أي $x_i = X(t_i)$, $i < n$ ، في حين سنعتبر بـ x_n عن الحل العددي المحسوب بناءً على الحلول العددية $\{x_i\}_{0 < i < n}$ السابقة، والتي تتراكم فيها الأخطاء المحلية لكل الحلول العددية السابقة.

تعريف (1): [17] العملية العشوائية $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ هي مجموعة من المتغيرات العشوائية على فضاء احتمالي معطى (Ω, F, P) والمرتبطة مع الزمن t ، وعندئذٍ

- لأجل كل $t \geq 0$ تكون الدالة $w \rightarrow X(t; w)$ قابلة للقياس ومعرفة على الفضاء الاحتمالي (Ω, F, P) .

- لأجل كل $w \in \Omega$ تسمى الدالة $t \rightarrow X(t; w)$ مسار العينة أو مسار العملية.

تعريف (2): تعرّف عملية وينر [16] Wiener Process القياسية في المجال $[0, T]$ بأنها متغير عشوائي $W(t)$ مستمر مع الزمن، من أجل كل $t \in [0, T]$ ، ويحقق الخصائص التالية:

خاصة (1): من أجل كل t يكون توزيع المتغير العشوائي $W(t)$ توزيع طبيعي بمتوسط mean يساوي الصفر وتباين Variance يساوي الواحد.

خاصة (2): إن $W(0) = 0$ باحتمال يساوي الواحد.

خاصة (3): من أجل كل $0 \leq t_1 < t_2 < T$ ، فإن الفرق $W(t_2) - W(t_1)$ يكون متغيراً عشوائياً موزعاً طبيعياً بمتوسط صفر وتباين $t_2 - t_1$ ، وهذا يكافئ أن نكتب

$$W(t_2) - W(t_1) \sim \sqrt{t_2 - t_1} N(0, 1)$$

حيث $N(0, 1)$ يرمز لمتغير عشوائي يخضع للتوزيع الطبيعي المعياري.

خاصة (4): من أجل كل $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < T$ ، فإن الفرقين $W(t_2) - W(t_1)$

و $W(t_4) - W(t_3)$ يكونان متغيرين عشوائيين مستقلين.

خاصة (5): يمكن تمثيل عملية وينر $W(t)$ بمسارات مستمرة.

تعريف (3): الضجة البيضاء وتكامل إيتو (White Noise and Ito Integral): [6]

يدعى التكامل من الشكل $\int_0^t g(s, X(s))dW(s)$ بتكامل إيتو ويمكن إيجاد هذا التكامل بأخذ التجزئة المنتظمة

$c = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = d$ وهو مجال حل الدالة التي نريد إيجاد

تكاملها وفق صيغة إيتو ويعطى تكامل ريمان كنهاية من الشكل:

$$\int_c^d f(t)dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{t}_i)\Delta t_i$$

حيث $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ ، و $t_{i-1} \leq \bar{t}_i \leq t_i$.

وبشكل مشابه فإن تكامل إيتو هو النهاية :

$$I = \int_c^d f(t) dW(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(t_{i-1}) \Delta W_i$$

حيث $\Delta W_i = W(t_i) - W(t_{i-1})$ هي خطوة عملية وينر للتكامل. والخلاف الأساسي هو أن النقطة t_{i-1} يمكن اختيارها كأى نقطة من المجال (t_{i-1}, t_i) ، بينما في تكامل إيتو يكون المطلوب t_{i-1} نقطة الطرف الأيسر للمجال.

بما أن f و $W(t)$ عمليتان عشوائيتان ، فلا توجد قابلية تقليدية للاشتقاق ويُعبّر عن تكامل إيتو بالشكل التفاضلي كالاتي:

$$dI = f(t) dW(t)$$

يسمى التفاضل $dW(t)$ لعملية وينر $W(t)$ بالضجة البيضاء White Noise.

تعريف (4): الخطأ الموضوعي: Local Error[27]

الخطأ الموضوعي هو متتالية المتغيرات العشوائية

$$\delta_n = |x(t_n) - X(t_n)|, n = 1, 2, \dots, N$$

يقيس الفرق بين الحل العددي والحل الدقيق (التحليلي) في مجال زمني جزئي طوله خطوة واحدة من المجال الكلي.

تعريف (5): الخطأ الكلي: Global Error[27]

الخطأ الكلي هو متتالية المتغيرات العشوائية

$$e_n = |x_n - X(t_n)|, n = 1, 2, \dots, N$$

يقيس الفرق المتراكم بين الحل العددي (التقريبي) والحل الدقيق (التحليلي) على كامل نطاق الحل.

تعريف (6): التقارب الضعيف Weak convergence[20]:

عند حساب مسارات الحل العددي ، يعطى معيار التقارب الضعيف من المرتبة p لطريقة عددية بالمتراجحة:

$$\max_{1 \leq n \leq N} |E(e_n)| \leq C h^p, \text{ as } h \rightarrow 0$$

حيث $p > 0$ ، و C ثابت حقيقي ، e_n الخطأ الكلي عند t_n .

تعريف (7): التقارب القوي Strong convergence[20]:

عند حساب عدة مسارات للحل العددي ، يعطى معيار التقارب القوي بمتوسط المربعات من المرتبة p لطريقة عددية كالاتي:

$$\max_{1 \leq n \leq N} (E(|e_k|^2))^{1/2} \leq C h^p, \text{ as } h \rightarrow 0$$

أو بالعلاقة

$$\max_{1 \leq n \leq N} E(|e_k|^2) \leq C h^{2p}, \text{ as } h \rightarrow 0$$

حيث $p \geq \frac{1}{2}$.

تعريف (8): الاتساق Consistent [27]

يقال عن طريقة عددية تنتج متتالية الحل العددي $\{x_n\}$ حيث $n = 1, 2, \dots, N$ بخطوة h إنها متسقة بمتوسط المربعات من المرتبة p إذا تحققت المتراحة الآتية:

$$\max_{1 \leq n \leq N} (E(|\delta_k|^2))^{1/2} \leq C h^p, \text{ as } h \rightarrow 0$$

حيث δ_k الخطأ المقطوع الموضعي، C ثابت موجب مستقل عن طول الخطوة h ، ويرمز E للتوقع الرياضي.

3- النتائج والمناقشة :

سنقدم ثلاث طرائق عددية هم طريقة أولر مارياما وطريقة ميلستين وطريقة رانج كوتا لإيجاد الحلول العددية لمسألة المعادلة التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد (1) ولكن أولاً نحتاج لإيجاد محاكاة عددية حاسوبية لعملية وينر العشوائية المستمرة مع الزمن $W(t)$.

3-1 محاكاة عملية وينر

من أجل محاكاة عددية متقطعة لعملية وينر العشوائية المستمرة مع الزمن $W(t)$ التي تأخذ قيمة عددية لأجل كل قيمة $t \in [0, T]$ حيث $T > 0$. نأخذ تجزئة منتظمة للمجال $[0, T]$ بخطوة $t = \frac{T}{N}$ لأجل عدد صحيح موجب N ، و سنرمز بـ W_k لقيمة $W(t_k)$ عند الزمن $t_k = k dt, k = 0, 1, \dots, N$ عندئذ لدينا من خصائص عملية وينر أن $W_0 = 0$ باحتمال 1. وأن العلاقة الآتية محققة:

$$W_{k+1} = W_k + dW_{k+1}, k = 0, 1, \dots, N - 1$$

إذ أن كل dW_k هو متغير عشوائي مستقل له التوزيع $dW_k \sim \sqrt{dt}N(0,1)$ وبالتالي

بأخذ

حيث $Z_k \in \mathbb{R}$ متغير عشوائي مستمر له التوزيع $N(0,1)$ ، يمكننا الحصول على إحدى قيمه Z_k باستخدام العملية العشوائية RandomReal في لغة البرمجة Mathematica بعد تحديد تابع التوزيع الطبيعي كما في المقطع البرمجي الآتي:

$$dW = \text{Sqrt}[dt] * \text{RandomReal}[\text{NormalDistribution}[0,1]]$$

ومن أجل كل تطبيق للسطر البرمجي السابق نحصل على قيمة dW_k محددة تتعلق بـ Z_k إحدى قيم المتغير العشوائي Z_k ، وبأخذ مجموعة من القيم تنتج عملية المعاينة والعينة dW_k عينة عشوائية حجمها $N > 30$ لها توزيع طبيعي $dW_k \sim \sqrt{dt}N(0,1)$ عندئذ

$$W_{k+1} = W_k + dW_{k+1}, k = 0, 1, \dots, N - 1$$

وعملية وينر الناتجة $W(t; w)$ متعلقة بالحدث الاحتمالي $w \in \Omega$ وتسمى مساراً متعلقاً بـ w . ويمكن القول إن جملة الاختيارات Z_k هي الحدث w الذي يحدد مساراً واحداً. وعليه يمكن حساب قيمة تقريبية لتكامل إيتو كالاتي:

$$\int_0^t f(s) dW(s) = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^N f(t_{k-1})(dW_k) \approx \sum_{k=1}^N f(t_{k-1})(dW_k),$$

وهذا سيمكننا من إيجاد تقريب للحد العشوائي GdW في المعادلة (1). عادة، يتم إجراء محاكاة لمسار واحد لعملية وينر العشوائية $W(t; w)$ ، أي إيجاد قيمة واحدة للضجة البيضاء dW_k أو Z_k من أجل كل لحظة زمنية t_k حيث

وبالتالي الحصول على الحلول العددية $X_k(w)$ المتعلقة بمسار واحد $W(t; w)$ لعملية وينر. $k = 1, 2, \dots, N$

3-2 الحلول العددية للمعادلة التفاضلية العشوائية من النوع المحايد

سنقوم بتطبيق الطرائق الثلاث: أولر-مارياما [11] و ميلستين [2] و رانج-كوتا [22] على المعادلة التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد (1) بالترتيب، ونشير إلى أن هذه الطرائق طبقت لحل مسألة المعادلة التفاضلية العشوائية المتأخرة وليست من النوع المحايد.

طريقة أولر-مارياما (Euler-Maruyama Method):

نستخدم تجزئة منتظمة لمجال الحل $[0, T]$ كالاتي:

$$\Delta: \equiv \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots < t_N = T\}$$

حيث $t_k = kdt, k = 0, 1, \dots, N$ و $dt = (T)/N$ طول الخطوة، وبفرض أنه يوجد m عدد صحيح موجب تماماً بحيث يكون $\frac{T}{m} = dt$ تقريباً حيث τ هو ثابت التأخير. وسنفرض أن الطريقة العددية تنتج متتالية الحل العددي $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, \dots, x_N$ كحاكاة للحل الدقيق $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k), \dots, X(t_N)$ وبعد الحصول على $dW_k, k = 0, 1, \dots, N$ وبالتالي يتحدد مسار واحد لعملية وينر عندئذ يمكن تقريب المؤثر التفاضلي باستخدام المؤثر الفرقى الآتي:

$$dX(t_k) \approx X(t_{k+1}) - X(t_k)$$

بتعويض هذا التقريب في المعادلة (1) وحساب الدوال F و G من أجل القيم المتقطعة x_k, x_{k-m} للحل نحصل على صيغة أولر-مارياما التكرارية لإيجاد الحل العددي للمعادلة (1) من نوع NSDDE، كالاتي:

$$\begin{aligned} x_{k-m} &= \phi(t_{k-m}), \quad k = 0, \dots, N-1 \\ x_{k+1} &= x_k + r(x_{k-m+1} - x_{k-m}) + F(t_k, x_k, x_{k-m})dt + G(t_k, x_k, x_{k-m})dW_{k+1}, \\ k &= 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (3)$$

حيث $dW_{k+1} = W_{k+1} - W_k$ وتحسب القيم المتقطعة بإجراء محاكاة حاسوبية لعملية وينر سابقة الذكر.

طريقة ميلستين (Milstein Method)

سنطبق الآن طريقة ميلستين لإيجاد الحل العددي للمعادلة التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد (1) والتي تعطى بالعلاقة التكرارية:

$$\begin{aligned} x_{k-m} &= \phi(t_{k-m}), \quad k = 0, \dots, N-1 \\ x_{k+1} &= x_k + r(x_{k-m+1} - x_{k-m}) + F(t_k, x_k, x_{k-m})dt + G(t_k, x_k, x_{k-m})dW_{k+1} \\ &\quad + \frac{1}{2}G(t_k, x_k, x_{k-m})\frac{\partial g}{\partial x}G(t_k, x_k, x_{k-m})(dW_{k+1}^2 - dt), \end{aligned} \quad (4)$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

حيث $dW_{k+1} = W_{k+1} - W_k$ وتحسب قيمها كما أشرنا إليها سابقاً.

طريقة رانج-كوتا: Runge-Kutta method

تعطى طريقة رانج-كوتا من المرتبة الأولى بتطبيقها لحل المعادلة التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد (1) بالعلاقة التكرارية الآتية:

$$\begin{aligned} x_{k-m} &= \phi(t_{k-m}), \quad k = 0, \dots, N-1 \\ x_{k+1} &= x_k + r(x_{k-m+1} - x_{k-m}) + F(t_k, x_k, x_{k-m})dt + G(t_k, x_k, x_{k-m})dW_{k+1} \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}[G(x_k + G(t_k, x_k, x_{k-m})\sqrt{dt}, x_{k-m}) - G(t_k, x_k, x_{k-m})](dW_{k+1}^2 - dt)/\sqrt{dt}, \quad (5)$$

$$k = 0, 1, \dots, N - 1$$

حيث $dW_{k+1} = W_{k+1} - W_k$ وتحسب قيمها كما أشرنا إليها سابقاً.

3-3 التقارب العددي:

نقوم بدراسة التقارب الضعيف لطريقة أولر-مارياما، وتحديد مرتبة التقارب لكل من طريقتي ميلستين و رانج كوتا عندما يتم تطبيقها لحل معادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد (1). تم تطبيق الطرائق العددية المذكورة لحل بعض الأنماط من المعادلات التفاضلية العشوائية في الحالات الخاصة الخالية من الحد المحايد الآتية:

• المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة SDDE والتي يغيب فيها الحد المحايد: [16,5,4]

$$\begin{cases} d(X(t)) = F(t, X(t), X(t - \tau_n))dt + G(t, X(t), X(t - \tau))dW(t), t \in [0, T] \\ X(t) = \phi(t); t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (6)$$

• المعادلات التفاضلية العشوائية SDE والتي يغيب فيها كل حد متأخر [15]

$$\begin{cases} d(X(t)) = F(t, X(t))dt + G(t, X(t))dW(t), t \in [0, T] \\ X(0) = \beta : const \end{cases} \quad (7)$$

حيث دالتا الازاحة والانتشار G, F في النموذجين (6)-(7) يحققان شرط ليبتشز [27]:

$$\begin{aligned} F(t, x_1, y_1) - F(t, x_2, y_2) &\leq L_i(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) \\ G(t, x_1, y_1) - G(t, x_2, y_2) &\leq K_i(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|), i = 1, 2 \\ \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in R, t \in R^+ \end{aligned}$$

لأجل $L_i, K_i, i=1,2$ ثوابت ليبتشز موجبة .

مبرهنة (1): [11]

الحل العددي بطريقة أولر-مارياما (3) للمعادلة (1) NSDDE متقارب بقوة من المرتبة $\frac{1}{2}$ أي من أجل ثابت كيفي C_1 غير مرتبط بطول الخطوة dt تحقق العلاقة الآتية:

$$\max_{0 \leq n \leq N} E(|e_n|^2) \leq C_1(dt)$$

مبرهنة (2): [27]

طريقة أولر-مارياما المعطاة بالعلاقة التكرارية (3) متسقة، وتعطى صيغة الخطأ المقتطع المحلي لأجل ثابت كيفي C_2 غير مرتبط بطول الخطوة dt بالعلاقة الآتية:

$$\max_{0 \leq n \leq N} E(|\delta_n|) \leq C_2 dt^2$$

مبرهنة (3):

الحل العددي بطريقة أولر-مارياما (3) عندما يتم تطبيقها على المعادلة التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد (1) سيكون متقارب بضعف من المرتبة 1 أي تتحقق العلاقة الآتية:

$$\max_{0 \leq n \leq N} E(|e_n|) \leq C_3(dt)$$

لأجل ثابت كيفي C_3 غير مرتبط بطول الخطوة dt .

البرهان:

إن الحل العددي للمعادلة (1) يمكن كتابته بطريقة أولر-مارياما بالشكل

$$x_{n+1} = x_n + r[x_{n+1-m} - x_{n-m}] + F(t, x_n, x_{n-m})dt + G(t, x_n, x_{n-m})dw(t)$$

$$x_{n+1} = x_n + \Psi(r, x_{n-m+1}, x_{n-m}, x_n, dt, dw(t))$$

حيث :

$$\begin{aligned} \Psi(r, x_{n-m+1}, x_{n-m}, x_n, dt, dw(t)) \\ = r[x_{n-m+1} - x_{n-m}] + F(t, x_n, x_{n-m})dt + G(t, x_n, x_{n-m})dw(t) \end{aligned}$$

ومنه

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \Psi(r, x(t_{n-m+1}), x(t_{n-m}), x(t_n), dt, dw(t))$$

ولنعرف التابع

$$\begin{aligned} dn &= \Psi(r, x(t_{n-m+1}), x(t_{n-m}), x(t_n), dt, dw(t)) - \\ &\Psi(r, x_{n-m+1}, x_{n-m}, x_n, dt, dw(t)) = r[x(t_{n-m+1}) - x(t_{n-m})] + \\ &F(t_n, x(t_n), x(t_{n-m}))dt + G(t_n, x(t_n), x(t_{n-m}))dw(t) - [r[(x_{n-m+1}) - \\ &(x_{n-m})] + F(t_n, x_n, x_{n-m})dt + G(t_n, x_n, x_{n-m})dw(t)] = \\ &r(e_{n+1-m}) - r(e_{n-m}) + k_1(e_n)dt + k_2(e_{n-m})dt + k_3(e_n)dw(t) + k_4(e_{n-m})dw(t) \end{aligned}$$

حيث $K_i; i = 1, 2, 3, 4$ هي ثوابت ليبتشيز ونقدر الخطأ الشامل كفرق بين الحل الدقيق و الحلالعددي عند t_{n+1} :

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= |X(t_{n+1}) - x_{n+1}| = |X(t_{n+1}) - x(t_{n+1}) + x(t_{n+1}) - x_{n+1}| = \\ &| [X(t_{n+1}) - x(t_n) - \Psi(r, x(t_{n-m+1}), x(t_{n-m}), x(t_n), dt, dw(t))] + [x(t_n) - x_n] \\ &+ [\Psi(r, x(t_{n-m+1}), x(t_{n-m}), x(t_n), dt, dw(t)) \\ &- \Psi(r, x_{n-m+1}, x_n - \tau, x_n, dt, dw(t))] | \\ &\leq |\delta_{n+1} + e_n + dn| \end{aligned}$$

$$E(|e_{n+1}|) \leq E|\delta_{n+1} + e_n + dn| \leq E|\delta_{n+1}| + E|e_n| + E|dn|$$

وبالتالي

$$\begin{aligned} E(|e_{n+1}|) &\leq E|\delta_{n+1}| + E|e_n| + E\{r(e_{n+1-m}) - r(e_{n-m}) + K_1(e_n)dt + K_2(e_{n-m})dt \\ &+ K_3(e_n)dw(t) + K_4(e_{n-m})dw(t)\} \end{aligned}$$

$$\leq (1+r)E|\delta_{n+1}| + (1+K_1dt)E(|e_n|) + (K_2dt)E(|e_{n-m}|)$$

حيث $E|dw(t)| = 0$.ومنه وحسب المبرهنة [2] حيث $C^* = C_2 * (1+r)$

$$E(|e_{n+1}|) \leq C^* dt^2 + (1+K_1dt)E(|e_n|) + (K_2dt)E(|e_{n-m}|)$$

(8)

نستخدم الاستقراء الرياضي لإثبات مرتبة التقارب وذلك بتجزئة المجال $[0, T]$ لمجالات طولها τ ، ونقدم

البرهان على مرحلتين.

المرحلة الأولى: نبدأ بالمجال الابتدائي $I_0 = [0, \tau]$ من أجل $n = 0, 1, \dots, m$ ، وعندها يكون $t_n \in [0, \tau]$ و $t_{n-m} \in [-\tau, 0]$ ، عندئذ يكون $e_{n-m} = 0$ لأنه معطى وفق الشرط الابتدائي، وعلى هذا

المجال تتحقق العلاقة الآتية:

$$E(|e_{n+1}|) \leq C^* dt^2 + (1+K_1dt)E(|e_n|)$$

وبناءً على ذلك نجد:

$$\begin{aligned} E(|e_1|) &\leq C^* dt^2 \\ E(|e_2|) &\leq C^* dt^2 + (1 + K_1 dt)E(|e_1|) \leq C^* dt^2 + (1 + K_1 dt)C^* dt^2 \\ &\leq (1 + (1 + K_1 dt))C^* dt^2 \\ E(|e_3|) &\leq C^* dt^2 + (1 + K_1 dt)E(|e_2|) \leq (1 + (1 + K_1 dt) + (1 + K_1 dt)^2)C^* dt^2 \\ &\vdots \\ E(|e_{n+1}|) &\leq C^* dt^2 + (1 + K_1 dt)E(|e_n|) \leq (1 + (1 + K_1 dt) + \dots + (1 + K_1 dt)^n)C^* dt^2 \\ &= \frac{(1 + K_1 dt)^{n+1} - 1}{(1 + K_1 dt) - 1} C^* dt^2 = ((1 + K_1 dt)^{n+1} - 1) \frac{C^*}{K_1} dt \leq \\ &((e^{K_1 T})^{n+1} - 1) \frac{C^*}{K_1} dt \leq (e^{K_1 T} - 1) \frac{C^*}{K_1} dt = C^* dt \end{aligned}$$

وهنا نجد أن مرتبة التقارب الضعيف هي ١ على المجال I_0 .

المرحلة الثانية: نفترض أن مرتبة التقارب الضعيف هي ١ على المجال الجزئي $I_j = [\tau j, \tau(j+1)]$ أي تتحقق العلاقة:

$$E(|e_{n+1}|) \leq C^* dt$$

ولنبرهن أن ذلك أيضاً محقق على المجال $I_{j+1} = [\tau(j+1), \tau(j+2)]$:

نبدأ من العلاقة (8) من أجل $m(j+1) \leq n \leq m(j+2)$

$$E(|e_{n+1}|) \leq C^* dt^2 + (1 + K_1 dt)E(|e_n|) + (K_2 dt)E(|e_{n-m}|)$$

ويكون e_{n-m} هو الخطأ على المجال الجزئي I_j وبالتالي نجد:

$$\begin{aligned} E(|e_{n+1}|) &\leq C^* dt^2 + (1 + K_1 dt)E(|e_n|) + (K_2 dt)C^* dt \\ &\leq (C^* + K_2 C^*) dt^2 + (1 + K_1 dt)E(|e_n|) \\ &\leq C^* dt^2 + (1 + K_1 dt)E(|e_n|) \end{aligned}$$

وبنفس العمليات الرياضية المنفذة على الإثبات من أجل المجال I_0 تتحقق العلاقة:

$$E(|e_{n+1}|) \leq C^* dt, \quad m(j+1) \leq n \leq m(j+2)$$

بالتالي فالعلاقة محققة على كامل $[0, T]$ وبهذا يتم البرهان ويتحقق:

$$\max_{0 \leq n \leq N} E(|e_n|) \leq C^* (dt)$$

مبرهنة (٤): [12]

الحل العددي بطريقة ميلستين للمعادلة SDDE (6) متقارب بقوة من المرتبة 1 أي تتحقق العلاقة الآتية:

$$\max_{0 \leq n \leq N} E(|e_n|^2) \leq C dt^2$$

مبرهنة (٥): [22]

الحل العددي بطريقة رانج-كوتا للمعادلة SDDE (6) متقارب بقوة من المرتبة 1 أي تتحقق العلاقة

الآتية:

$$\max_{0 \leq n \leq N} E(|e_n|^2) \leq C dt^2$$

لا نملك نتائج عن مرتبة تقارب الحل العددي بطريقتي ميلستين ورانج كوتا عندما يتم تطبيقهما على المعادلة التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد (1) ولكن وبملاحظة أن إضافة الحد المحايد يغير نوع المعادلة فإن كل طريقة تحتاج لدراسة تحليلية جديدة للتقارب. ولكن عوضاً عن هذا سنقوم بتحديد مرتبة التقارب العددي لطريقتي ميلستين ورانج كوتا.

٣-4 تقدير مرتبة التقارب العددي:

نظراً لعدم توفر الحل الدقيق $X(T)$ سنقوم بالاستعاضة عنه بحل عددي x_N^{fine} وهو حل عددي نحصل عليه باستخدام خطوة زمنية صغيرة $dt = 2^{-10}$ ، وبعدئذٍ نقوم بإيجاد الحلول العددية $x_{n_1}^{h_1}, x_{n_2}^{h_2}, \dots, x_{n_5}^{h_5}$ باستخدام خطوات مختلفة $h_i, i=1,2,\dots,5$ ، ثم نحسب قيم الفروق $\delta_i^j = |x_{n_i}^{h_i} - x_N^{fine}|^2$ الموافقة لمسارات وينر $W(t; w_j)$ ، ونقوم بإيجاد نفس المقدار δ_i^j من أجل الطرائق العددية الثلاث، ومن ثم تجري معاينة $\{\delta_i^j\}_{1 \leq j \leq M}$ حيث $M > 30$ عدد العينات وكل عينة تستخدم مسار عملية وينر خاص بها، وبالتالي نستخدم M مساراً مختلفاً لعملية وينر في كل تجربة.

عندئذٍ بإيجاد التوقع الرياضي لـ δ_i^j نحصل على علاقة الخطأ بمتوسط المربعات الآتية:

$$E(\delta_i^j) = E(|x_{n_i}^{h_i} - x_N^{fine}|^2)$$

والذي يستخدم كمقدّر للمقدار $E(|X(T) - x(T)|^2)$. وعند القيام بهذه العملية نحصل على متتالية تقديرات لقيم الأخطاء $errors = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ حيث $e_i = E(\delta_i^j)$ هو تقدير الخطأ الموافق للخطوة h_i .

وبفرض أن الطريقة العددية متقاربة بمتوسط المربعات من المرتبة γ فإن ذلك يكتب بحسب التعريف كالاتي:

$$E(|X(T) - x(T)|^2) \leq O(dt^{2\gamma})$$

ومن أجل تقدير قيمة γ فإننا نستخدم [11]

$$nECO_i = \frac{1}{2} \frac{\ln(e_i) - \ln(e_{i+1})}{\ln(h_i) - \ln(h_{i+1})}, \quad i = 1, 2, \dots$$

وبأخذ متوسط القيم الناتجة ينتج تقدير مرتبة التقارب العددي للطريقة المستخدمة.

3-5 الاختبارات العددية

لاختبار الفاعلية والدقة العددية لطرائق أولر مارياما و ميلستين و رانج كوتا سنطبق هذه الطرائق لحل مسألتين اختبار إحداهما خطية والثانية غير خطية من نفس نمط المسألة المطروحة ثم تقدير مرتبة التقارب لكل منهما. وتم استخدام لغة البرمجة *Mathematica* لإعداد البرامج اللازمة لتنفيذ الطرائق الثلاثة المقترحة بالإضافة إلى محاكاة عملية وينر ولأجل ذلك في الاختبارات تم إجراء معاينة من $M = 1000$ مساراً مختلفاً من مسارات عملية وينر.

مسألة (1): لنأخذ المسألة الخطية الآتية :

$$\begin{cases} d(x(t) - ax(t - \tau)) = (\lambda x(t) + \beta x(t - \tau))dt + (\mu x(t) + dx(t - \tau))dw(t) ; t \geq 0 \\ x(t) = t + \tau; t \in [-1, 0] \end{cases}$$

نحل المسألة على المجال $[0, 2]$ باستخدام تأخير $\tau = 1$ ، وقيم الوسطاء

$$\alpha = 0.1, \lambda = -0.5, \beta = 0.1, \mu = 0.4, d = 0$$

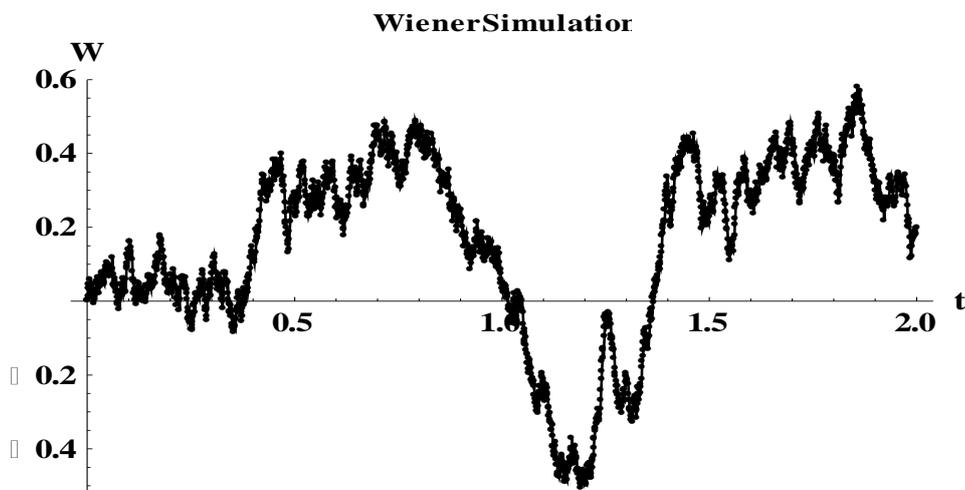
وذلك من أجل $dt = 2^{-10}$ ، $N = 2^{11}$

نحل المسألة 1 بالطرائق الثلاثة: أولر مارياما و رانج كوتا و ميلستين، بالإضافة إلى إنشاء محاكاة عددية لعملية وينر العشوائية. وندرج في الجدول (1) نتائج مقارنات الأخطاء المطلقة ومرتبة التقارب لكل طريقة باستخدام الخطوات $h_i = 2^{-2-i}, i=1,2,\dots,5$ ، نرسم في الشكل (1) محاكاة عملية وينر في المجال $[0, 2]$ باستخدام خطوة $h = 2^{-10}$.

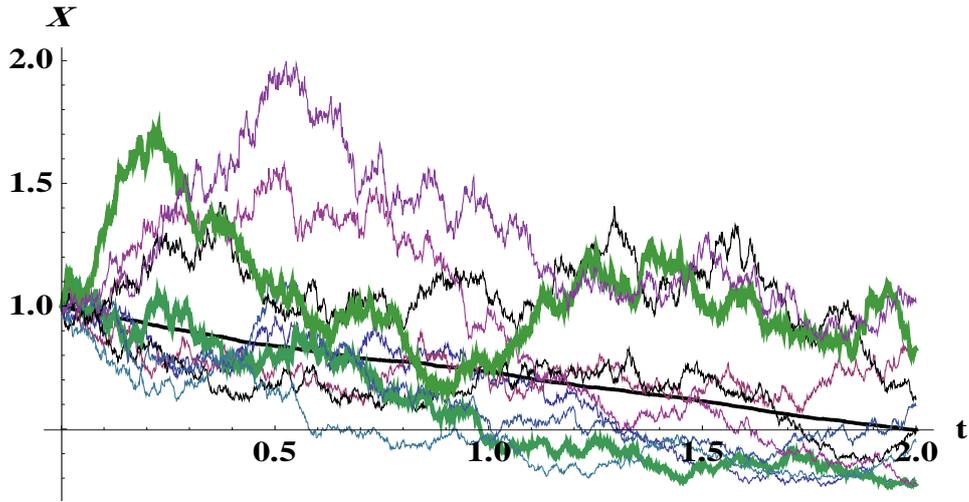
نبين في الشكل(2) عينة من الحلول العددية $X_i = 20$ مع توقعها $E(X)$ بطريقة أولر-مارياما ونلاحظ أن هذه الحلول متقاربة نحو توقعها . يظهر الشكل(3) الرسوم البيانية للأخطاء المطلقة بطريقة أولر مارياما من أجل عدة خطوات مختلفة h_i من خلال حساب الفرق بالقيمة المطلقة بين X_{fine} ونلاحظ أنه كلما كانت الخطوة h_i أصغر كلما تضاعف الخطأ وهذا يشير إلى تقارب الحل العددي. نرسم في الشكل (4) مقارنات الأخطاء المطلقة للطرائق الثلاثة أولر-مارياما التقارب الضعيف ●●● أولر-مارياما التقارب القوي $\triangleright\triangleright\triangleright$ ومليستين ○○○ و رانج كوتا □□□ ، حيث تشير نتائج المقارنات إلى أفضلية طريقي رانج كوتا ومليستين من حيث الدقة على طريقة أولر مارياما ذات التقارب الضعيف والقوي.

الجدول(1):مقارنات الأخطاء المطلقة ومرتبة التقارب للطرائق الثلاثة باستخدام خطوات مختلفة

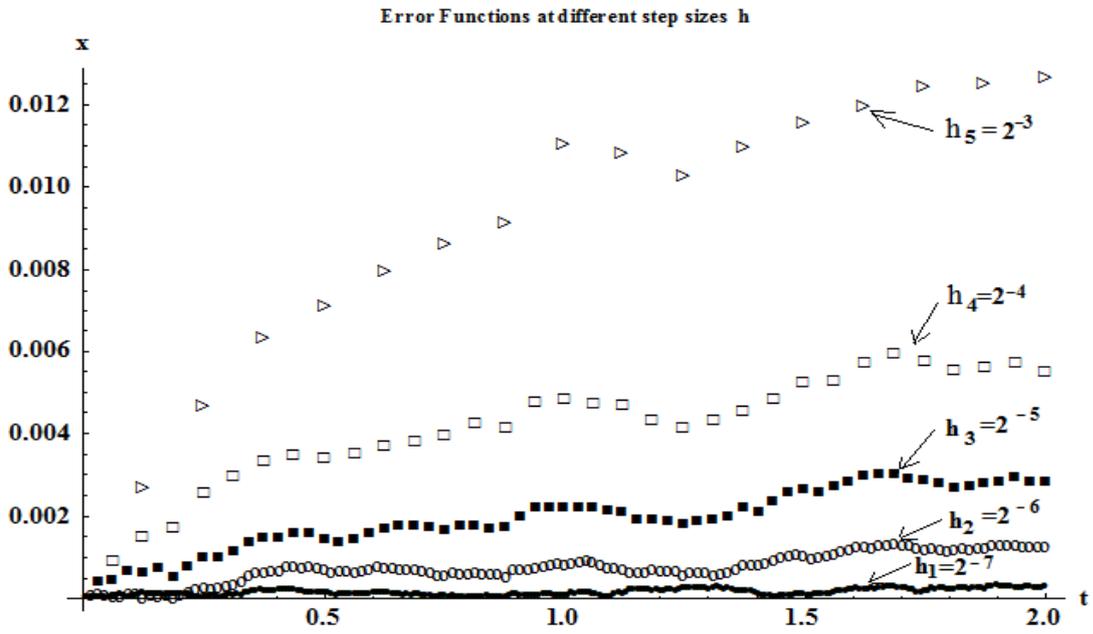
طريقة رانج كوتا	طريقة مليستين	طريقة أولر-مارياما التقارب القوي	طريقة أولر-مارياما التقارب الضعيف	طول الخطوة h
0.000285041	0.000285041	0.0013156	0.0126541	2^{-3}
0.00007225	0.00007225	0.000566	0.0054723	2^{-4}
0.0000193636	0.0000193636	0.0002453	0.00281002	2^{-5}
$4.93194 * 10^{-6}$	$4.93194 * 10^{-6}$	0.0001076	0.0012667	2^{-6}
$1.371152 * 10^{-6}$	$1.371152 * 10^{-6}$	0.0000516	0.0002579	2^{-7}
0.962455	0.962455	0.5839	1.201	مرتبة التقارب



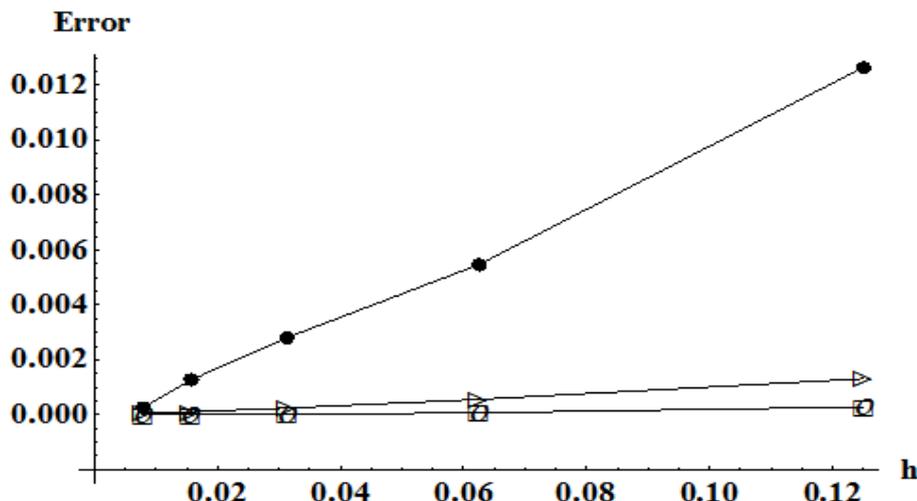
الشكل(1): محاكاة عملية وينر من أجل $N = 2^{11}$, $dt = 2^{-10}$



الشكل (٢): الحل العددي بطريقة أولر-مارياما من أجل $N = 2^{11}, dt = 2^{-10}$.



الشكل (٣): الخطأ المطلق لطريقة أولر-مارياما من أجل خطوات مختلفة $h_i = 2^{-2-i}, i = 1, 2, \dots, 5$.



الشكل (٤): مقارنة الأخطاء المطلقة للطرائق الثلاثة أولر-مارياما التقارب الضعيف ●●● أولر-مارياما التقارب القوي >>> وميلستين ○○○ ورانج كوتا □□□

مسألة (٢): لتأخذ المسألة غير الخطية الآتية:

$$\left\{ \begin{aligned} d \left(x(t) - \frac{1}{4} x(t - \tau) \right) &= (\lambda x(t) + b x(t - \tau)) dt + (\mu \sin(x(t)) + dx(t - \tau)) dw(t) \\ x(t) &= t + \tau; t \in [-1, 0] \end{aligned} \right.$$

بتأخير $\tau = 1$ ، وقيم الوسطاء $\alpha = 0.25, \lambda = -0.5, \beta = 0.1, \mu = 0.1, d = 0.1$

وذلك على المجال $[0, 2]$ من أجل $N = 2^{11}, dt = 2^{-10}$

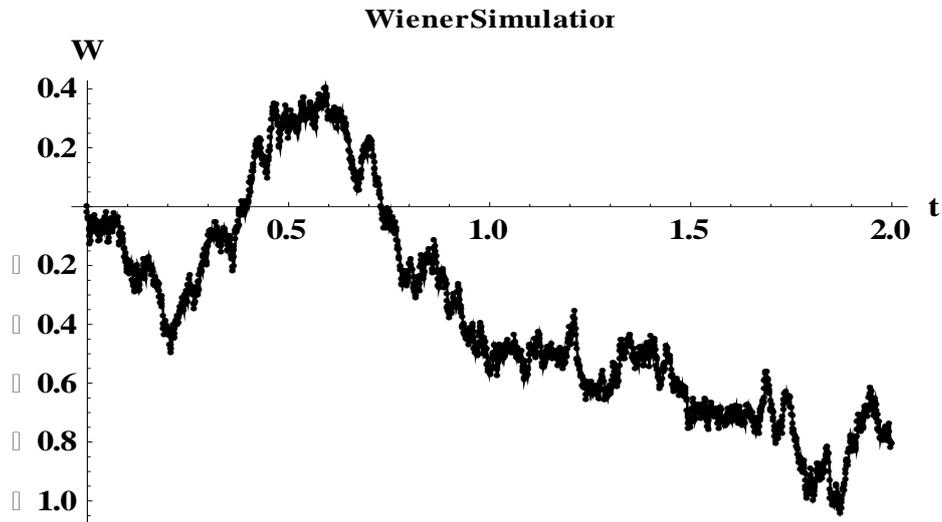
نحل المسألة ٢ غير الخطية بالطرائق الثلاثة: أولر مارياما و رانج كوتا وميلستين، بالإضافة إلى إنشاء محاكاة عددية لعملية وينر العشوائية. وندرج في الجدول (٢) نتائج مقارنات الأخطاء المطلقة ومرتبة التقارب لكل طريقة باستخدام الخطوات $h_i = 2^{-2-i}, i=1, 2, \dots, 5$ ، نرسم في الشكل (5) محاكاة عملية وينر في المجال $[0, 2]$ باستخدام خطوة $h = 2^{-10}$.

نبين في الشكل (6) عينة من الحلول العددية $X_i = 20$ مع توقعها $E(X)$ بطريقة رانج-كوتا ونلاحظ أن هذه الحلول متقاربة نحو توقعها. يظهر الشكل (7) الرسوم البيانية للأخطاء المطلقة بطريقة رانج-كوتا من أجل عدة خطوات مختلفة h_i من خلال حساب الفرق بالقيمة المطلقة بين X_{fine} و X_{hi} ونلاحظ أنه كلما كانت الخطوة h_i أصغر كلما تضاعف الخطأ وهذا يشير إلى تقارب الحل العددي. نرسم في الشكل (٨) مقارنات الأخطاء المطلقة في الحل العددي للمسألة ٢ غير الخطية للطرائق الثلاثة أولر-مارياما التقارب الضعيف ●●● أولر-مارياما التقارب القوي >>> وميلستين ○○○ ورانج كوتا □□□، حيث تشير نتائج المقارنات إلى أفضلية طريقتي رانج كوتا وميلستين من حيث الدقة على طريقة أولر مارياما ذات التقارب الضعيف والقوي.

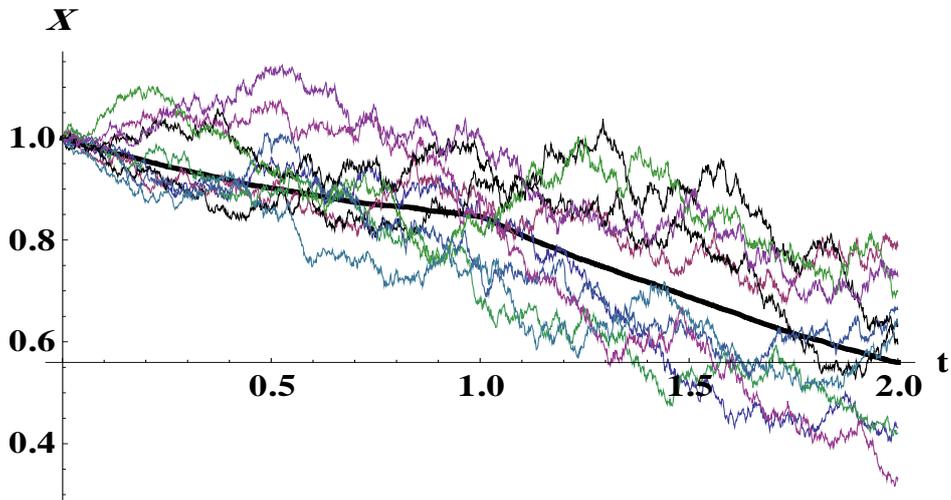
الجدول (2): مقارنات الأخطاء المطلقة القوية ومرتبة التقارب للطريقة باستخدام خطوات مختلفة

طريقة رانج كوتا	طريقة ميلستين	طريقة أولر-مارياما التقارب القوي	طريقة أولر-مارياما التقارب الضعيف	طول الخطوة h
0.00989204	0.0092488	0.0196201	0.0268714	2^{-3}
0.00273416	0.00236056	0.00907603	0.0130855	2^{-4}

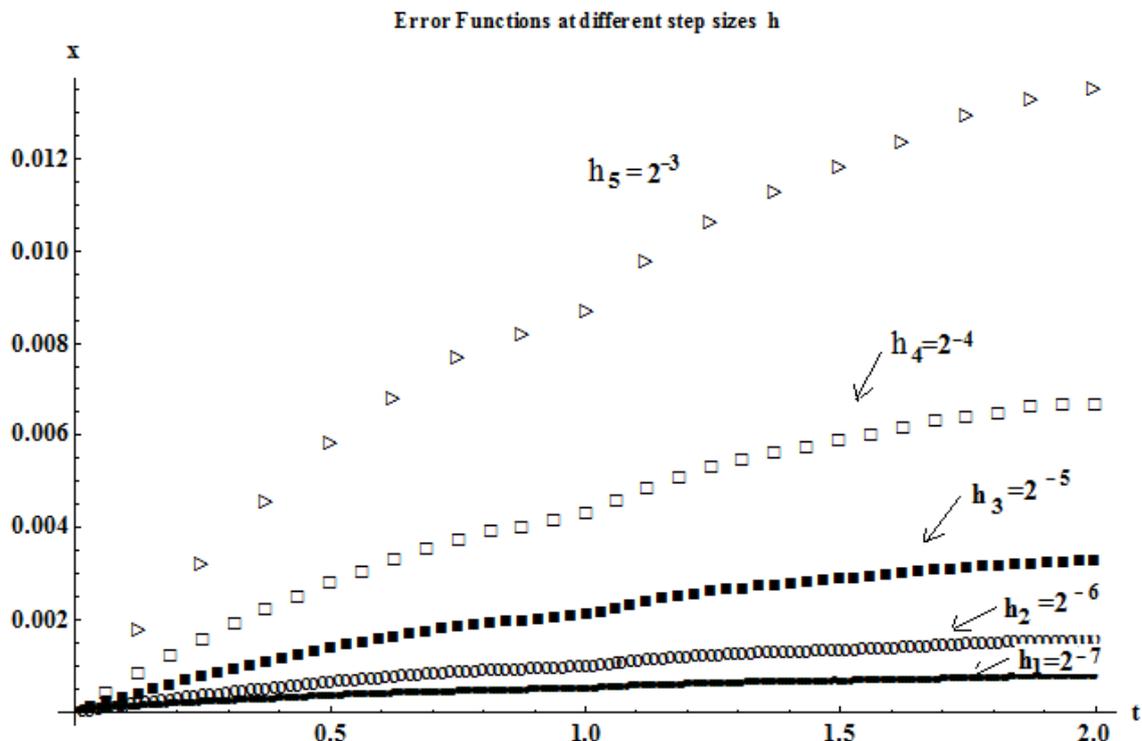
0.000812396	0.000626904	0.00342141	0.0064525	2^{-5}
0.000243858	0.000175007	0.000552364	0.00305682	2^{-6}
0.0000867704	0.0000499216	0.0000976332	0.00135106	2^{-7}
٠,٩٤١٦٨٣	٠,٨٥٤١١٥	٠,٥٣٥٦٢	1.07848	مرتبة التقارب



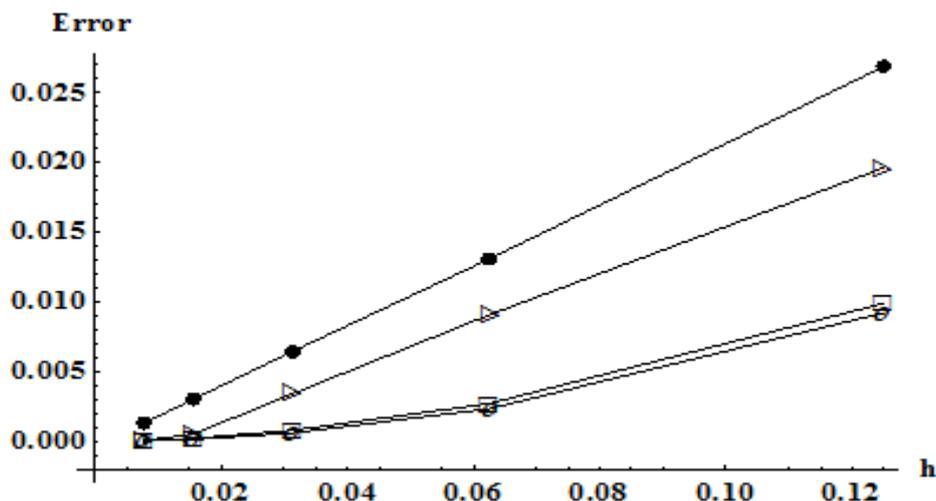
الشكل (٥): محاكاة عملية وينر من أجل $N = 2^{11}$, $dt = 2^{-10}$



الشكل (٦): الحل العددي بطريقة رانج-كوتا من أجل $N = 2^{11}$, $dt = 2^{-10}$



الشكل (٧): دالة الخطأ لطريقة رانج-كوتا من أجل عدة خطوات مختلفة من أجل $N = 2^{11}$, $dt = 2^{-10}$



الشكل (٨): مقارنة الأخطاء المطلقة للطرائق الثلاثة أولر-مارياما التقارب الضعيف ●●● أولر-مارياما التقارب القوي ▷▷▷ وميلستين ○○○ ورانج كوتا □□□

الاستنتاجات والتوصيات:

قمنا بإيجاد الحلول العددية لنموذج من المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد في الحالتين الخطية وغير الخطية وذلك باستخدام ثلاث طرائق عددية هم طريقة أولر مارياما و طريقة ميلستين وطريقة رانج كوتا ولتبيان الفاعلية والدقة العددية لكل طريقة قمنا بتقدير مرتبة التقارب لكل منهم، ثم إجراء

اختبارات عددية ومقارنات بين هذه الطرائق عندما يتم تطبيقها لحل مسألتين إحداهما خطية والأخرى غير خطية من نفس نمط المسألة المطروحة. تشير الدراسة إلى النتائج الآتية:

نتيجة ١: طريقة أولر-مارياما المطبقة على نموذج المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد متقاربة بضعف من المرتبة 1 بقوة من المرتبة $1/2$.

نتيجة ٢: طريقة ميلستين المطبقة على نموذج المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد متقاربة بقوة من المرتبة الأولى .

نتيجة ٣: طريقة رانج-كوتا المطبقة على نموذج المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد متقاربة بقوة من المرتبة الأولى وهي مكافئة لطريقة ميلستين.

تم استخدام لغة البرمجة *Mathematica* لتنفيذ الطرائق، حيث تشير نتائج الحلول العددية والمقارنات إلى أفضلية طريقتي رانج كوتا ومليستين من حيث الدقة والفعالية على طريقة أولر مارياما ذات التقارب الضعيف والقوي.

كما نوصي بالآتي:

- استخدام طريقة مليستين أو طريقة رانج كوتا لحل مثل هذه المعادلات.
- تطوير طرائق وتقنيات عددية لمحاكاة الحل لنماذج من المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد تتضمن أكثر من عملية وينر.
- تطوير طرائق وتقنيات عددية لمحاكاة الحل لجمل من المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة من النوع المحايد.

المراجع (References)

1. AKHTARI B., *Numerical Solution of Stochastic State-Dependent Delay Differential Equations Convergence and Stability*. Advances in Difference Equations. Vol.2019, 396, **2019**,1-34.
2. ALADAG E. E. LI, *Stochastic Delay Differential Equations, Master, Thesis*, Middle East Technical University, 2017, pages 86.
3. CAO W., M. LIU, Z. FAN, *MS-Stability of the Euler-Maruyama Method for Stochastic Differential Delay Equations*, Applied Mathematics and Computation Vol. 159, **2004**, pp. 127–135.
4. CAO W.; Z. Zhang, *On Exponential Mean-Square Stability of Two-Step Maruyama Methods for Stochastic Delay Differential Equations*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 245, **2013**, 182–193.
5. CHOISTOPHER T. H.& E. Buckwar, *Numerical Analysis of Explicit one-step Methods for Stochastic Delay Differential Equations*, LMS J. Comput. Math. 3 (**2000**) 315-335.
6. ERNST P.A., F. Soleymani, *A Legendre-Based Computational Method for Solving a Class of Itô Stochastic Delay Differential Equations*. Numer Alg, Springer Nature **2018**,1-16.

7. GAO Sh. and J. Hu, *Numerical Method of Highly Nonlinear and Nonautonomous Neutral Stochastic Differential Delay Equations With Markovian Switching*, Advances in Difference Equations, Vol 2020, 688, **2020**, 1-37.
8. GUO Q., X. MAO, R. Yue, *The Truncated Euler–Maruyama Method for Stochastic Differential Delay Equations*, Numer Algor. Vol.78, **2018**, 599–624.
9. GUPTA C., J.M. López, R. Azencott, M.R. Bennett, K. Josi and W.Ott. *Modeling Delay in Genetic Networks: From Delay Birth-Death Processes to Delay Stochastic Differential Equations*, The Journal of Chemical Physics 140, 204108 (**2014**).
10. HU, P. and C. HUANG, *Delay Dependent Stability of Stochastic Split-Step θ Methods for Stochastic Delay Differential Equations*, Applied Mathematics and Computation Vol. 339, **2018**, pp. 663–674.
11. JI Y., *Convergence Rate of Euler–Maruyama Scheme for SDDEs of Neutral Type*, Journal of Inequalities and Applications. Vol. 2021, 5, **2021**, 1-21.
12. Kloeden .p.e and Shardlow T. , *The Milstein scheme for stochastic delay differential equations without anticipative calculus*, the University of Manchester, 2010.
13. LI X, H. Hong, *Numerical Analysis of Three θ Methods for Neutral Stochastic Delay Differential Equations*, Journal of Physics: Conference Series, ICAITA **2019**,1-5.
14. MAO X., *Numerical Solutions of Stochastic Functional Differential Equations*, London Mathematical Society, Royal Society (UK), 1-21, **2003**.
15. MAHMOUD S. M. , A. AL-WASSOUF, A. EHSSAN, *Numerical Simulation Stochastic of Differential Equations by Using Spline Function Approximations*, Tishreen University Journal Research-Basic Science Series Vol. 38, No 6, **2016**, **1-23**.
16. MAHMOUD S. M., A. Al-WASSOUF, and A. ASAAD, *Numerical Collocation Method for Simulation of some of Stochastic Delay Differential Equations*, Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies-Basic Sciences Series Vol. 42, No. 1 **2020**, **1-18**.
17. MAHMOUD S. M., A. Al-Wassouf, and A. S. Ehsaan, *Numerical Spline Method for Simulation of Stochastic Differential Equations Systems*. Arab Journal of Sciences & Research Publishing, Vol.5, No.4, **2021**, 1-20.
18. MAHMOUD S. M., A. Al-Wassouf, and A. S. Ehsaan. *Stochastic Differential-Algebraic Equations*, Tartous University Journal Research-Basic Science Series, Vol.5, No.4,**2021**.
19. MAHMOUD S. M., A. Al-Wassouf, and A. S. Ehsaan, *A Numerical Technique for Solving a Model of Second-Order Stochastic Differential Equations*, Damascus University Journal Research-Basic Science Series, 22-8-**2021**.
20. MAHMOUD S. M., A. Al-Wassouf, and A. S. Ehsaan, *Numerical Techniques For Solving Systems Of Stochastic differential equations*, Tishreen University, 2021.
21. MIEKISZ J., J. POLESZCZUK and M. BODNAR, *Stochastic Models of Gene Expression with Delayed Degradation*, Bull Math Biol, 73, **2011**:2231-2247.
22. Norhayati Rosli, *Stochastic Rung-Kutta Method for Stochastic delay differential equations*, Faculty of Science Universiti Teknologi Malaysia, 2012.

23. TAN L., Ch. Yuan. *Strong Convergence of A Tamed Theta Scheme for Nsddes with One-Sided Lipschitz Drift*. Applied Mathematics and Computation 338, **2018**, 607–623.
24. TAN J., H. WANG, Y. Guo and Z. Zhu, *Numerical Solutions to Neutral Stochastic Delay Differential Equations with Poisson Jumps under Local Lipschitz Condition*, *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. **2014**, 11 pages.
25. WANG P. and Y. Xu, *Averaging Method for Neutral Stochastic Delay Differential Equations Driven by Fractional Brownian Motion*, Hindawi, Journal of Function Spaces Vol. **2020**, 7 pages.
26. WANG X., S. GANA, D. WANG, *θ -Maruyama Methods for Nonlinear Stochastic Differential Delay Equations*, Applied Numerical Mathematics 98 (**2015**) 38–58.
27. ZHENG Y., *Asset Pricing Based on Stochastic Delay Differential Equations*, PHD Thesis, Iowa State University, **2015**.
28. ZHOU Sh., H. Jin, *Numerical Solution to Highly Nonlinear Neutral-Type Stochastic Differential Equation*. Applied Numerical Mathematics 140, **2019**, 48–75.